МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 2000

УДК 532.59

© 2000 г. В.В. БУЛАТОВ, Ю.В. ВЛАДИМИРОВ

ОБ АСИМПТОТИКЕ КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ГЕНЕРАЦИИ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Рассматривается задача о построении асимптотического представления решения для поля внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником, движущимся со скоростью, близкой к максимальной групповой скорости распространения отдельной волновой моды. Полученное асимптотическое представление решения для критических режимов генерации отдельной моды выражается через функцию Макдональда нулевого порядка. Приведены результаты численных расчетов по точным и асимптотическим формулам.

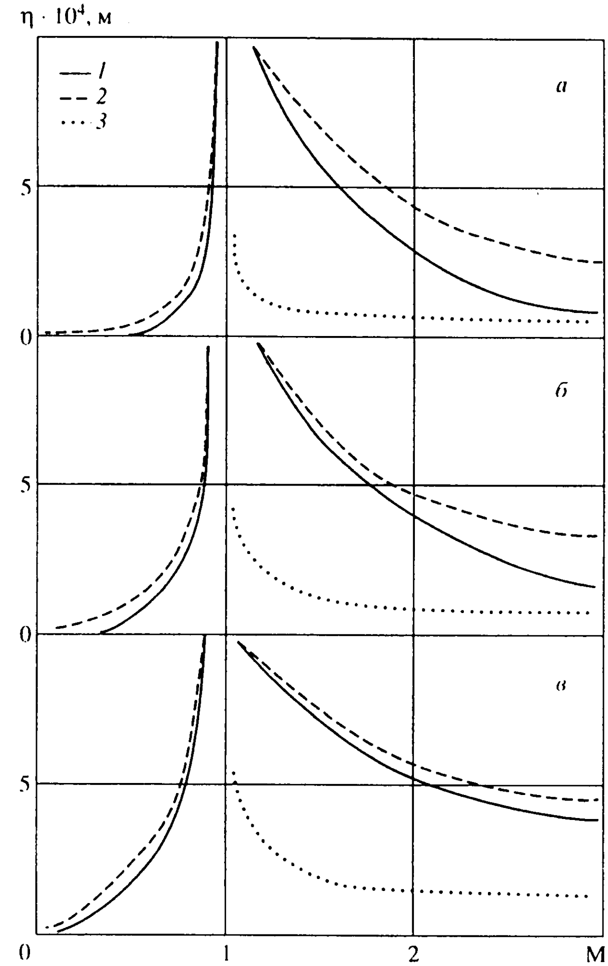
Исследование критических режимов генерации и распространения внутренних гравитационных волн важно для описания вертикальных и горизонтальных обменов в природных стратифицированных средах, так как в силу относительно небольшой диссипации внутренних волн при их распространении на большие расстояния появляется возможность исследовать характеристики различных источников их генерации [1–5]. Одним из таких режимов может быть, например, возбуждение волн потоком стратифицированной жидкости, имеющим скорость, близкую к максимальным групповым скоростям соответствующих мод, генерируемых этим потоком внутренних волн. Такая картина генерации может наблюдаться при определенных условиях, в том числе при набегании стратифицированного потока на океанский шельф, при этом в некоторых пространственных зонах шельфа скорость потока может совпадать с локальной групповой скоростью для данной глубины дна [2, 5]. В [6] путем численных расчетов показано, например, что при нестационарном движении источника в потоке стратифицированной жидкости волны с наибольшей амплитудой генерируются при скоростях его движения, близких к критическим. Рассматриваемая задача является линейной, и поэтому получение асимптотических представлений решений, описывающих критические режимы генерации внутренних гравитационных волн точечными источниками, позволяет в дальнейшем эффективно исследовать аналогичные режимы и для произвольных нелокальных источников возмущений [1].

Возвышение η поля внутренних гравитационных волн, возбуждаемых точечным источником массы единичной интенсивности, который начинает двигаться в момент времени $t = 0$ в слое стратифицированной жидкости $-H < z < 0$, определяется из задачи [6]

$$L_\eta = \theta(t)\frac{\partial^2}{\partial t \partial z_0}(\delta(x - x_0(t))\delta(y - y_0(t))\delta(z - z_0(t))) \tag{1}$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + N^2(z)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

где $N(z)$ – частота Брента – Вяйсяля, $\theta(t) = 0$ при $t < 0$, $\theta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$, $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ –



Первая мода возвышения поля внутренних гравитационных волн: $а - y/H = 3$, $б - 2$, $в - 1$

