

УДК 532.516.5

© 2000 г. В.И. ГРАБОВСКИЙ

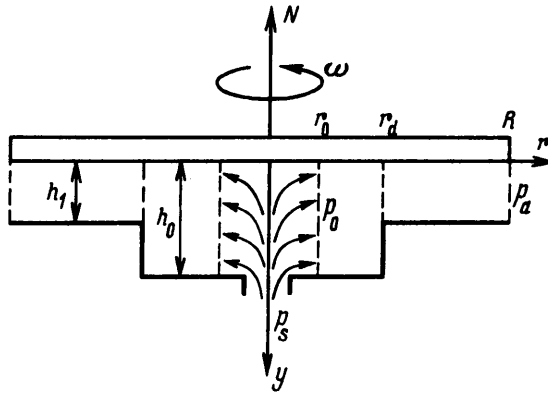
## ОПТИМАЛЬНЫЙ ЗАЗОР УПОРНОГО ГАЗОВОГО ПОДШИПНИКА С МАКСИМАЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТЬЮ

Методами вариационного исчисления проведено оптимальное профилирование зазора упорного газового подшипника (подпятника). Решена вариационная задача определения его формы, реализующей максимум несущей способности при заданном давлении наддува и при разной скорости вращения пяты. На основе приближения газовой смазки установлена структура оптимального решения при наличии ограничения на высоту кармана подпятника и без него. Результаты расчета охватывают все возможные значения установленных параметров. Проведено сравнение с оптимальными жидкостными подпятниками.

Упорные газовые подшипники находят большое применение в различных технических приложениях [1–3]. Возможность использования наддува газа расширяет диапазон рабочих скоростей вала. Особенно важным наддув становится при статических нагрузках, а также в моменты раскрутки или остановки. Устройства, использующие эффект газовой смазки, характеризуются малой величиной зазора между движущейся и неподвижной поверхностями. Среди многих вопросов, решение которых существенно для создания и совершенствования подпятников, значительное место занимает проблема оптимального профилирования рабочего зазора. Для упорных секторных подшипников без наддува оптимальная задача профилирования решена в [4]. В газостатических опорах наддув осуществляется с использованием питающего кармана (камеры) в подпятнике, форма и размер которого влияют на характеристики устройства [1–3]. Прямые задачи для подпятников решены в разных постановках, например в [1, 3, 5–10]. Особое внимание в [5, 10] уделено центробежным эффектам при больших скоростях вращения пяты. Но проблема оптимизации формы рабочего зазора подпятника осесимметричной конфигурации до сих пор не исследована.

В данной работе изучается задача определения оптимальной формы зазора между подпятником и вращающейся пятой, обеспечивающей максимальную несущую способность пяты при верхнем и нижнем ограничениях на высоту зазора. При этом учитывается течение газа и в кармане подпятника. Отметим роль ограничений на высоту зазора подпятника. С уменьшением минимальной высоты зазора и с ростом глубины кармана несущая способность подпятника возрастает. Необходимость введения верхнего ограничения определяется габаритным или физическим факторами. Последний влияет на предел применимости приближения теории смазки, а габаритный предел проявляется в перспективных микроустройствах [11]. Важное практическое значение имеют подпятники с неограниченной глубиной кармана [3]. В этом случае габаритного ограничения нет и газ в кармане считается покоящимся. Вариационная задача трансформируется в изопериметрическую с фиксированным расходом газа через подпятник.

1. Рассматривается осесимметричный подпятник (фиг. 1), над которым расположена вращающаяся пята, являющаяся основанием вала осевого подшипника. Подпятник неподвижен. Цилиндрические координаты  $r, \theta, y$  имеют ось  $y$ , направленную по



Фиг. 1. Схематическое течение газа в зазоре подпятника

оси вала. Вращение происходит с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . От угловой координаты  $\theta$  решение задачи не зависит. В центре основания расположено специально спрофилированное отверстие, служащее для подачи газа наддува из ресивера с высоким давлением  $p_s$  в зазор подпятника. В области зазора  $0 < r < r_0$  происходит перестройка течения газа с первоначально нормальным направлением движения до радиального с не зависящим от поперечной координаты  $y$  давлением  $p(r)$  в соответствии с требованием теории смазки. Принимается, что  $p(r) = p_0$  при  $0 < r \leq r_0$ . Считается, что параметры  $r_0$  и  $p_0$  заданы и зависят от  $p_s$  и устройства подачи газа. Исследуемое течение газа осуществляется в области  $r_0 \leq r \leq R$ , где  $R$  – радиус подпятника и пяты. Газ вытекает в окружающее пространство с давлением  $p_a$ . Область питающего кармана подпятника  $0 \leq r \leq r_d$ . Для параметров задачи имеем  $r_0 \leq r_d < R$  и  $p_a < p_0 \leq p_s$ .

Вводится высота зазора  $h = h(r)$ , которая, являясь координатой основания подпятника, должна удовлетворять, согласно теории смазки, условию  $h \ll R$ . Форму зазора определяет функция  $h(r)$ . Как показывается далее,  $h(r)$  имеет ступеньку при  $r = r_d$ . Значениям величин, в частности  $h$ , в сечении  $d$  приписываются соответствующие нижние индексы, а если они рвутся в нем, то до (после) него по направлению движения газа – дополнительный индекс минус (плюс). Вязкость газа  $\mu$  полагается постоянной, а плотность газа  $\rho$  считается степенной функцией давления

$$\rho = c p^n \tag{1.1}$$

с фиксированными  $c$  и  $n$ . Если  $n = 0$ , то  $\rho = \text{const}$ , что отвечает несжимаемой смазке. Случай  $n = 1$  соответствует достаточно близкому к реальным условиям изотермическому течению в узком зазоре ( $h_m \ll R$ , где  $h_m$  – минимально допустимая по постановке задачи высота зазора) [1].

