МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2000

УДК 532.5:517.928.7

© 2000 г. А.Г. ПЕТРОВ

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ В ОБЛАСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

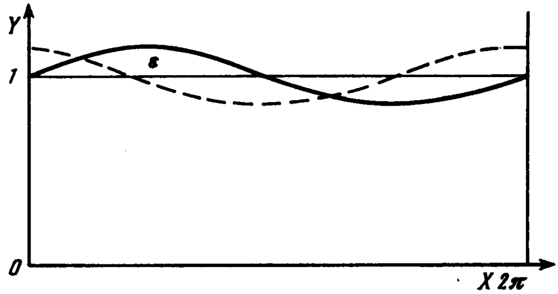
Исследуется движение частиц жидкости несжимаемой среды в полости, ограниченной плоским дном, вертикальными боковыми стенками и верхней границей, деформирующейся по произвольному периодическому закону. Задача сведена к решению уравнений Гамильтона с периодическим во времени гамильтонианом. Для исследования системы применяются метод усреднения гамильтоновых систем и теория КАМ (Колмогоров, Арнольд, Мозер). Предложена новая модификация процедуры усреднения с помощью точечных отображений Пуанкаре. С точностью до экспоненциально малой амплитуды деформации границы области точки последования Пуанкаре лежат на замкнутых интегральных кривых усредненной автономной гамильтоновой системы. Для усредненного гамильтониана выписывается асимптотическое разложение по амплитуде.

Метод применяется к решению следующих задач. Задача Стокса о переносе массы прогрессивной волной на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины. Задачи о движении частиц вязкой и вязкопластичной сред в тонком слое с деформируемой границей. Для конечной амплитуды численно установлено качественное согласие с результатами асимптотической теории. Обсуждаются причины возникновения стохастического режима.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение несжимаемой среды в расположенной на плоскости области, ограниченной двумя вертикальными прямыми $0 \leqslant x \leqslant L$, снизу горизонтальной прямой и сверху криволинейной границей, изменяющейся со временем по некоторому периодическому закону $0 \leqslant y \leqslant b\ (1 + \varepsilon h)$. В безразмерных координатах $X = kx$, $Y = y/b$, $t = \omega T$, где $k = 2\pi/L$ – волновой вектор, ω – частота колебаний границы, такую область Ω_t можно представить в виде: $0 \leqslant X \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant Y \leqslant 1 + \varepsilon h\ (t, X)$ (фиг. 1), где $h(t, X)$ – ограниченная по абсолютной величине функции с периодом по времени 2π, ε – амплитуда периодической во времени деформации границы. Области в начальный момент времени Ω_0 и через период $\Omega_{2\pi}$ совпадают. Векторное поле скорости $\mathbf{V}$ несжимаемой среды подчиняется уравнению $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ и компоненты скорости можно выразить через функцию тока $\varepsilon H\ (t, X, Y, \varepsilon)$. Тогда движение частиц среды $X(t)$, $Y\ (t)$ найдется из решения задачи Коши для уравнений Гамильтона

$$\dot{X} = \varepsilon H_Y, \quad \dot{Y} = -\varepsilon H_X, \quad X(t_0) = X_0, \quad Y(t_0) = Y_0 \tag{1.1}$$

В задаче имеются два независимых безразмерных параметра: ε, b/L. Исследования будут проводиться в виде разложения по малому параметру ε и при произвольном отношении b/L, либо в приближении тонкого слоя, т.е. при произвольной амплитуде ε. В приближении тонкого слоя $b/L \ll 1$ функция Гамильтона представляется в виде разложения $H = H_0\ (t, X, Y)\ (1 + O(b/L))$, где главный член H_0 определяет функцию тока для течения произвольной несжимаемой среды между двумя параллельными пластинами с распределением по сечению продольной скорости H_{0Y}. Если ввести без-



Фиг. 1. Схема деформирования области течения

размерную координату $\eta = Y/(1 + \varepsilon h)$, функцию $H_0(t, X, \eta)$ можно найти, интегрируя уравнение

$$H_{0\eta} = qU(\eta, a_i), \quad H_0(t, X, 0) = 0 \tag{1.2}$$

где U – безразмерный профиль скорости – берется из решения задачи о течении Пуазейля рассматриваемой среды между двумя параллельными пластинами с условием нормировки $\int_0^1 U d\eta = 1$. Множитель q определяется из уравнения сохранения массы несжимаемой среды

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial X} = 0, \quad q(t, 0) = 0 \tag{1.3}$$

Приведем несколько примеров.