траектория движения источника. В качестве граничных условий используется приближение "твердой крышки"

$$z = 0, -H: \quad \eta = 0 \tag{2}$$

Решение (1), (2) имеет вид

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$$

$$\eta_n = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{\omega_n^2(k)}{k} \varphi_n(z,k) \int_0^{t} \frac{\partial \varphi_n(z_0(\tau),k)}{\partial z_0(\tau)} \exp(i\omega_n(k)(t-\tau)) J_0(kr(\tau))\, d\tau\, dk$$

$$r(\tau) = ((x - x_0(\tau))^2 + (y - y_0(\tau))^2)^{1/2}$$

где $\omega_n(k)$, $\varphi_n(z, k)$ – собственные функции и собственные значения соответствующей вертикальной спектральной задачи [6], J_0 – функция Бесселя нулевого порядка.

Далее рассматривается прямолинейное равномерное движение источника на постоянной глубине $z_0 = \text{const}$, $y_0 = 0$, $x_0 = -V\tau$, и отдельно взятая мода, индекс которой опускается. Используя замены $x + V\tau = \xi$, $x + Vt = \xi_t$, можно получить для η следующее выражение:

$$\eta = \frac{1}{2\pi V}\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{\omega^2(k)}{k}\varphi(z,k)\frac{\partial\varphi(z_0,k)}{\partial z_0}\int_x^{\xi_t}\exp(i\omega(k)(\xi_t-\xi))J_0(k\sqrt{y^2+\xi^2})d\xi dk \qquad (3)$$

Установившийся режим есть предел решения (3) при $x \to -\infty$ и фиксированных значениях ξ_t. Рассматривая далее решения для установившегося режима на траверзе движения источника $\xi_t = 0$, можно с использованием следующего соотношения [7]

$$\int_{-\infty}^{0} \cos\left(\frac{\omega(k)\xi}{V}\right)J_0(k\sqrt{y^2+\xi^2})d\xi = \begin{cases} \dfrac{\cos(y\lambda(k))}{\lambda(k)}, & k>\mu(k) \\ 0, & k<\mu(k) \end{cases}$$

$$\lambda(k) = (k^2-\omega^2(k)V^{-2})^{1/2}, \quad \mu^2(k) = \omega^2(k)V^{-2}$$

получить выражения для η в виде

$$\eta = \mathrm{Re}\int_K^\infty \frac{\omega^2(k)}{k}\frac{\exp(iy\lambda(k))}{\lambda(k)}\Phi(k,z,z_0)dk$$

$$\Phi(k,z,z_0) = \frac{1}{2\pi V}\varphi(z,k)\frac{\partial\varphi(z_0,k)}{\partial z_0}$$

$$c = \left.\frac{\partial\omega(k)}{\partial k}\right|_{k=0}$$

где c – максимальная групповая скорость соответствующей моды, K – корень уравнения $k^2V^2 = \omega^2(k)$ при $V < c$, $K = 0$ при $V > c$.

Далее, для простоты выкладок рассматривается случай экспоненциально стратифицированной жидкости $N(z) = \mathrm{const}$, тогда

$$\Phi(k,z,z_0) = \frac{1}{VN^2H^2}\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)\cos\left(\frac{\pi z_0}{H}\right) \equiv A$$

$$K = \frac{\pi}{H}(c^2V^{-2}-1)^{1/2} \equiv \varepsilon, \quad c = \frac{NH}{\pi}$$

$$\eta = A\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{N^2\exp(iykT^+(k))}{S^+(k)}dk, \quad \mathrm{M}>1$$

$$\eta = A\,\mathrm{Re}\int_\varepsilon^\infty \frac{N^2\exp(iykT^-(k))}{S^-(k)}dk, \quad \mathrm{M}<1 \qquad (4)$$

$$T^\pm(k) = (k^2\pm\varepsilon^2)^{1/2}(k^2+b^2)^{-1/2}$$

$$S^\pm(k) = (k^2\pm\varepsilon^2)^{1/2}(k^2+b^2)^{1/2}$$

$$b^2(1-\mathrm{M}^{-2}) = \begin{cases} \varepsilon^2, & \mathrm{M}>1 \\ -\varepsilon^2, & \mathrm{M}<1 \end{cases}$$

где $b = \pi/H$, $\mathrm{M} = V/c$ – число Маха для соответствующей моды, ε – параметр, описывающий меру отклонения скорости источника V от значения c. При малых значениях ε, очевидно, поведение интегралов (4) определяется малыми значениями k

$$\eta \approx A\,\mathrm{Re}\int_0^\infty c^2 \exp(iyk(k^2+\varepsilon^2)^{1/2} b^{-1})(k^2+\varepsilon^2)^{-1/2} dk, \quad \mathrm{M}>1$$

$$\eta \approx A\,\mathrm{Re}\int_\varepsilon^\infty c^2 \exp(iyk(k^2-\varepsilon^2)^{1/2} b^{-1})(k^2-\varepsilon^2)^{-1/2} dk, \quad \mathrm{M}<1$$

