

УДК 532.516.013.4:532.68

© 2000 г. М.Г. ВЕЛАРДЕ, В.Я. ШКАДОВ, В.П. ШКАДОВА

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

Исследуется гидродинамическая неустойчивость течения пленки слабого раствора, содержащего растворимое летучее поверхностно-активное вещество (ПАВ). Учитываются диффузия ПАВ в жидком объеме, испарение в граничную газовую среду, а также процессы адсорбции и десорбции в приповерхностном слое. Выведена система эволюционных уравнений, исследовано стационарное течение пленки раствора по вертикальной поверхности и устойчивость этого течения при одновременном воздействии массовых, капиллярных сил и эффекта Марангони. Обнаружены гидродинамическая и диффузионные моды неустойчивости и исследованы их свойства при постоянной и переменной концентрации ПАВ в адсорбированном подслое.

1. Система эволюционных уравнений для стекающей пленки с ПАВ. Пусть слой вязкой жидкости стекает по вертикальной стенке под действием силы тяжести. Жидкость представляет собой слабый раствор, содержащий летучее поверхностно-активное вещество. Распределение ПАВ в слое управляется диффузией в жидком объеме, процессами адсорбции-десорбции между жидким объемом и адсорбированным приповерхностным слоем, испарением с поверхности в граничную газовую среду.

Введем систему координат x, y с началом на стенке и осью x по направлению силы тяжести. Состояние стекающего раствора в момент t в произвольной точке, занятой жидкостью, описывается следующими переменными величинами: давление – p , скорости – U, V , концентрация ПАВ в объеме – C и концентрация в адсорбированном слое – Γ . Состояние слоя в целом описывается локальной толщиной h . Будем рассматривать только плоские движения жидкости, тогда h, Γ зависят от x, t , а остальные переменные зависят от x, y, t . Введем характерные постоянные величины l, U_*, C_*, Γ_* и определим безразмерные переменные $x, y, h, t, p, U, V, C, \Gamma$ соотношениями

$$x, y, h, t, p \rightarrow \frac{1}{k} lx, ly, lh, \frac{1}{kU_*} t, \rho U_*^2 p$$

$$U, V, C, \Gamma \rightarrow U_* U, kU_* V, C_*(1+C), \Gamma_*(1+\Gamma) \quad (1.1)$$

В безразмерных переменных уравнения Навье – Стокса, неразрывности, диффузии, граничные условия на стенке и свободной поверхности имеют вид

$$U_t + UU_x + VU_y = -p_x + \frac{1}{k \text{Re}} (U_{yy} + k^2 U_{xx}) + \frac{1}{k \text{Fr}}$$

$$k^2 (V_t + UV_x + VV_y) = -p_y + k^2 \frac{1}{k \text{Re}} (V_{yy} + k^2 V_{xx}) \quad (1.2)$$

$$U_x + V_y = 0 \quad (1.3)$$

$$C_t + UC_x + VC_y = \frac{1}{k \text{Pe}} (C_{yy} + k^2 C_{xx}) \quad (1.4)$$

$$y = 0: U = 0, V = 0, C_y = 0 \quad (1.5)$$

$$y = h(x, t): h_t + Uh_x = V$$

$$p = -\frac{k^2}{We} \left(1 - \frac{MaWe}{Re} C \right) h_{xx} - \frac{2k^2}{k Re} (V_y - U_y h_x - k^2 V_x h_x)$$

$$U_y + k^2 (V_x + 4h_x V_y) = -k Ma (C_x + h_x C_y) \quad (1.6)$$

$$Bi(1+C) + kG(\Gamma_t + U\Gamma_x + U_x\Gamma + U_x) - k^2 Di \Gamma_{xx} + C_y = 0$$

$$\pi_1(1+C) - \pi_2(1+\Gamma) = -C_y$$

$$Re = \frac{U_* l}{\nu}, \quad Fr^{-1} = \frac{gl}{U_*^2}, \quad Pe = \frac{U_* l}{D}, \quad Ca = \frac{\mu U_*}{\sigma}$$

$$Bi = \frac{K_G l}{D}, \quad G = \frac{\Gamma_* U_*}{C_* D}, \quad Di = \frac{D_s \Gamma_*}{l D C_*}, \quad Ma = \frac{-C_*}{\mu U_*} \left(\frac{d\sigma}{dc} \right)_0 \quad (1.7)$$

$$\pi_1 = \frac{l K_a}{D}, \quad \pi_2 = \frac{l K_d \Gamma_*}{D C_*}, \quad We^{-1} = \frac{\sigma}{\rho l U_*^2}$$

Здесь ρ – плотность, $\mu = \nu\rho$, D – коэффициенты вязкости и диффузии раствора, g – ускорение силы тяжести, σ , D_s – коэффициенты поверхностного натяжения и диффузии, K_G , K_a , K_d – коэффициенты испарения, адсорбции и десорбции. Коэффициент растяжения k введен в (1.1) для выравнивания порядка производных гидродинамических функций по переменным x , y в (1.2)–(1.6). В случае волновых течений в пленке малые значения k соответствуют длинным волнам.

Постановка задачи (1.2)–(1.6) отличается от работы [1] переменной величиной концентрации в адсорбированном слое $\Gamma = \Gamma(x, t)$. Значение ее определяется на основании концепции об адсорбционном барьере [2, 3]. Кинетика адсорбции-десорбции на поверхности дается последним уравнением (1.6). Подобная модель применялась в [4] при исследовании устойчивости неподвижного слоя на горизонтальной поверхности.