Вводятся безразмерные переменные, так что за масштабы  $r$  и  $y$ ,  $h$  приняты соответственно  $R$  и  $h_m$ , а за масштабы плотности, давления и скорости соответственно  $\rho_a$ ,  $p_a$  и  $(p_a \rho_a^{-1})^{1/2} = (R_g T_a)^{1/2}$  для  $u$ ,  $v$  и  $\omega R$  для  $w$ . Величины с индексами отвечают соответствующим граничным условиям (фиг. 1) и  $\rho_a = c p_a^n$ .

Согласно оценкам теории смазки, в узком смазочном слое  $p$  – функция только  $r$ , а инерционные слагаемые в уравнениях движения малы по сравнению с вязкими, кроме, может быть, члена, связанного с вращением пяты (эффект центробежных сил [5]). В этом случае для описания течения в зазоре подпятника имеем в дополнение к безразмерному аналогу соотношения (1.1) уравнения Рейнольдса и неразрывности (в без-

размерном виде)

$$\rho = p^n, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} - \Omega^2 \frac{\rho w^2}{r} = \frac{\gamma \partial^2 u}{6\delta y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial r p u}{r \partial r} + \frac{\partial p v}{\partial y} \frac{R}{h_m} = 0 \quad (1.2)$$

$$\gamma = 6R\mu h_{mp}^{-2} p_a^{-1} (R_g T_a)^{1/2}, \quad \Omega^2 = \omega^2 R^2 \rho_a p_a^{-1} \quad (1.3)$$

В силу сделанных предположений и способа обезразмеривания граничные условия прямой (при заданном  $h$ ) задачи согласно уравнениям и физическим условиям течения (см. фиг. 1) задаются в виде

$$p(r_0) = p_0, \quad p(1) = 1, \quad u(r, 0) = u(r, h) = 0, \quad w(r, 0) = r, \quad w(r, h) = 0 \quad (1.4)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad v(r, h) = 0 \quad (r_0 \leq r \leq 1)$$

Все величины в уравнениях (1.2) и граничных условиях (1.4) – безразмерные, а в комплексах  $\gamma$  и  $\Omega$  – размерные.

Согласно четвертому уравнению (1.2) и граничным условиям профиль окружной скорости – линейный

$$w = r(1 - yh^{-1})$$

С учетом этого и условий для  $u$  из (1.4) после двукратного интегрирования третьего уравнения (1.2) по  $u$  для радиальной скорости получается

$$u(r, y) = 3y(h - y)\gamma^{-1}[-p' + rp^n\Omega^2(y^2 - 3yh + 3h^2)6^{-1}h^{-2}] \quad (1.5)$$

Здесь штрих – дифференцирование по  $r$ . При умножении соотношения (1.5) на  $r$  из первого уравнения (1.2) и интегрировании результата по  $y$  от 0 до  $h$  получается соотношение для радиального расхода газа

$$Q = 0,5rp^n h^3 \gamma^{-1}(-p' + 0,3\Omega^2 p^n r), \quad Q = \int_0^h r p u dy \quad (1.6)$$

Наконец, из пятого уравнения (1.2) с учетом (1.6) при дискретном наддуве газа получается уравнение для  $Q$  или давления  $p$

$$Q' = 0, \quad rp^n h^3(-p' + 0,3\Omega^2 p^n r) = q \equiv 2\gamma Q = \text{const} \quad (1.7)$$

Таким образом, из структуры уравнений прямой задачи и ее граничных условий следует, что при заданной форме зазора  $h(x)$  имеется четыре безразмерных параметра задачи:  $\Omega$ ,  $r_0$ ,  $p_0$  и  $\gamma$ . Причем последний, определяя применимость приближения смазки, не влияет на решение исследуемой задачи. Это вытекает из уравнения (1.7) и дальнейшего изложения.

Несущая способность подпятника  $N$  – вертикальная сила, действующая на пятю из-за повышенного давления в зазоре, или ее коэффициент  $C_N$  ( $N$  – размерная величина, а  $C_N$  и входящие в нее параметры безразмерные) определяются следующим образом:

$$N = \pi r_0^2 p_0 - \pi R^2 p_a + 2\pi \int_{r_0}^R r p dr, \quad C_N = N(\pi R^2 p_a)^{-1} = r_0^2 p_0 - 1 + 2 \int_{r_0}^1 r p dr$$

В вариационной задаче, которая является обратной, ищется такое распределение высоты зазора  $h = h(r)$ , при котором реализуется максимум коэффициента  $C_N$ . При этом высоты зазора и кармана должны быть ограничены в первом случае снизу, а во втором – сверху, так как в противном случае  $C_N$  неограниченно возрастает. В соот-

ветствии с выбором масштаба  $h$  эти ограничения сводятся к неравенствам

$$1 \leq h(r) \leq H, \quad H = h_0 h_m^{-1} \quad (1.8)$$

с заданной константой  $H \geq 1$ .

В прямой и обратной задачах уравнение для определения давления следует из соотношения (1.7), согласно которому

$$p' = -q(rp^n h^3)^{-1} + 0,3\Omega^2 p^n r, \quad L \equiv q + rp^n h^3 (p' - 0,3\Omega^2 p^n r) = 0 \quad (1.9)$$

2. Для решения вариационной задачи определения оптимальной формы зазора подпятника  $h(x)$  составляется вспомогательный функционал Лагранжа

$$J = 0,5C_N + \int_{r_0}^1 \lambda(r)Lrdr \quad (2.1)$$

в котором  $L$  соответствует (1.9), а  $\lambda$  – переменный множитель Лагранжа.