Используя замену $k = \varepsilon \mathrm{sh} t$, при $\mathrm{M} > 1$ и $k = \varepsilon \mathrm{ch} t$ при $\mathrm{M} < 1$, можно получить для любых значений V следующее выражение [7]:

$$\eta \approx A\,\mathrm{Re}\int_0^\infty c^2 \exp(iy\varepsilon^2 \,\mathrm{sh}(2t) b^{-1}) dt$$

$$\eta \approx \frac{AN^2 H}{2\pi} K_0\left(\frac{\pi y \varepsilon^2}{H}\right) \tag{5}$$

где K_0 – функция Макдональда нулевого порядка. Полученное выражение описывает асимптотику отдельной моды поля внутренних волн, генерируемых источником, движущимся в стратифицированной жидкости со скоростью, близкой к максимальной групповой скорости распространения соответствующей моды.

Для иллюстрации полученных результатов на фигуре приведены результаты численных расчетов по точным формулам (4) (кривая *1*) и асимптотическим формулам (5) (кривая *2*) для значений y/H = 1, 2, 3. Все расчеты проводились для первой моды. Как видно из представленных численных результатов, полученное асимптотическое представление решения в достаточно широком диапазоне скоростей источника, находящихся в пределах от $c/2$ до 2 c, верно описывает точное решение для отдельной моды.

Полученное асимптотическое представление решения в виде (5) имеет логарифмическую особенность при $y = 0$, которая является интегрируемой. Очевидно, что физический смысл имеют только поля, возбуждаемые нелокальными источниками, поэтому для расчета волнового поля от нелокального источника достаточно проинтегрировать, с соответствующим весом, точное или асимптотическое представления решения для точечного источника [1].

Как можно ожидать, при $\mathrm{M} \gg 1$, а также при больших значениях y/H (дальнее поле) асимптотическое представление отдельных мод внутренних волн, должно в соответствии с [1] описываться асимптотическим представлением, выражающимся в данном случае через функцию Эйри следующим образом:

$$\eta \approx \frac{AN^2}{2b\varepsilon(3\beta y p)^{1/3}} \mathrm{Ai}(y(3\beta y p)^{-1/3}) \tag{6}$$

$$p = (\mathrm{M}^2-1)^{1/2}, \quad \beta = V^4 \alpha (V^2-c^2)^{-5/2}$$

где Ai – функция Эйри, c, α – первые два коэффициента разложения дисперсионной кривой соответствующей моды $\omega(k)$ в нуле $\omega(k) = ck - \alpha k^3$.

На фигуре кривой *3* представлены результаты расчетов поля по формуле (6). Как видно из представленных результатов, при значениях M, лежащих в интервале $1/2 < \mathrm{M} < 2$, точное поле описывается асимптотикой (5), а при $\mathrm{M} > 2$ и при увеличении значения y/H, т.е. при удалении от источника волнового возмущения, точное поле уже описывается асимптотикой (6).

Заключение. Полученные в настоящей работе асимптотические представления решения позволяют описывать критические режимы генерации внутренних гравитационных волн для достаточно широких диапазонов скоростей, при этом при скоростях источников, существенно больших критических, и на больших расстояниях от источника возмущений, верной является асимптотика поля, выражающаяся через функцию Эйри, тем самым лишь в сравнительно небольшой области значений скоростей источника для получения решения необходимо использовать точные формулы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 99-01-00856.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Y.V.* Internal gravity waves excited by a body moving in a stratified fluid // Fluid Dynam. Res. 1995. V. 15. № 5. P. 325–336.
2. *Ramirez C., Renouard D.* Generation of internal waves over shelf // Dynamics of Atmosphere and Oceans. 1998. V. 28. № 2. P. 107–125.
3. *Кельберт М.Я., Сазонов И.А.* Распространение импульсов в жидкостях. М.: Наука, 1991. 158 с.
4. *Морозов Е.Г.* Генерация внутренних приливов на подводных хребтах // Океанологические исследования. 1988. № 41. С. 55–67.
5. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Равномерная асимптотика дальнего поля внутренних гравитационных волн при движении источника в слое стратифицированной жидкости с плавно меняющимся дном // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 111–120.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* О расчете поля внутренних гравитационных волн при произвольном нестационарном движении источника // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 174–177.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XI.1999