Задача о переносе массы прогрессивной волной на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Гамильтониан представляет собой известную функцию тока, разложение которой по амплитуде волны имеет вид [1]

$$\varepsilon H = \varepsilon \operatorname{sh}(Y + d) \sin(X + t) / \operatorname{sh}(d) + O(\varepsilon^2), \quad d = 2\pi b / L \tag{1.4}$$

Движение частиц несжимаемой среды в тонком деформирующемся слое. Для определенности предполагается отсутствие продольной скорости на границе области $Y = 1 + \varepsilon h(t, X)$.

Для вязкой жидкости в приближении тонкого слоя [2, 3] профиль скорости U находится из решения известной задачи о течении Пуазейля

$$U = 6\eta - 6\eta^2, \quad H_0 = q(3\eta^2 - 2\eta^3) \tag{1.5}$$

Для ламинарного течения вязкой жидкости профиль скорости – параболический и не зависит от каких-либо дополнительных параметров.

Для вязкопластической среды профиль скорости U будет состоять из примыкающих к границам параболических частей и прямолинейной части в квазитвердом ядре. Функция тока находится интегрированием уравнения (1.2) [3]

$$H_0 = qf(a, \eta), \quad s = \frac{\varepsilon \mu \omega}{\tau_0 k b}$$

$$f = \frac{3}{\eta_0^2(3 - 2\eta_0)} \begin{cases} \eta^2(\eta_0 - \eta/3), & 0 \le \eta \le \eta_0 \\ \eta_0^2(\eta - \eta_0/3), & \eta_0 \le \eta \le 1/2 \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\frac{\eta_0^2(1 - \frac{2}{3}\eta_0)}{1 - 2\eta_0} = a \tag{1.7}$$

где $a = s\,|q|$ – число Сен-Венана.

В область $^1/_2 \leqslant \eta \leqslant 1$ функция (1.6) продолжается из соображений четности производной $\partial f/\partial\eta$ по аргументу $\eta-{}^1/_2$.

Для случая $a \gg 1$ из уравнений (1.6) (1.7) с точностью до малой $1/(4a+1)^4$ получим [3]

$$f = 3\eta^2 - 2\eta^3 + \frac{\eta^2 - 2\eta^3}{4a+1}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3(4a+1)} \tag{1.8}$$

Функция деформации $h(t, X)$ и безразмерный расход $q(t, X)$ связаны уравнением сохранения массы несжимаемой среды (1.3). При деформировании по закону бегущей волны функции h и q представляются в виде

$$h = h(X-t), \quad q = h(X-t) - h(-t) \tag{1.9}$$

2. Об усреднении гамильтоновых систем Рассматривается задача Коши для уравнений Гамильтона (1.1), где $H(t, X, Y) = H(t + 2\pi, X, Y)$ – произвольная достаточно гладкая функция с периодом по времени 2π.

Традиционный метод усреднения [4, 5] сводится к нахождению канонического преобразования $X, Y \to X^*, Y^*$, приводящего исходную систему (1.1) к автономному виду так, что на отрезке времени порядка $1/\varepsilon$ разница между точным приближенным решением становится малой порядка ε^k, $k = 1,2,\ldots$. В результате уравнения для новых переменных X^*, Y^* приводятся к гамильтоновой форме $\dot{X}^* = \varepsilon H^*_{Y^*}$, $\dot{Y}^* = -\varepsilon H^*_{X^*}$ с не зависящим от времени гамильтонианом [4].

Ниже дается иной метод построения усредненного гамильтониана автономной системы [6]. Процедура усреднения проводится с помощью точечных отображений Пуанкаре. В предлагаемом методе нет необходимости находить нелинейные замены переменных, что в обычном методе усреднения представляет достаточно трудоемкую задачу.