При допустимом варьировании  $J$  и функционала  $C_N$  их вариации  $\Delta J$  и  $\Delta C_N$  совпадают при любых ограниченных  $\lambda$ . Поэтому для оптимального зазора  $\Delta J = \Delta C_N$  при варьировании  $h$ , удовлетворяющем ограничениям (1.8). Следуя [12], из равенства (2.1) с учетом непрерывности  $p$  в сечении  $d$  возможного скачка  $h$ , фиксированного давления при  $r = 1$  и  $r_0$ , а также правил определения вариаций получается выражение для  $\Delta J$ , справедливое для любого (необязательно оптимального)  $h(r)$  и пока произвольного  $\lambda(r)$

$$\Delta J = \{[(r^2 \lambda h^3)_- - (r^2 \lambda h^3)_+] p^n\}_d \Delta p_d + A_d \Delta r_d + \Delta q \int_{r_0}^1 \lambda r dr + \int_{r_0}^1 (A_h \delta h + A_p \delta p) r dr \quad (2.2)$$

$$A_d = \{[(r^2 \lambda h^3 p')_+ - (r^2 \lambda h^3 p')_-] p^n\}_d \quad (2.3)$$

$$A_h = -3\lambda r q h^{-1}, \quad A_p = r - p^n [(r^2 \lambda h^3)' + 0,6nr^2 \lambda h^3 p^{n-1} \Omega^2 r] \quad (2.4)$$

Здесь  $\Delta p_d$  и  $\Delta r_d$  – разности  $p$  и  $r$  в сечениях скачка  $h$  для проварьированного и непроварьированного зазоров, а  $\delta p$ ,  $\delta h$  и  $\Delta q$  – соответствующие вариации функций и расхода.

При выборе  $\lambda$  обращением в нуль коэффициента  $A_p$  получается дифференциальное уравнение

$$(\lambda h^3 r^2)' + 0,6n\lambda h^3 r^3 \Omega^2 p^{n-1} - rp^{-n} = 0 \quad (2.5)$$

справедливое на любом участке непрерывности  $h$ . В сечении возможного скачка  $h$  условия, связывающие  $\lambda_{d-}$  и  $\lambda_{d+}$ , получаются при приравнении нулю множителя при  $\Delta p_d$

$$[(r^2 \lambda h^3)_- - (r^2 \lambda h^3)_+]_d = 0 \quad (2.6)$$

Для определения  $\lambda$  условий недостаточно и дополнительное условие получается, положив нулю коэффициент при  $\Delta q$

$$\int_{r_0}^1 \lambda r dr = 0 \quad (2.7)$$

С помощью уравнения (2.5) и условий (2.6), (2.7) формулируется сопряженная задача для множителя Лагранжа  $\lambda$ .

Пусть функция  $h(r)$  задана. Тогда интегрированием уравнения (1.9) для  $p$  при заданном  $p(r_0) = p_0$  и подбором параметра  $q$  удовлетворяется условие для давления из

(1.4)  $p(1) = 1$ , т.е. решается прямая задача. Затем решается сопряженная задача для  $\lambda$  с подбором константы  $\lambda_0 = \lambda(r_0)$  такой, чтобы выполнить интегральное условие (2.7).

Анализ соотношений (2.2) и (2.4) показывает, что оптимальный зазор состоит из двух участков. Это участки двух типов краевого экстремума: *I* и *II*, на которых  $h = 1$  и  $H$ .

В силу (1.8) на участке *I* допустимые  $\delta h \geq 0$ , а на *II* –  $\delta h \leq 0$ . Так как варьирование оптимального зазора должно вести только к уменьшению  $C_N$ , то  $\Delta J \leq 0$ . Поэтому условия оптимальности участков имеют вид неравенств на *I* и *II* соответственно

$$-3\lambda r q \leq 0 \quad (\lambda \geq 0), \quad -3\lambda r q H^{-1} \geq 0 \quad (\lambda \leq 0)$$

Эти участки стыкуются разрывным образом. Для оптимальной стыковки необходимо, чтобы в сечении скачка  $h$  обращался в нуль коэффициент при  $\Delta r_d$  из (2.2) и (2.3). Из этого условия, а также условия обращения в нуль коэффициента при  $\Delta p_d$ , т.е. из (2.6), следует, что разрывная стыковка возможна только тогда, когда в сечении разрыва  $h$  множитель  $\lambda = 0$

$$\lambda_{d^-} = \lambda_{d^+} = 0$$

Таким образом, для подпятника с карманом оптимальный зазор – ступенчатая функция с одной ступенькой. Карман и основная часть зазора имеют постоянные высоты.

3. Решение задачи состоит в численном определении  $p$ ,  $h$  и  $\lambda$  последовательным интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений по разным участкам с учетом непрерывности давления, а также установленного скачка  $h$  в точке соединения участков краевого экстремума. Как было выяснено выше, в сечении разрыва  $h$  параметр  $\lambda = 0$ , что принимается граничным условием для  $\lambda$ . Условие (2.7) служит для определения  $r_d$ .