Коэффициент поверхностного натяжения считается линейной функцией концентрации c на поверхности слоя

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{d\sigma}{dc} \right)_0 (c - c_0) \quad (1.8)$$

и в силу этого для рассматриваемых движений жидкости число Марангони $Ma = \text{const} > 0$. Существуют также растворы ПАВ, для которых $Ma < 0$.

Число Марангони является критическим параметром, который в данной задаче определяет взаимодействие гидродинамических и диффузионных процессов в слое. При $Ma = 0$ гидродинамические процессы не зависят от массопереноса ПАВ.

Другой подход к рассматриваемой задаче состоит в том, чтобы считать поверхностное натяжение линейной функцией концентрации Γ в адсорбированном слое и положить

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)_0 (\Gamma - \Gamma_0) \quad (1.9)$$

$$Ma = -\frac{\Gamma_*}{\mu U_*} \left(\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)$$

Краевую задачу (1.2)–(1.6) будем исследовать методом работ [5, 6]. Ранее с помощью этого метода в [7, 8] построена теория линейных и нелинейных волн в пленке

однородной жидкости с заданным постоянным или переменным трением на ее поверхности. Применение его к анализу эффекта Марангони, вызываемого теплопереносом в пленке, обсуждается в работе [9]. Выбираем U_* , k таким образом [5, 6], чтобы коэффициенты при вязких, гравитационных и капиллярных силах в первом уравнении (1.2) были одного порядка и нормированными по параметру δ

$$\frac{k^2}{We} = \frac{3}{k Re} = \frac{1}{k Fr} = \frac{1}{5\delta} \quad (1.10)$$

Из (1.7) и (1.10) выводим следующие соотношения:

$$l = \left(\frac{3v^2}{g}\right)^{1/3} Re^{1/3}, \quad U_* = \left(\frac{gv}{3}\right)^{1/3} Re^{2/3}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho}(v^4 g)^{1/3}$$

$$k = \gamma^{-1/3}(3Re)^{2/9} = (3Ca)^{1/3}, \quad \delta = \frac{1}{45}\gamma^{-1/3}(3Re)^{1/9} \quad (1.11)$$

Дальнейший анализ, как и в [5], основан на предположении $k^2 \ll 1$ (в [5] для коэффициента растяжения координаты x принято обозначение $k = n_*$). Согласно (1.11), это означает, что рассматриваются такие жидкости, для которых значение γ велико, или такие стекающие пленки, для которых капиллярное число Ca мало. Например, $\gamma \approx 2850$ для стекающей водяной пленки при нормальных условиях ($T = 20^\circ C$) и $Ca = 0,0024$ при $Re = 32$.

Отбросим в (1.2)–(1.6) члены $o(k^2)$, но сохраним члены с коэффициентами kRe , kFr , kMa , kG , kPe , а также k^2D_s , k^2We^{-1} , которые могут быть величинами $o(1)$ при подходящих значениях свободных параметров We , D_s . Задача (1.2)–(1.6) в этом случае существенно упрощается. По существу получается приближение гидродинамического пограничного слоя с самоиндуцированным давлением во всем слое $0 \leq y \leq h$

$$p = -\frac{k^2}{We} \left(1 - \frac{MaWe}{Re} c\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

и приближение тонкого диффузионного пограничного слоя вблизи свободной поверхности $y = h$. При этом будет $MaWe/Re \approx o(k^2)$.

Для решения получающейся системы применяется прямой метод Галеркина по переменной y , причем исследование ограничивается только первыми членами разложения по базису. Простейшее представление для функций $U(x, y, t)$, $C(x, y, t)$, удовлетворяющее всем граничным условиям (1.5), (1.6), имеет вид

$$U = u(2\eta - \eta^2) + Mh(\eta - \eta^2)c_x, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad M = kMa$$

$$C = c \left(1 - \frac{\zeta}{\Delta}\right)^2, \quad \zeta = \frac{h-y}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = (kPe)^{-1/2} \quad (1.13)$$

Здесь $u = u(x, t)$, $c = c(x, t)$ – скорость жидкости и концентрация ПАВ на поверхности пленки жидкости, $\varepsilon\Delta(x, t) = h_1$ – толщина диффузионного пограничного слоя.

Интегрируя каждое из уравнений (1.2)–(1.4) по y на отрезке $0 \leq y \leq h$, после некоторых преобразований получаем замкнутую систему из шести уравнений для функций h , u , c , Γ , Δ , φ , зависящих от x , t

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{5\delta} \left(h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h - \frac{2}{3h} (u + Mhc_x) \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(Au + BMhc_x)\varphi] = -s \quad (1.14)$$

$$kG \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u\Gamma) + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k^2 \text{Di} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + \text{Bi}(1+c) = \frac{s}{\varepsilon}$$

$$\pi_1(1+c) - \pi_2(1+\Gamma) = \frac{s}{\varepsilon}, \quad 3\varphi = c\Delta$$

$$q = \int_0^h U dy = \frac{2}{3} uh + \frac{1}{6} Mh^2 c_x$$

$$Q = \int_0^h U^2 dy = \frac{8}{15} u^2 h + \frac{7}{30} Mh^2 u c_x + \frac{1}{30} h (Mhc_x)^2 \quad (1.15)$$

$$\varphi = \int_0^h C dy = \int_0^{\Delta} C d\xi, \quad s = \frac{-2c}{\Delta}$$

$$A = 1 - \frac{1}{10} \left(\frac{h_1}{h} \right)^2, \quad B = \frac{1}{4} \frac{h_1}{h} - \frac{1}{10} \left(\frac{h_1}{h} \right)^2, \quad h_1 = \varepsilon \Delta$$

В (1.15) принимается $A = 1, B = 0,25(h_1/h)$ в силу того, что $h_1 \ll h$.