Исходная задача (1.1) сравнивается с задачей Коши для автономной системы уравнений Гамильтона

$$\dot{X}^m = \varepsilon H^m_{Y^m}, \quad \dot{Y}^m = -\varepsilon H^m_{X^m}, \quad X^m(t_0) = X_0, \quad Y^m(t_0) = Y_0 \tag{2.1}$$

где $H^m(X^m, Y^m, \varepsilon)$ – не зависящая от времени и подлежащая определению функция Гамильтона.

Верхний индекс "m" и здесь и далее означает знак усреднения.

Для решения задач (1.1) и (2.1) соответственно потребуем совпадение точек последования Пуанкаре в моменты времени $t_n = t_0 + 2\pi n$, $n = 0,1,2,\ldots$

$$X^m(t_n) = X_n + O(\varepsilon^k), \quad Y^m(t_n) = Y_n + O(\varepsilon^k), \quad X_n = X(t_n), \quad Y_n = Y(t_n) \tag{2.2}$$

Условие (2.2) будет называться стробоскопическим условием, а точки последования Пуанкаре X_n, Y_n – стробоскопическими точками. Эти точки определяют движение точки $X(t)$, $Y(t)$, которое можно наблюдать при киносъемке с интервалом между кадрами, равным 2π.

Функция Гамильтона H^m называется стробоскопически усредненной с точностью до ε^k по отношению к функции Гамильтона H, если решения задач Коши (1.1) и (2.1) с этой же точностью совпадают в моменты времени, кратные периоду, т.е. выполнены равенства (2.2).

По заданной 2π-периодической функции $H(t, X, Y)$ усредненный гамильтониан можно вычислять в виде разложений по степеням ε из решения следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\left(t, x + \frac{\varepsilon}{2}\Psi_y, y - \frac{\varepsilon}{2}\Psi_x\right), \quad \Psi(t_0, x, y) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \Psi^m}{\partial t} = H^m\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\Psi^m_y, y - \frac{\varepsilon}{2}\Psi^m_x\right), \quad \Psi^m(t_0, x, y) = 0 \tag{2.4}$$

$$\Psi(t_0 + 2\pi, x, y) = \Psi^m(t_0 + 2\pi, x, y) + O(\varepsilon^k) \tag{2.5}$$

где функция $\Psi(t, x, y)$ определяет параметрическое представление решения задачи Коши (1.1) по формулам

$$X = x + \tfrac{1}{2}\varepsilon\Psi_y(t, x, y), \quad Y = y - \tfrac{1}{2}\varepsilon\Psi_x(t, x, y) \tag{2.6}$$

$$X_0 = x - \tfrac{1}{2}\varepsilon\Psi_y(t, x, y), \quad Y_0 = y + \tfrac{1}{2}\varepsilon\Psi_x(t, x, y) \tag{2.7}$$

функция $\Psi^m(t, x, y)$ определяет параметрическое представление решения задачи Коши (2.1) по формулам, аналогичным (2.6), (2.7).

Смысл равенств (2.3)–(2.7) состоит в следующем. Формулы (2.6), (2.7) дают параметрическое представление отображения Пуанкаре с сохранением элементарной площади [7]. Проверкой можно убедиться, что отображение дает решение задачи (1.1), если функция Ψ удовлетворяет уравнению (2.3). Функция Ψ^m в (2.4) определяет параметрическое представление задачи Коши усредненной системы по формулам, аналогичным (2.6), (2.7). Условие (2.5) обеспечивает выполнение условия (2.2).

Точное определение функции H^m для неинтегрируемых систем невозможно. Теорема Нейштадта [8] утверждает, что всегда существует последовательность канонических замен с экспоненциально малой, неулучшаемой в общем случае, оценкой остаточного члена в гамильтониане порядка $\exp(-C/\varepsilon)$.