Параметрами задачи являются  $H$ ,  $r_0$ ,  $p_0$  и  $\Omega$ . Так как в уравнения и условия вариационной задачи параметр  $\gamma$  не входит (см. разд. 2), ее решение от него не зависит. Зависят от  $\gamma$  радиальная скорость  $u$  и расход  $Q$ . Переход от случая газа к несжимаемой смазке осуществляется при  $n = 0$ . Размер кармана определяется  $H$  и  $r_d$ . При  $H = 1$  кармана нет. Параметр  $p_0$  соответствует давлению наддува, а  $\Omega$  – вращению пяты. При  $\Omega = 0$  пята неподвижна, что отвечает ситуации либо пуска, либо остановки. Этот случай допускает простое аналитическое решение для  $p$  и  $q$ , но не для  $\lambda$

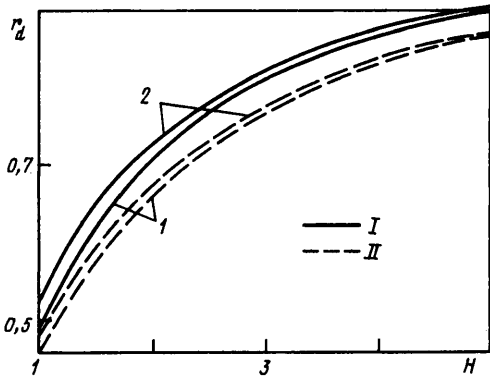
$$p^{n+1} = p_0^{n+1} - (n+1)qH^{-3} \text{Ln}(rr_0^{-1}), \quad r_0 \leq r \leq r_d$$

$$p^{n+1} = p_0^{n+1} - (n+1)q[\text{Ln}(rr_d^{-1}) + H^{-3} \text{Ln}(r_d r_0^{-1})], \quad r_d \leq r \leq 1$$

$$q = H^3(1 - p_0^{n+1})(n+1)^{-1}[\text{Ln } r_0 + (H^3 - 1)\text{Ln } r_d]^{-1}$$

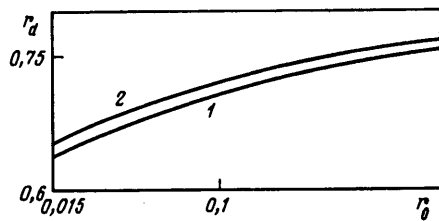
$$(r^2\lambda)' - rh^3 p^n = 0$$

Оценим реальный диапазон изменения параметров  $\gamma$  и  $\Omega$ . Согласно [2], в реальных устройствах используются, например, воздух, метан, гелий при температуре порядка 300 К и давлении окружающего пространства  $p_a \approx 0,98 \cdot 10^5$  Па. В соответствии с этим  $\mu = 1,75 \cdot 10^{-5}$  Па · с. При таком  $\mu$ ,  $h_m \approx 10\text{--}20$  мкм,  $R \approx 2\text{--}5$  см и числе оборотов вала в газовых подпятниках  $n_{\text{об}} \sim 10^4\text{--}10^5$  об/мин получаются  $\gamma = 10\text{--}10^3$  и  $\Omega = 0\text{--}2$ . Расчет проведен по давлению на периферии подпятника. Однако для справедливости применяемого приближения смазки необходимо выполнение минимальной оценки  $\gamma > 10$  всюду в рабочем зазоре. Наиболее напряженное в этом отношении место – центральная часть подпятника. При  $r < r_0$  приближение смазки не работает и здесь не рассматривается. При  $r = r_0$  параметр  $\gamma_0 = \gamma(p_0 H^2)^{-1}$ . Например, при  $p_0 = 10$  и  $H = 5$



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость радиуса  $r_d$  оптимального кармана от его высоты  $H$  при разных  $p_0$  и  $\Omega$ : кривые 1, 2 –  $p_0 = 2, 10$ , кривые, I, II –  $\Omega = 0, 2$



Фиг. 3

Фиг. 3. Влияние параметра  $r_0$  на оптимальный радиус  $r_d$  при  $H = 2$ ,  $\Omega = 0$  и  $p_0 = 2, 4$  (кривые 1, 2)

условие  $\gamma_0 > 10$  выполняется лишь при  $\gamma > 2500$ , что не соответствует полученной выше оценке для  $\gamma$ . Для соответствия ей должно быть, например,  $p_0 = 10$  и  $H = 3$  при  $p_0 = 4$  и  $H = 5$  и т.д. Из изложенного выше следуют ограничения на задаваемые параметры задачи  $p_0$  и  $H$ .

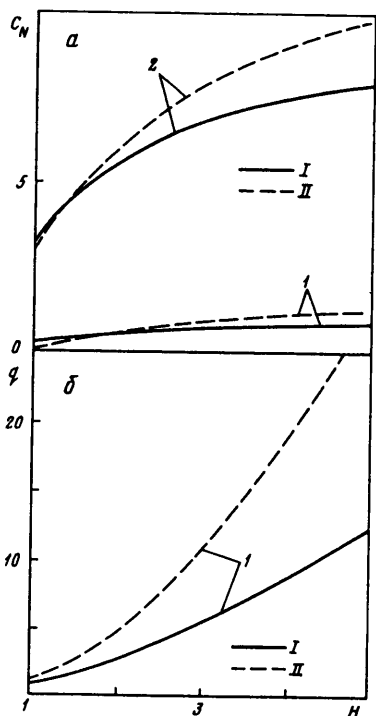
Другой особенностью задачи является характер течения газа в зазоре. Это, во-первых, возникновение зоны циркуляционного потока перед уступом при  $\Omega > 0$  и достаточно больших  $H$ . Размер ее не должен быть слишком велик. Она простирается от точки ( $r = r_-, y = H$ ) для сечения скачка  $h - r = r_d$ . Координата  $r_-$  определяется из условия  $u''_{yy}(r_-, H) = 0$ . Продольный и поперечный размеры зоны возрастают с увеличением  $H$ . Область обратного потока возникает при локальном положительном градиенте давления, что реализуется только при достаточно большом  $\Omega > 0$ .