Система уравнений (1.14) представляет базовую модельную систему для изучения неустойчивости и нелинейности волн в стекающем слое жидкости при одновременном воздействии массовых и капиллярных сил и эффекта Марангони, вызываемого массопереносом ПАВ. При $Ma = 0$ первые два уравнения переходят в модельную систему работы [5]. Если $Ma \neq 0$, то уравнения массопереноса не отделяются и массоперенос влияет на гидродинамику течения.

При $Mhc_x = \tau(x, t)$ из (1.14) получаем уравнения работы [7] для течения в пленке с заданным трением τ на ее поверхности. Как показано в [8] на основе сравнения с решениями полной системы Навье – Стокса, решение (1.14) в этом случае с высокой точностью описывает неустойчивость стационарного течения в пленке при малых значениях δ .

2. Стационарные течения пленки с диффузионным пограничным слоем. При $\partial/\partial t \equiv 0$ система (1.14) допускает решение, соответствующее течению слоя постоянной толщины с постоянным расходом $h = 1, u = 3/2$. Введем растянутую переменную $x_1 = \varepsilon^2 x$, тогда с точностью до членов $o(\varepsilon^2)$ уравнения, описывающие массоперенос, приводятся к виду

$$\frac{d}{dx_1} \left(\frac{c^2}{1+c} \right) = \text{Bi}^2(1+c) \quad (2.1)$$

$$\pi_1(1+c) - \pi_2(1+\Gamma) = \text{Bi}(1+c) \quad (2.2)$$

$$s = \text{Bi}(1+c)\varepsilon$$

Рассмотрим решение уравнений (2.1), (2.2) с условиями в начальном сечении

$$x = 0: \quad c = 0, \quad \Gamma = 0 \quad (2.3)$$

Условия (2.3) означают, что концентрация ПАВ в пленке распределена равномерно, а формирующаяся свободная поверхность в начале содержит адсорбированный подслой в равновесии по c, Γ . Интегрируя (2.1), получаем соотношение для $c(x)$

$$\ln(1+c) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+c} \right)^2 = \frac{1}{2} + \text{Bi}^2 x_1 \quad (2.4)$$

Из (2.2) и (2.3) следуют два соотношения

$$\Gamma = c, \quad \pi_1 - \pi_2 = \text{Vi} \quad (2.5)$$

Выбор начальных условий (2.3) требует дополнительного рассмотрения. Если раствор поступает в стекающую пленку из трубки, то естественная постановка условий в начальном сечении пленки следующая:

$$x = 0: \quad c = 0, \quad 1 + \Gamma = 0 \quad (2.6)$$

Это означает, что вначале образуется свободная поверхность без адсорбированного подслоя, а концентрация ПАВ распределена равномерно по жидкому объему. Развитие адсорбированного подслоя и диффузионного пограничного слоя управляется уравнениями (1.14).

Из (1.14) и (2.6) при малых x находим решение

$$c = F\sqrt{x}, \quad 1 + \Gamma = Ex, \quad \varphi = x\Phi, \quad s = \varepsilon\Psi$$

$$F = -\pi_1\varepsilon, \quad \Psi = \pi_1, \quad 3kGE = 2(\pi_1 - \text{Vi}), \quad 3\Phi = -2\pi_1\varepsilon \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что развитие адсорбированного подслоя начинается, если $\pi_1 > \text{Vi}$. В противном случае адсорбированный подслоем не образуется, а диффузионный поток ПАВ к поверхности полностью расходуется на испарение в газовую среду. В случае $\pi_1 > \text{Vi}$ развитие адсорбированного подслоя можно описать уравнениями

$$\Psi = \text{Vi}(1+c) + ukG(1+\Gamma)_x \quad (2.8)$$

$$(\pi_1 - \text{Vi})(1+c) - \pi_2(1+\Gamma) = ukG(1+\Gamma)_x$$

Из (2.8) получаем решение для концентрации Γ при условии малости $c \approx o(\varepsilon)$

$$\pi_2(1+\Gamma) = (\pi_1 - \text{Vi}) \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi_2 x}{ukG}\right) \right] \quad (2.9)$$

При $x \rightarrow \infty$ имеем $\pi_2(1+\Gamma) \rightarrow \pi_1 - \text{Vi}$. Положим $\pi_1 - \text{Vi} = \pi_2$, что всегда можно сделать выбором Γ_* . Тогда начальный участок формирования адсорбированного подслоя заканчивается значением $\Gamma = 0$ при возрастании x . По формуле (2.9) можно оценить длину начального участка

$$L \approx \frac{ukG}{\pi_2} \rightarrow \frac{3}{2} T$$

Будем предполагать, что эта величина L невелика, тогда начальные условия (2.3) можно поставить при $x = 0$, как это сделано выше.

3. Неустойчивость стационарного течения в пленке с растворимым ПАВ. Основное состояние стекающей жидкой пленки, устойчивость которого исследуется, представляет стационарное течение при постоянной толщине пленки $h = 1$ и постоянной скорости на поверхности $u = 3/2$, сопровождаемое массообменом в тонком диффузионном пограничном слое вблизи поверхности. Толщина диффузионного слоя h_1 , объемная концентрация на поверхности c и концентрация в адсорбированном подслое Γ медленно изменяются вдоль поверхности пленки. С точностью до членов порядка $o(\varepsilon^2)$ основное состояние (2.4), (2.5) можно представить следующим образом:

$$u_0 = \frac{3}{2}, \quad h_0 = 1, \quad c_0 = c(\varepsilon^2 x), \quad \Gamma_0 = c(\varepsilon^2 x),$$

$$s_0 = \text{Vi}(1+c_0), \quad \varphi_0 = -\frac{2}{3} \frac{c_0^2}{s_0}, \quad \Delta_0 = -2 \frac{c_0}{s_0} \quad (3.1)$$

При исследовании устойчивости можно принять $x = \text{const}$ в (3.1).