Пусть усредненный гамильтониан H^m найден с точностью до экспоненциально малой погрешности. Тогда стробоскопические точки X_n^m, Y_n^m приближенной системы (2.1) лежат на интегральных кривых $H^m(X_n^m, Y_n^m) = H^m(X_0^m, Y_0^m)$. Для отклонения стробоскопических точек X_n, Y_n исходной системы (1.1) от интегральных кривых (2.1) справедлива оценка, вытекающая из теоремы Нейштадта

$$\| H^m(X_n, Y_n) - H^m(X_0, Y_0) \| \leq \varepsilon C_1 \exp(-C/\varepsilon) 2\pi n \tag{2.8}$$

Из полученной оценки можно сделать вывод, что за асимптотически большое время $t - t_0 = 2\pi n \leq T_0 \sim \exp(C/\varepsilon)$ уход точки исходной системы (1.1) от интегральной кривой усредненной системы (2.1) не превышает малой велиины ε. Неравенство (2.8) гарантирует близость стробоскопических точек исходной и усредненной систем по крайней мере на экспоненциально большом отрезке времени T_0.

Свойства системы (1.1) на бесконечном интервале времени изучены в теории КАМ [9]. Для системы с одной степенью свободы из существования невырожденного устойчивого равновесия усредненной системы вытекает существование в его окрестности периодического движения системы (1.1) и его устойчивость по Ляпунову (теорема Арнольда) [9].

При изучении технологического процесса перемешивания среды под действием периодической деформации области достаточно ограничиться конечным и не очень большим временем наблюдения. В силу оценки (2.8) за это время стробоскопическое движение при достаточно малых ε будет близко к замкнутым траекториям движения усредненной системы $H(X, Y) = \text{const}$ и перемешивания не будет.

Численной характеристикой перемешивания может служить толщина стохастических слоев, определяемая из асимптотической оценки $e^{-C/\varepsilon}$ [10]. Качественному определению этой величины и топологической структуре траекторий движения стробоскопических точек будет посвящено последующее изложение.

3. Усреднение гамильтониана вида $\varepsilon H(t, X, Y, \varepsilon)$. Стробоскопически усредненный гамильтониан и функции Ψ, Ψ^m ищутся в виде разложений по степеням ε. Из системы (2.3), (2,4), (2.5) последовательно определяются коэффициенты разложений. Двухчленное разложение усредненного гамильтониана находится в виде

$$H^m = \langle H \rangle - \frac{\varepsilon}{2}\left\langle \left\{ H, \int_{t_0}^{t} Hdt \right\} \right\rangle + O(\varepsilon^2) \tag{3.1}$$

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} Hdt, \quad \left\{ H, \int_{t_0}^{t} Hdt \right\} = H_y \int_{t_0}^{t} H_x dt - H_x \int_{t_0}^{t} H_y dt$$

где $\langle H \rangle$ означает среднее значение соответствующей функции на отрезке времени $[t_0, t_0 + 2\pi]$, фигурными скобками обозначены скобки Пуассона.

Главный член разложения (3.1) совпадает с аналогичным разложением усредненного по Боголюбову гамильтониана в [4], а остальные члены разложения отличаются от него.

Пример. Рассматривается течение жидкости, создаваемое прогрессивной волной длины 2π в тяжелой жидкости конечной глубины d. Безразмерная функция тока εH представляется разложением по амплитуде волны ε [1] (1.4), где второй и все последующие члены разложения выражаются линейно через гармоники $\sin k(x + t)$, $\cos k(x + t)$. Первый член разложения (3.1) $\langle H \rangle$ равен нулю. Вычисляя второй член разложения, с точностью до ε^3 находим усредненный гамильтониан и скорость переноса частиц жидкости (Стокс 1847 г.)

$$\varepsilon H^m = -\frac{\varepsilon^2 \mathrm{sh}[2(Y^m + d)]}{4\,\mathrm{sh}^2 d}, \quad v_x^m = \frac{\partial \varepsilon H^m}{\partial Y^m} = -\frac{\varepsilon^2 \mathrm{ch}[2(Y^m + d)]}{2\,\mathrm{sh}^2 d}, \quad v_y^m = 0$$

Заметим, что вывод этого результата обычным способом требует значительно больших выкладок [1, 11].