Во-вторых, используемое приближение смазки не допускает существования областей сверхзвукового течения газа. Если при  $r \leq r_0$  это условие можно обеспечить условием подачи газа наддува, т.е. параметром  $p_0$ , то за скачком  $h$  решающими становятся параметры  $\Omega$  и  $H$ . С их ростом увеличение скорости за скачком  $h$  становится значительным. Максимальное значение скорости реализуется либо на входе, либо на выходе из зазора. Аналогичное справедливо и для числа  $M = u/a$ , так как изотермическая скорость звука  $a$  – постоянна.

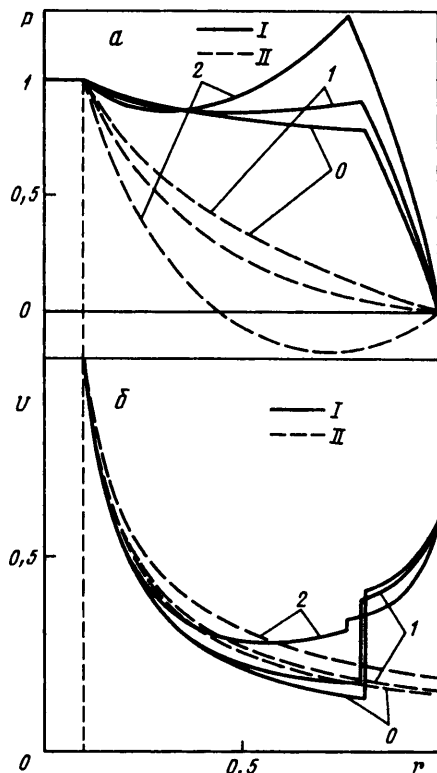
Указанные особенности исследуются с помощью (1.5) и (1.9). Например, для координаты отрыва на стенке  $y = H$  перед разрывом получается

$$r_-^2 = q(0,3H^3\Omega^2 p^{2n})^{-1}, \quad r_- < r_d$$

Отсюда следует, что отрыв возникает при достаточно больших  $\Omega$  и  $H$ . При  $\Omega = 0$  отрыва в приближении смазки нет. В центральной зоне кармана скорость газа убывает по всему сечению из-за расширения области течения и возрастает на его периферии при больших  $\Omega$ . На разрыве  $h$  происходит скачкообразный рост скорости. За этим скачком скорость может увеличиваться из-за большого по абсолютной величине отрицательного градиента давления. Для несжимаемой смазки ( $n = 0$ ) скорость всегда уменьшается во всем зазоре при любых  $\Omega$ . При  $n \neq 0$  скорость может как убывать, так и возрастать в зависимости от значений параметров. Из условия сохранения расхода газа в зазоре подпятника получается соотношение для скоростей



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Коэффициенты несущей способности оптимальных подпятников (а) и расхода газа в них (б) в зависимости от  $H$  при  $\Omega = 0$  и 2 (кривые I и II) и  $p_0 = 2, 10$  (кривые 1, 2)

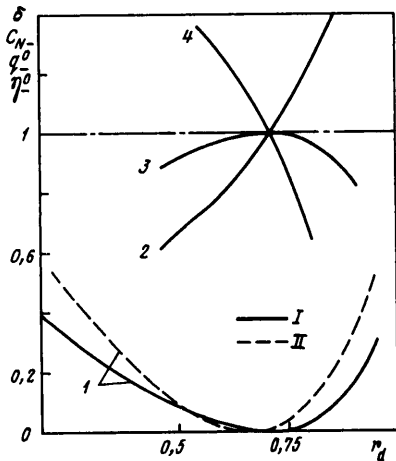
Фиг. 5. Распределения приведенного давления (а) и относительной максимальной скорости газа (б) в зазоре подпятника при  $\Omega = 0, 1, 2$  (кривые 0, 1, 2),  $H = 3, p_0 = 2$  (кривые I) и  $H = 1, p_0 = 1,5$  (II)

газа (или числа  $M$ ) в середине зазора на входе ( $M_0$ ) и выходе ( $M_1$ ) из него —  $M_1 = M_0 H r_0 p_0$ . Поэтому  $M_1$  может быть больше  $M_0$ .

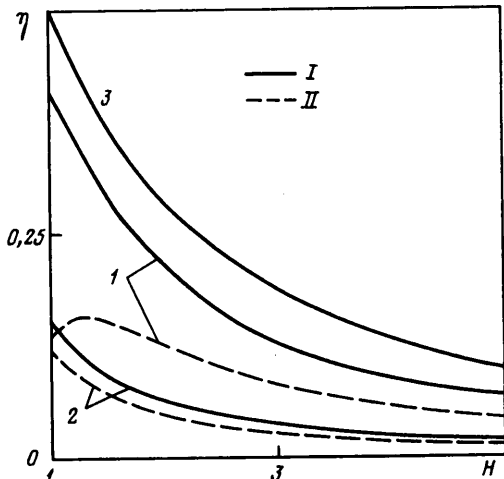
4. Представленные ниже результаты численных решений относятся к наиболее реальному изотермическому газу ( $n = 1$ ). Переход в решениях от газа к несжимаемой смазке осуществляется при  $n \rightarrow 0$ . Расчеты соответствуют  $\gamma = 10-10^3$ . Рассматриваются подпятники при фиксированном  $r_0 = 0,1$  и различных значениях параметров  $H, p_0$  и  $\Omega$ . Оптимальный размер кармана  $r_d$  (фиг. 2) с ростом  $H$  и  $p_0$  увеличивается, а с возрастанием  $\Omega$  убывает. Наименьшее влияние имеет  $p_0$ . Так, при  $H = 1,5$  и  $\Omega = 0$  при росте  $p_0$  от 2 до 10, т.е. в 5 раз,  $r_d$  увеличивается лишь на 5%. Для больших  $H$  и  $\Omega$  это влияние еще меньше.