Введем малые возмущения основного состояния текущей пленки $u = u_0 + u'$, $c = c_0 + c'$, $h = 1 + h'$, $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma'$, $s = s_0 + s'$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$.

Подставляя эти представления для искомых функций в систему (1.14) и проводя линеаризацию, выводим систему линейных уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial x} &= 0 \\ 5\delta \left(\frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{\partial Q'}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} + 2h' - \frac{2}{3}u' - \frac{2}{3}Mc'_x \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \varphi_0 \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{1}{2}M \frac{c_0 \varphi_0}{s_0} \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + s' &= 0 \\ kG \left(\frac{\partial \Gamma'}{\partial t} + (1 + \Gamma_0) \frac{\partial u'}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \Gamma'}{\partial x} \right) - k^2 \text{Di} \frac{\partial^2 \Gamma'}{\partial x^2} + \text{Bi} c' - \frac{1}{\varepsilon} s' &= 0 \\ \pi_1 c' - \pi_2 \Gamma' - \frac{1}{\varepsilon} s' &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение (3.2) разыскивается при "замороженных" значениях коэффициентов в форме нормальных мод

$$(u', h', c', \Gamma', \varphi') = (u_1, h_1, c_1, \Gamma_1, \varphi_1) \exp[i\alpha(x - \omega t)] \quad (3.3)$$

Для амплитуд $u_1, h_1, c_1, \Gamma_1, \varphi_1$ получаем систему дифференциальных уравнений, которую удобно представить в виде гидродинамической и диффузионной частей

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}u_1 + (1 - \omega)h_1 + \frac{1}{6}zu_1 &= 0 \\ \left(\frac{2}{3}\theta - \frac{2}{3}\omega\beta + \frac{8}{5}\beta \right) u_1 + \left[-2\theta + \beta\alpha^2\theta + \beta \left(\frac{6}{5} - \omega \right) \right] h_1 + \\ + z \left(\frac{2}{3}\theta - \frac{1}{6}\omega\beta + \frac{7}{20}\beta \right) c_1 &= 0 \\ \frac{\beta}{\gamma_2} \varphi_1 - \left(B_1 + M_1 \alpha^2 \frac{\varphi_0}{\gamma_2} \right) c_1 - B_1 G_1 \left(\beta \xi + \frac{d}{T} \right) \Gamma_1 = \\ = -\beta(1 - B_1 G_1) (1 + c_0) u_1 & \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\varphi_1}{\gamma_2} - \frac{2 + c_0}{c_0} c_1 + \frac{G_1}{B_1} \left(\beta \xi + \frac{d}{T} \right) \Gamma_1 = -\beta \frac{G_1}{B_1} (1 + \Gamma_0) u_1$$

$$c_1 - (1 + T\beta\xi + d)\Gamma_1 = T\beta(1 + c_0)u_1$$

$$\theta = \frac{1}{5\delta}, \quad \beta = i\alpha, \quad z = k \text{Ma} \beta, \quad T = \frac{U_*}{K_d l} k, \quad \varphi_0 = -\frac{2}{3} \frac{c_0^2}{\varepsilon \text{Bi} (1 + c_0)}$$

$$\gamma_1 = \frac{2 + c_0}{c_0} \gamma_2, \quad \gamma_2 = \frac{\varphi_0}{1 + c_0}, \quad M_1 = -\frac{1}{2} k \text{Ma} \frac{c_0}{\text{Bi} (1 + c_0)} \quad (3.6)$$

$$(B_1, G_1, D_1) = V(\text{Bi}, Gk, \text{Di} k^2), \quad V = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1 + c_0}{|c_0|} \varepsilon, \quad d = T \frac{D_1}{G_1} \alpha^2$$

Однородная система уравнений (3.4), (3.5) имеет ненулевое решение, если определить ее $\det = 0$. Это условие дает дисперсионное уравнение для собственных чисел $\omega = \omega(\alpha)$. Первых два уравнения (3.4), представляющих гидродинамическую часть задачи об устойчивости, при $z = 0$ не зависят от остальных уравнений и определяют гидродинамическую моду неустойчивости. Разрешая три последних уравнения (3.5), составляющих диффузионную часть задачи, найдем $c_1 = N_c u_1$. Подставляя это значение c_1 в (3.4), получим из первых двух уравнений дисперсионное уравнение для $\xi = 1,5 - \omega$ в виде

$$-\frac{2}{3}\beta\xi^2 + (\frac{2}{5}\beta - \frac{2}{3}\theta)\xi + \frac{1}{10}\beta - \theta + \frac{2}{3}\beta\alpha^2\theta + \\ + zN_c \left[-\frac{1}{6}\beta\xi^2 + (\frac{3}{20}\beta - \frac{2}{3}\theta)\xi + \frac{1}{6}\beta\alpha^2\theta \right] = 0 \quad (3.7)$$