На фиг. 3 показано влияние геометрического параметра  $r_0$ , т.е. условий подачи газа наддува, на оптимальный размер  $r_d$  при фиксированных  $H, \Omega$  и разных  $p_0$ . С увеличением  $r_0$  растет и  $r_d$ . Соответственно возрастают несущая способность подпятника и расход газа. Таким образом, выбор параметра  $r_0$  является существенным при расчете характеристик подпятника.

Зависимости коэффициента несущей способности оптимального подпятника  $C_N$  и параметра расхода газа  $q$  от  $H$  при разных  $\Omega$  и  $p_0$  показаны на фиг. 4. С ростом  $H$  и  $p_0$  подъемная сила, действующая на пятку, увеличивается. Влияние же вращения (центро-



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Отклонение  $C_{N-}$  неоптимальных подпятников от  $C_N$  оптимальных (кривые 1) для  $p_0 = H = 2$  при  $\Omega = 0$  (кривые I) и 2 (II), изменения относительных расхода  $q^{\circ}$ , несущей способности  $C_{N-}^{\circ}$  и качества  $\eta^{\circ}$  неоптимальных подпятников (кривые 2, 3 и 4) в зависимости от  $r_d$

Фиг. 7. Зависимости качества  $\eta$  оптимального подпятника от высоты  $H$  для газа при  $p_0 = 2$  и 10 (кривые 1 и 2),  $\Omega = 0, 2$  (кривые I, II) и несжимаемой смазки при  $\Omega = 0$  (кривая 3)

бежного эффекта) зависит от величины уступа. Если при малых  $H < 2$  рост  $\Omega$  приводит к уменьшению несущей способности, то при больших  $H$  — к ее увеличению. Расход всегда возрастает при том же изменении параметров. Отметим интересный случай отрицательный  $C_N$ , проявляющийся при больших  $\Omega$  и соответствующих малых  $p_0$  и  $H$ . Например, для  $\Omega = 2$  это возникает при  $H = 1$  и  $p_0 \leq 1,55$ .

Объяснение этому следует из фиг. 5, где показано изменение вдоль зазора приведенного давления  $P(r) = (p - 1)(p_0 - 1)^{-1}(a)$  и относительной скорости  $U = u/u_0$  (б), соответствующей максимальным значениям ее профиля, при разных  $H$ ,  $\Omega$  и  $p_0$ . Кривые II отвечают  $H = 1$ . В этом случае с ростом  $\Omega$  давление в зазоре падает. При  $\Omega = 2$  имеется достаточно протяженная зона с  $p < 1$ , что приводит к отрицательному  $C_N$ . В этом случае на выходе из зазора реализуется положительный градиент давления, поэтому там может возникнуть замкнутая область обратного потока газа в отличие от случая со ступенькой. При наличии ступеньки (кривые I) распределение давления качественно отличается. С ростом  $\Omega$  давление в зазоре увеличивается, причем в большей степени вблизи ступеньки, и  $C_N$  растет. Положительный градиент давления теперь реализуется перед ступенькой, где может появиться циркуляционное течение. Отметим, что с убыванием  $p_0$  и ростом  $H$  и  $\Omega$  размер этих зон увеличивается. Данные по  $U$ , а значит, и числу  $M$  служат определению нижней границы диапазона параметра  $\gamma$ , так как всегда должно быть  $M_1, M_0 < 1$  (сверхзвуковые режимы течения применяемой моделью не предусмотрены). Рост скорости может быть как до, так и после ступеньки.

Оптимальные и неоптимальные подпятники при одинаковых значениях определяющих параметров различаются радиальным размером кармана  $r_d$ . На фиг. 6 для фиксированных  $p_0$  и  $H$  и разных  $\Omega$  показано отклонение коэффициента  $C_{N-}$  — неоптимального подпятника от  $C_N$  оптимального —  $\delta = 1 - C_{N-}^{\circ}$ , где  $C_{N-}^{\circ} = C_{N-}/C_N$ . Координата  $r_d$  при  $\delta = 0$  соответствует оптимальным подпятникам. Видно, что они



обеспечивают значительный выигрыш в несущей способности и что с ростом  $\Omega$  эффективность оптимизации зазора увеличивается.

Здесь же представлено сравнение относительных величин несущей способности  $C_{N-}^{\circ}$  и расхода газа  $\dot{q}_{-} = q_{-} / q$  в неоптимальных подпятниках при  $p_0 = H = 2$  и  $\Omega = 0$ . В отличие от  $C_{N-}$  расход – монотонно возрастающая функция от  $r_d$ . Рост  $C_{N-}$  может сопровождаться нежелательным увеличением  $q_{-}$ , который также является важным практическим параметром. Отношение  $\eta_{-} = C_{N-} / q_{-}$  (качество подпятника) показывает долю несущей способности, приходящей на единицу расхода рабочей среды. Для практики желательное увеличение  $\eta_{-}$ . На фиг. 6 приведенная характеристика  $\eta^{\circ} = \eta_{-} / \eta$  соответствует кривой 4 при тех же параметрах. Видно, что оптимальный подпятник не является в этом смысле наилучшим. Лучшие подпятники имеют  $r_{d-} < r_d$ .

На фиг. 7 сравниваются оптимальные подпятники между собой по параметру  $\eta$ , где представлены зависимости  $\eta(H)$  для газа при разных  $p_0$  и  $\Omega$  и жидкости при  $\Omega = 0$ . Для несжимаемой смазки  $\eta$  не зависит от  $p_0$ . Для газа с ростом всех указанных параметров качество оптимальных подпятников уменьшается. Отметим лучшее качество жидкостных подпятников по сравнению с газовыми при одинаковых параметрах, хотя их несущая способность при этом меньше.

При сравнении характеристик оптимальных газовых и жидкостных подпятников следует, что радиус кармана  $r_d$  последних зависит только от его глубины  $H$  и не зависит от  $\Omega$  и  $p_0$ , в отличие от газовых подпятников. Для обоих случаев с ростом  $H$  радиус  $r_d \rightarrow 1$ .

5. Во многих реальных подпятниках  $H \gg 1$ . В этом случае при достаточно больших  $r_d$  газ в кармане можно считать покоящимся и расчет вытекания газа в узкую щель  $r > r_d$  проводить в безвязкостном инерционном приближении с привлечением законов сохранения энтальпии и расхода для изоэнтропийного газа [3]. Течение газа в узкой щели вне кармана по-прежнему изотермическое и описывается уравнениями (1.1), (1.2) или (1.9). Давление в кармане  $0 < r < r_d$  постоянно и равно давлению торможения  $p_s$ . Расширение газа через щель  $r = r_d$  происходит изоэнтропически в узкой прилегающей зоне, протяженностью которой пренебрегается. Поэтому в сечении  $r = r_d$  имеется скачок давления от  $p_s$  до  $p_d$ .

Выражение для коэффициента расход  $q$  – дополнение к (1.7) – представляется зависимостью от отношения  $p_d^{\circ} = p_d / p_s$  и показателя изоэнтропы  $\kappa$  [3]

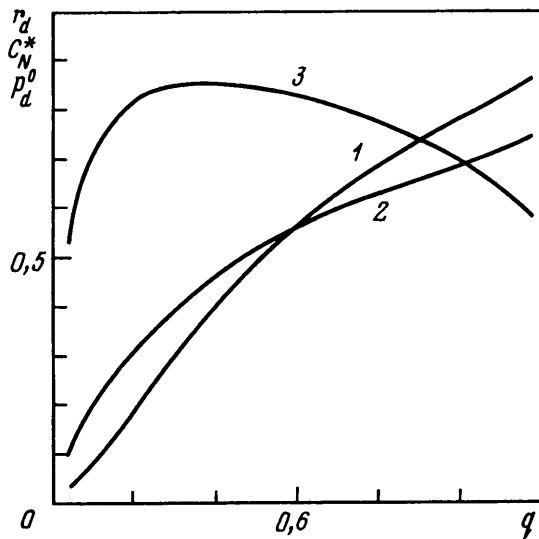
$$q = 2r_d h_+ \{2\kappa(\kappa - 1)^{-1} (p_d^{\circ})^{2/\kappa} [1 - (p_d^{\circ})^{(\kappa-1)/\kappa}]\}^{1/2}, \quad p_d^{\circ} \leq [2(\kappa + 1)^{-1}]^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (5.1)$$

$$q = 2r_d h_+ \{\kappa[(2\kappa + 1)^{-1}]^{(\kappa+1)/(\kappa-1)}\}^{1/2}, \quad p_d^{\circ} \geq [2(\kappa + 1)^{-1}]^{\kappa/(\kappa-1)}$$

Таким образом, решение прямой задачи такого подпятника отличается от решений той, что сформулирована в разд. 1, граничным условием в кармане, где фиксируется давление, соответствующее  $p_s$ . Как было указано, при отсутствии верхнего ограничения на  $h$  вариационная задача на безусловный максимум несущей способности  $C_N$  решения не имеет. Так как всякий рост  $C_N$  сопровождается увеличением  $q$ , что является нежелательным для практики, то формулируется следующая изопериметрическая вариационная задача. Определяется такая форма зазора подпятника, которая обеспечивала бы его наибольшую несущую способность при заданном  $q$  и с нижним ограничением на высоту зазора.

Для решения задачи составляется вспомогательный функционал Лагранжа

$$J = 0,5C_N + \alpha q + \int_{r_d}^1 \lambda(r) L r dr, \quad C_N = r_d^2 p_s + 2 \int_{r_d}^1 r p dr - 1$$



Фиг. 8. Зависимости от параметра  $q$  оптимальных значений размера кармана  $r_d$ , относительных несущей способности  $C_N^* = C_N / p_s$  и давления  $p_d^* = p_d / p_s$  (кривые 1, 2, 3) при  $H = \infty$ ,  $\Omega = 0$  и  $p_s = 10$