Разрешая три последующих уравнения относительно c_1 , найдем выражение для N_c

$$N_c = \frac{\Phi_{30} + \xi\Phi_{31} + \xi^2\Phi_{32}}{\Psi_{30} + \xi\Psi_{31} + \xi^2\Psi_{32}} \quad (3.8)$$

$$\Phi_{30} = \beta(1 + c_0)[-B_1G_1 + 1 + d], \quad \Phi_{31} = \left(\frac{G_1}{B_1} - T \right) (1 + c_0)\alpha^2 \quad \Phi_{32} = 0,$$

$$\Psi_{30} = [B_1^2 + M_1(1 + c_0)\alpha^2](1 + d) - G_1B_1 \frac{d}{T}$$

$$\Psi_{31} = -\beta \left[\frac{2 + c_0}{c_0}(1 + d) - \frac{G_1}{B_1} \frac{d}{T} - (B_1^2 + M_1(1 + c_0)\alpha^2)T - G_1B_1 \right]$$

$$\Psi_{32} = -\alpha^2 \left[\frac{G_1}{B_1} - T \frac{2 + c_0}{c_0} \right]$$

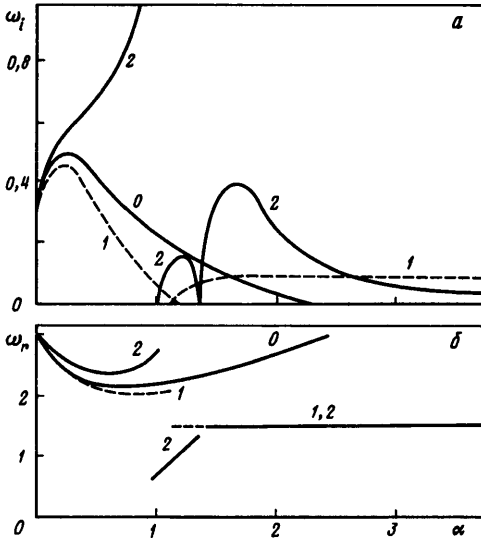
Параметр T в системе (3.5) характеризует отношение скорости переноса концентрации Γ конвективным потоком вдоль поверхности к скорости десорбции внутрь жидкого объема в общем случае неравновесной кинетики адсорбции-десорбции. При $T = 0$ из последнего уравнения (3.5) получается $\Gamma_1 = c_1$.

Это соотношение принимается в модели равновесной адсорбции-десорбции Гиббса и обычно используется при исследовании устойчивости состояний равновесия. В работе [1] принималось $\Gamma = \text{const}$, что соответствует случаю малых скоростей адсорбции-десорбции [3]. Чтобы получить эту модель из (3.5) при $T \rightarrow \infty$, надо дополнительно положить $1 + c_0 = 0$ в последнем уравнении (3.5).

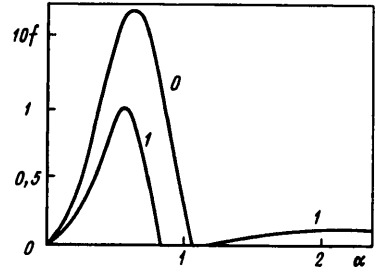
Применим выведенные уравнения, в частности дисперсионное уравнение (3.7), именно к этому случаю, когда по предположению $\Gamma = \Gamma_0 = \text{const}$ в стекающем слое. Дисперсионное уравнение в этом случае при различных $Ma \neq 0$ представляет алгебраическое уравнение третьей степени и определяет три собственных числа, из которых два соответствуют растущим возмущениям ($\omega_i > 0$) и одно – затухающим ($\omega_i < 0$). Из двух растущих мод одна легко отождествляется с поверхностной гидродинамической модой, сохраняющейся при $Ma = 0$; другая мода существует при $Ma \neq 0$ и отождествляется с диффузионной модой, найденной в [1] при решении полной дифференциальной задачи на собственные значения. Сравнение результатов расчетов методами данной статьи и работы [1] проведем на примере одного варианта для течения пленки охладителя. С учетом множителя перехода $n = 2/3$, связанного с различным выбором U_* , были взяты следующие значения исходных параметров подобия:

$$Re = 20n, \quad Pe = n \cdot 10^6, \quad G = 2n \cdot 10^3, \quad Vi = 10, \quad Ca = 0,2n, \quad c_0 = -0,25$$

По формулам (1.11) вычисляются величины $\gamma = 29,24$, $\delta = 0,655$, $k = 0,737$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Мнимые (а) и действительные (б) части собственных чисел для системы с постоянной концентрацией ПАВ в адсорбированном подслое. $Pe = 10^6$, $Re = 20$, $Bi = 10$; $Ma = 0$ (линия 0), $Ma = 1$, $c_0 = -0,25$, $G = 1000$ (линия 1), $Ma = -1$, $c_0 = -0,25$, $G = 2000$ (линия 2)

Фиг. 2. Коэффициенты усиления возмущений $\gamma = 2904$, $Re = 8$, $c_0 = -0,25$, $G = 2000$; $Ma = 0$; 1 (линии 0, 1)

Значение c_0 соответствует сечению на расстоянии $x = 900l$ от входа. Если принять $c_0 = -0,28$, то по формуле (2.4) для основного состояния получаем $x = 908l$, и $h_1 = 0,078$ вместо $h_1 = 0,1$. Приближенные значения c_0 и h_1 взяты с рис. 1 работы [1].

Для варианта $\alpha = 1,357$ получаем собственные числа растущих мод из [1] и из уравнения (3.7) соответственно

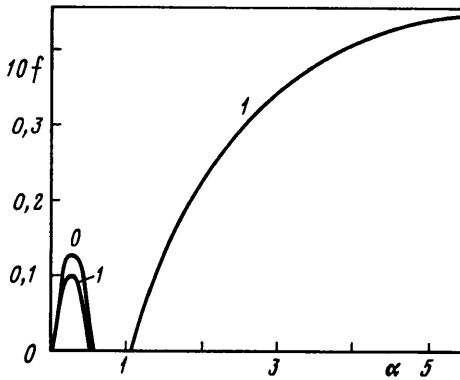
$$\omega_1 = 0,999 + 0,00045i, \quad \omega_2 = 1,313 - 0,106i;$$

$$\omega_1 = 1,000 + 0,00167i, \quad \omega_2 = 1,253 - 0,125i$$

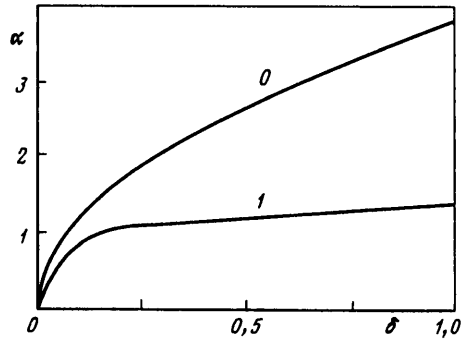
Можно отметить вполне удовлетворительное соответствие не только качественное, но и количественное. Значение $\gamma = 29,94$, взятое в [1], не благоприятно для применяемого в данной статье метода. Более точные результаты можно получить при больших значениях γ . Подробные расчеты собственных чисел и их анализ были сделаны для пленок воды при $\gamma = 2904$, некоторые результаты представлены ниже.

Будем различать случаи положительных ($Ma > 0$) и отрицательных ($Ma < 0$) систем. Первый из них относится к нормальным типичным растворам, второй – к особым растворам, которые встречаются реже. В [1] отмечается, что знак Ma может измениться при изменении физических параметров раствора, содержащего ПАВ. Развитие неустойчивости в системах с $Ma > 0$ и $Ma < 0$ существенно различается. На фиг. 1, а и б приведены мнимые части собственных чисел неустойчивых мод $\omega_i > 0$ и соответствующие им фазовые скорости ω_r (α) для системы с параметрами $\delta = 0,414$, $k = 0,194$, $\gamma = 2904$.

При $Ma = 0$ имеется одна гидродинамическая длинноволновая мода, неустойчивая на отрезке $0 < \alpha < 2,5$. Мнимая часть собственного числа ω_i имеет четко выраженный максимум, как и коэффициент усиления $f = \alpha\omega_i$. Фазовая скорость изменяется в пределах $2,1 < \omega_r < 3$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Коэффициенты усиления возмущений $\gamma = 2904$, $Re = 2$, $c_0 = -0,25$, $G = 2000$; $Ma = 0$; 1 (линии 0, 1)

Фиг. 4. Кривые нейтральной устойчивости для $\gamma = 2904$, $c_0 = -0,25$, $G = 2000$; $Ma = 0$; 1 (линии 0, 1)

При $Ma = 1$ наряду с гидродинамической модой имеется коротковолновая диффузионная мода, неустойчивая при $\alpha > 1,1$. Фазовая скорость волн этой моды неустойчивости $\omega_r = 1,5$. Это означает, что волны переносятся вместе с жидкостью на поверхности пленки. Мнимая часть собственного числа на два порядка меньше, чем у гидродинамической моды (на фиг. 1 нанесены значения $40\omega_i$).

Эта структура спектра сохраняется для положительных систем при любых значениях $Ma > 0$. С увеличением Ma коэффициент усиления наиболее растущей гидродинамической волны уменьшается, и при малых значениях δ и достаточно больших значениях Ma диффузионная мода становится более опасной (фиг. 2, 3). Существенно сокращается область неустойчивости, граница которой перемещается в сторону длинных волн (фиг. 4). Эти результаты согласуются с выводами других авторов, например [9], об успокаивающем действии ПАВ на гидродинамические волны.

При $Ma = -1$ имеется три моды неустойчивости, они легко различаются по значениям фазовой скорости (фиг. 1,б). Коротковолновая диффузионная мода слабо изменяется по сравнению со случаем $Ma = 1$ и для нее $\omega_r = 1,5$, значения ω_i имеют один порядок. Вторая слабая диффузионная мода существует на конечном интервале волновых чисел, фазовая скорость линейно изменяется относительно значения $\omega_r = 1$ в окрестности $\alpha = 1$. Третья мода начинается при $\alpha = 0$ как обычная гидродинамическая мода с фазовой скоростью $\omega_r = 3$, но с ростом α переходит в моду взрывного роста, для которой $\omega_i \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 1,2$. Покажем, что наличие моды взрывного роста является общим свойством неустойчивости пленочных течений при $Ma < 0$, для модели $\Gamma = \text{const}$.

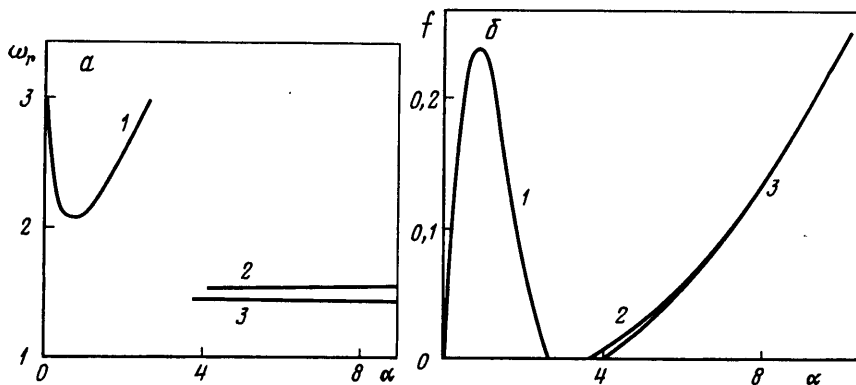
Приравняв нулю коэффициент при ξ^3 в дисперсионном уравнении (3.7), находим при $Ma < 0$

$$\alpha_i^2 = 4 \frac{2 + c_0}{c_0} \frac{Bi}{k^2 G Ma} \quad (3.9)$$

Для варианта (2) на фиг. 1 находим из (3.9) критическое значение $\alpha_i = 1,5$.