в котором  $L$  соответствует (1.9),  $\lambda$  – переменный, а  $\alpha$  – постоянный множители Лагранжа. Для определения оптимальной высоты зазора  $h(r)$  проварируем  $J$  аналогично разд. 2, но с учетом разрыва  $p$  при  $r = r_d$  и соотношения (5.1). В результате получается

$$\Delta J = A_{h+} \Delta h_+ + A_d \Delta r_d + A_q \Delta q + \int_{r_d}^1 (A_h \delta h + A_p \delta p) r dr \quad (5.2)$$

$$A_d = r_d [(p_s - p_d) + \lambda_+ (0, 3\Omega^2 r_d^2 h_+^3 p_d^{2n} - q + F)] \quad (5.3)$$

$$F = [1 - 0, 5(\chi + 1) p_d^{(\chi-1)/\chi}]^{-1} [1 - p_d^{(\chi-1)/\chi}] (\chi h_+^3 p_d^{n+1})$$

$$A_q = \int_{r_d}^1 \lambda r dr + \alpha - \lambda_+ r_d^2 F q^{-1} \quad (5.4)$$

$$A_{h+} = \lambda_+ r_d^2 F h^{-1}$$

Здесь обозначения те же, что в (2.2), а выражения для  $A_h$  и  $A_p$  соответствуют (2.4). Анализ соотношения (5.2) показывает, что оптимальный зазор имеет минимально возможную постоянную высоту  $h = 1$  при  $r \geq r_d$ , где выполняются условия оптимальности  $A_h \leq 0$  и  $A_{h+} \leq 0$ , что приводит к неравенству  $\lambda \geq 0$ . Дифференциальные уравнения для определения  $p$  и  $\lambda$  остаются прежними – (1.9) и (2.5), а условия для  $\lambda$  вытекают из (5.3) и (5.4) при  $A_d = 0$ ,  $A_q = 0$ .

На фиг. 8 показано влияние расхода  $q$  на параметры оптимальных подпятников с  $H = \infty$ . С ростом  $q$  увеличиваются радиус кармана  $r_d$  и несущая способность  $C_N$ . Отметим, что данные расчетов отвечают докритическому истечению газа в зазор, что ограничивает рост  $q$ .

**Заключение.** Для упорного газового подшипника (подпятника) с внешним наддувом решена вариационная задача теории смазки. В ней оптимальный рабочий зазор соответствует максимуму коэффициента несущей способности  $C_N$  при фиксированных значениях, скорости вращения  $\omega$  пяты и ее радиуса  $R$ , минимально и максимально

допустимых высот зазора  $h_m$  и  $h_0$ , давления  $p_0$  в центральной зоне подпятника. Показано, что оптимальная форма зазора – ступенчатая при постоянной его высоте до и после разрыва. При этом радиальный размер кармана (область подпятника до разрыва) увеличивается с ростом  $h_0$ ,  $\omega$  и уменьшением  $p_0$ . Наибольшее влияние оказывает параметр ограничения  $H$ . При отсутствии ограничения на  $h_0$  ( $H = \infty$ ) задача решается в измененной постановке с привлечением изопериметрического условия заданного расхода газа.

Представленные данные для изотермического газа и несжимаемой смазки служат определению  $C_N$  оптимальных подпятников и необходимых геометрических параметров зазора. Сравнение неоптимальных подпятников с оптимальными свидетельствует о заметном преимуществе последних, и оно увеличивается с ростом  $p_0$  и  $\omega$ . Результаты в случае несжимаемой смазки показывают отсутствие зависимости оптимального размера питающего кармана от  $\omega$  и  $p_0$ . Сопоставление характеристик жидкостных и газовых оптимальных подпятников выявило лучшее качество первых, но меньшую их несущую способность при одинаковых параметрах задачи.

Автор благодарит А.Н. Крайко и А.А. Осипова за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-01211 и 96-15-96158).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Константиnescу В.Н. Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
2. Лучин Г.А., Пешти Ю.В., Снопов А.И. Газовые опоры турбомашин. М.: Машиностроение, 1989. 238 с.
3. Пинегин С.В., Табачников Ю.Б., Сипенков И.Е. Статические и динамические характеристики газостатических опор. М.: Наука, 1982. 265 с.
4. Болдырев Ю.Я., Борисов Ю.В. Упорный секторный подшипник с газовой смазкой, имеющий максимальную несущую способность // Изв. АН СССР. МЖТ. 1990. № 6. С. 35–42.
5. Dowson D. Inertia effects in hydrostatic thrust bearings // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engin. 1961. V. 83. № 2. P. 227–234 ≡ Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Техн. механика. 1961. Т. 83. № 2. С. 110–118.
6. Rehsteiner F.H., Cannon R.H., Jr. Static properties of hydrostatic thrust gas bearings with curved surfaces // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 1. P. 46–55 ≡ Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 1. С. 46–53.
7. Заблоцкий Н.Д., Карнов В.С. Упорный газовый подшипник с наддувом // Изв. АН СССР. МЖТ. 1973. № 1. С. 25–31.
8. Gargiulo E.P., Jr., Gilmour P.W. A numerical solution for the design of externally pressurized porous gas bearings: Thrust bearings. // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1968. V. 90. № 4. P. 810–817 ≡ Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1968. Т. 90. № 4. С. 169–178.
9. Murti P.R.K. Analysis of externally pressurized gas porous bearings // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1974. V. 96. № 3. P. 354–360 ≡ Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1974. Т. 96. № 3. С. 54–62.
10. Gupta R.S., Kapur V.K. Centrifugal effects in hydrostatic porous thrust bearing // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1979. V. 101. № 3. P. 381–385 ≡ Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1979. Т. 101. № 3. С. 149–153.
11. Epstein A.H., Senturia S.D., Al-Midani O. et al. Micro-heat engines, gas turbines, and rocket engines. The MIT microengine project // AIAA 97-1773. 28<sup>th</sup> AIAA Fluid Dynamics Conference. 4<sup>th</sup> AIAA Shear Flow Control Conference. 1997.
12. Грабовский В.И., Крайко А.Н. Профилирование зазора радиального подшипника с минимальным моментом сопротивления // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 470–480