Введем малый параметр ϵ_1 соотношениями $\epsilon_1 \omega = \Omega$, $|\Omega| \approx 1$, $|\omega| \gg 1$. Тогда из системы уравнений для амплитуд возмущений (3.4), (3.5) находим

$$h_1 \approx o(\epsilon_1), \quad u_1 = 1/4 k \alpha Ma c_i \quad (3.10)$$



Фиг. 5. Фазовые скорости (а) и коэффициенты усиления (б) возмущений для системы с адсорбцией-десорбцией ПАВ; $\gamma = 2904$, $Pe = 10^7$, $Re = 32$, $Bi = 10$, $G = 2000$, $c_0 = -0,25$, $D = 0,01$, $T = 1$, $Ma = 1$ (номера кривых соответствуют номерам собственных чисел)

Отсюда следует, что для моды взрывного роста волны продольные в отличие от поперечных волн гидродинамической моды. Физическое объяснение этой моды следует из последнего уравнения (3.10). Волна возмущения $u' = u'(x - \omega, t)$ отстает на фазе от волны концентрации $c' = c'(x - \omega, t)$ на $\pi/2$. В результате концентрация ПАВ выносится из точек минимума c' и приносится в точки максимума c' возмущениями продольной скорости u' . Возникает своеобразное явление, похожее на резонанс.

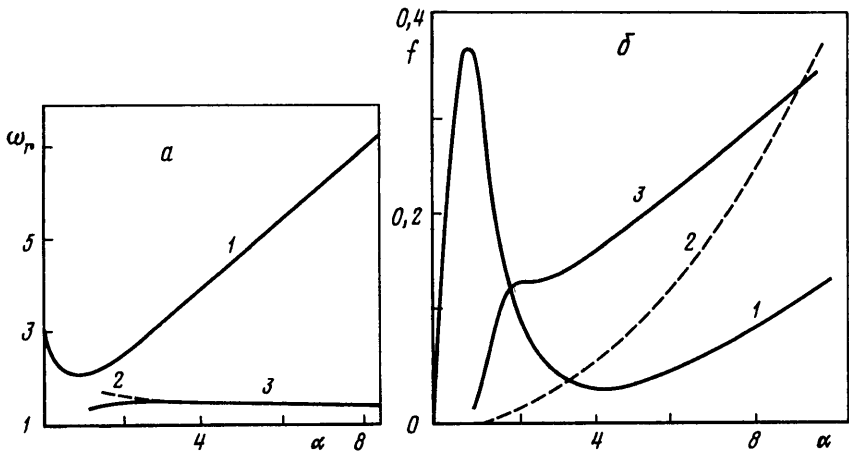
При малых величинах $|Ma|$ критическое значение α_l моды взрывного роста (3.9) расположено вне области неустойчивости гидродинамической моды $\alpha_k = \sqrt{15\delta} < \alpha_l$. С ростом $|Ma|$ критическое значение α_l приближается к этой области. На отрезке $0 < \alpha < \alpha_l$ вследствие параметрического взаимодействия гидродинамической и особой диффузионной моды образуется комбинированная мода. Именно такой случай ($\alpha_l < \alpha_k$) показан на фиг. 1 линией 2. В [11] указано формирование комбинированной моды неустойчивости горизонтального слоя полубесконечной толщины при наличии нерастворимого ПАВ на поверхности.

Если для положительных систем воздействие ПАВ согласуется с представлениями о гашении поверхностных волн, то для отрицательных систем наличие моды взрывного роста более напоминает представления о бурной неустойчивости и поверхностной турбулентности.

В общем случае стекающей пленки слабого раствора летучего ПАВ, когда массоперенос ПАВ управляется процессами диффузии, испарения и адсорбции-десорбции в приповерхностном слое, а поверхностное натяжение – одним из соотношений (1.8) или (1.9), развитие неустойчивости зависит от девяти безразмерных внешних параметров. Как это следует из (1.11), (3.5)–(3.8), в качестве таких независимых параметров можно принять γ , δ , c_0 , Pe , G , Bi , T , Di , Ma . Если параметры заданы, задача сводится к численному решению дисперсионного уравнения (3.7) при различных значениях волнового числа α и анализу спектров $\omega = \omega(\alpha)$.

При конечной скорости адсорбции-десорбции ($T \neq 0$) дисперсионное уравнение (3.7) определяет четыре собственных числа. Количество возможных частных решений с возрастающей амплитудой и их свойства существенно зависят от значений Ma , T , но сохраняется четкое разделение решений на гидродинамическую и диффузионные моды неустойчивости.

Переход к общей модели $\Gamma = \Gamma(x, t)$, $T \neq 0$ приводит к регуляризации решений в том смысле, что особая мода взрывного роста отсутствует. Пример расчета собственных чисел при $Ma = 1$, $T = 1$ дается на фиг. 5. Наряду с гидродинамической модой здесь



Фиг. 6. Фазовые скорости (а) и коэффициенты усиления (б) возмущений для системы с адсорбцией-десорбцией ПАВ; $Ma = 10$, $T = 5$, остальные параметры, как на фиг. 5 (номера кривых соответствуют номерам собственных чисел)

имеются две диффузионные моды неустойчивости, для которых значения $\omega_r(\alpha)$ и $\omega_i(\alpha)$ мало различаются. Фазовая скорость этих волн практически совпадает со скоростью жидкости на свободной поверхности, а коэффициент усиления возрастает при увеличении α . При изменении параметров Ma , T и достаточно больших значениях α получаются также растущие решения в форме волн, перемещающихся относительно жидкости.

На фиг. 6 при $Ma = 10$, $T = 5$ ветвь решений 1 представляет комбинированную моду неустойчивости: при малых α имеются медленные гидродинамические волны с фазовой скоростью $3 \geq \omega_r > 2$; с возрастанием α они переходят в быстрые волны, для которых $\omega_r > 3$. Две другие ветви решений 2, 3 определяют чисто диффузионные моды неустойчивости с фазовыми скоростями $\omega_r \approx 1,5$. Коэффициент усиления диффузионной моды 2 существенно превосходит коэффициенты усиления мод 1 и 3 (на фиг. 6 $f = \alpha\omega_i$ для решений 1, 3, $f = 0,025 \alpha\omega_i$ для моды 2).

Заключение. Эффект Марангони, вызываемый массопереносом ПАВ, играет существенную роль в возникновении и развитии неустойчивости стекающей пленки слабого раствора. Как показывают проведенные расчеты, полученная модельная система эволюционных уравнений (1.14) качественно правильно отражает свойства неустойчивости стекающей пленки с ПАВ и ее решения согласуются с отдельными результатами, полученными другим методом. В отличие от громоздкого подхода, основанного на прямом решении системы уравнений Навье – Стокса, система уравнений (1.14) открывает большие возможности для изучения этой многопараметрической задачи, расчета многих вариантов и обобщающих выводов с учетом кинетики процессов адсорбции-десорбции.

Обнаружены новые диффузионные моды неустойчивости, развитие которых полностью определяется эффектом Марангони. В зависимости от значений фазовой скорости они объединяются в две группы. Возмущения, перемещающиеся со скоростью жидкости на поверхности пленки, образуют структуры, неподвижные относительно этой жидкости. Остальные возмущения представляют собой бегущие волны. Наибольшие значения фазовой скорости и коэффициента усиления имеют продольные волны в отличие от поперечных волн обычной гидродинамической моды. Под влиянием эффекта Марангони гидродинамическая мода ослабляется, однако имеет место также образование комбинированных мод быстрого роста, вызываемых одновременным действием гидродинамических сил и массопереноса ПАВ.

Количество и тип мод неустойчивости в стекающей пленке при заданной толщине существенно зависят от принимаемой модели переноса поверхностно-активного вещества. Для систем, описываемых моделью нерастворимого ПАВ, существуют решения типа волн взрывного роста. В системах, в которых учитывается полная модель процессов адсорбции-десорбции, неустойчивость описывается только решениями с конечными коэффициентами усиления.

Интервал волновых чисел, на котором существуют новые диффузионные моды неустойчивости, ограничен снизу и не ограничен сверху, следовательно, эти возмущения преимущественно коротковолновые. В то же время формирование регулярных нелинейных волновых структур в стекающей пленке чистой жидкости связано с тем, что неустойчивы лишь возмущения из ограниченного интервала $0 < \alpha < \alpha_k$.

Хотя в задаче имеется второй малый линейный масштаб (толщина диффузионного пограничного слоя), соответствующий коротким волнам, наличие их не в полной мере согласуется с предположениями о длинноволновых возмущениях, принятыми при выводе основной системы модельных уравнений (1.14). Поэтому требуется исследование спектров неустойчивости стекающей пленки с ПАВ сопоставить также с решениями полных линеаризованных уравнений Навье – Стокса.

Полученные здесь результаты можно распространить на течения пленок с теплообменом. Соответствующие обобщения эволюционных уравнений пленочных течений работы [5] были проведены в [9] для случаев слабо нелинейных волн.

Авторы приносят благодарность Ю.С. Рязанцеву, В.А. Старову, Д. Кере, А. де Рикку, Г.М. Сисоеву за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00153) и Министерства высшего образования Испании (программа DGICYT (SPAIN), код проекта PB 96-599).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ji W., Satterwall F.* On the instabilities of vertical falling liquid films in the presence of surface – active solute // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 278. P. 297–323.
2. *Hennenberg M., Chu X.-L., Velarde M.G., Sanfeld A.* Transverse and longitudinal waves at the air liquid interface in the presence of an adsorption barrier // *J. Colloid Interf. Sci.* 1992. V. 150. P. 7–21.
3. *Palmer H.J., Berg J.C.* Hydrodynamic stability of surfactant solutions heated from below // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 51. Pt. 2. P. 385–402.
4. *Рябицкий Е.А.* Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии растворимого поверхностно-активного вещества (ПАВ) // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1996. № 1. С. 3–8.
5. *Шкадов В.Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1967. № 1. С. 43–51.
6. *Шкадов В.Я.* Уединенные волны в слое вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1977. № 1. С. 63–66.
7. *Набиль Есмаиль М., Шкадов В.Я.* К нелинейной теории волн в слое вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1971. № 4. С. 54–59.
8. *Демёхин Е.А., Токарев Г.Ю., Шкадов В.Я.* Неустойчивость и нелинейные волны в вертикальной пленке жидкости, текущей в противотоке с турбулентным газовым потоком // *Теорет. основы хим. технологии.* 1989. Т. 23. № 1. С. 64–70.
9. *Зейтуниан Р.Х.* Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара – Марангони // *Успехи физ. наук.* 1998. Т. 168. № 3. С. 259–286.
10. *Lin S.P.* Stabilizing effects of surface – active agents on a film flow // *AIChE Journal.* 1970. V. 16. № 3. P. 375–379.
11. *Earnshaw J.C., Mclaughlin A.C.* Waves at liquid surfaces: coupled oscillations and mode mixing // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1991. V. 433. № 1889. P. 663–678.