Этот пример представляет собой интегрируемую гамильтонову систему. В системе координат, связанной с волной, исходный гамильтониан – автономный. Частицы жидкости движутся по линиям тока (интегральным кривым исходного гамильтониана). Поэтому автономный усредненный гамильтониан H^m может быть найден точно и стохастических режимов в этой системе не будет.

4. Движение частиц в вязкой жидкости Функция тока εH для течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя определяется по (1.5). Продольная скорость εH_η как функция поперечной координаты η изменяется по параболе, обращаясь в ноль на границах $\eta = 0, \eta = 1$.

Определяем по (3.1) стробоскопически усредненный гамильтониан

$$\varepsilon H^m = 6\varepsilon^2 \langle qh \rangle Y^2(1-Y)^2(2Y-1) + 0\,(\varepsilon^3) \tag{4.1}$$

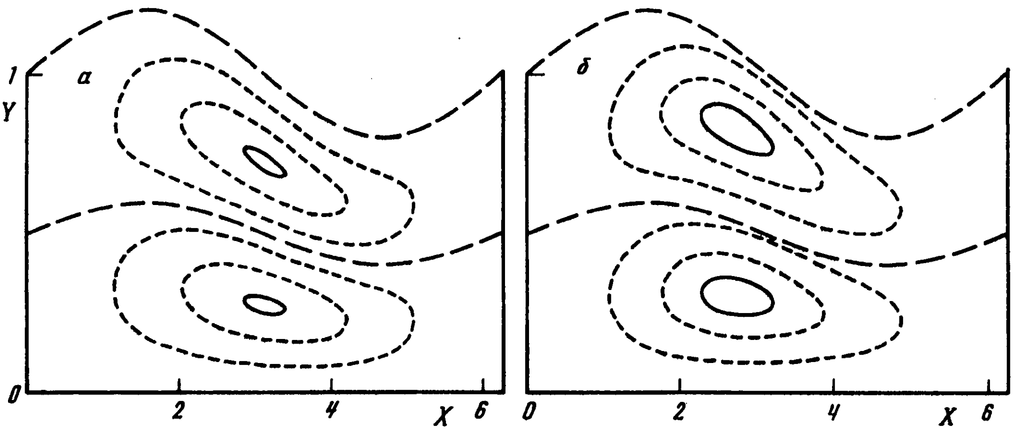
Для исходной системы с гамильтониана εH_0 (t, X, Y) (1.5) граница области $X = 0$, $X = 2\pi$, $Y = 0$, $Y = 1 + \varepsilon\, h(t, X)$ является точной предельной траекторией движения частиц жидкости. Кроме того, уравнение $Y = {}^1/_2\ (1 + \varepsilon\, h(t, X))$ является точным интегралом уравнений движения. Соответствующие выводы справедливы и для стробоскопических точек и будут точно выполняться для гамильтониана

$$\varepsilon H^m = 6\varepsilon^2 \langle qh \rangle Y_0^2 (1 - Y_0)^2 (2Y_0 - 1) + O(\varepsilon^2), \quad Y_0 = Y/(1 + \varepsilon h(0, x)),$$

который с точностью до ε^3 совпадает с (4.1).

Функция $H^m(X, Y)$ принимает наибольшее $H_{\max}$ и наименьшее $H_{\min}$ значения при $x = \pi$, $Y_0 = 1/2 \pm \sqrt{5}/10$. Фазовые траектории при $0 \leqslant H^m \leqslant H_{\max}$ непрерывно заполняют верхнюю половину области Ω_0, при $H_{\min} \leqslant H^m \leqslant 0$ – ее нижнюю половину.

При деформировании по закону бегущей синусоидальной волны находим: $h = \sin(X-t)$, $q = \sin(X-t) + \sin t$, $\langle qh \rangle = 1/2(1-\cos X)$.



Фиг. 2. Стробоскопические точки для течения вязкой жидкости в тонком слое при деформации границы по закону синусоидальной волны с амплитудой $\varepsilon = 0{,}2$; *а* – осредненное движение, *б* – точный расчет

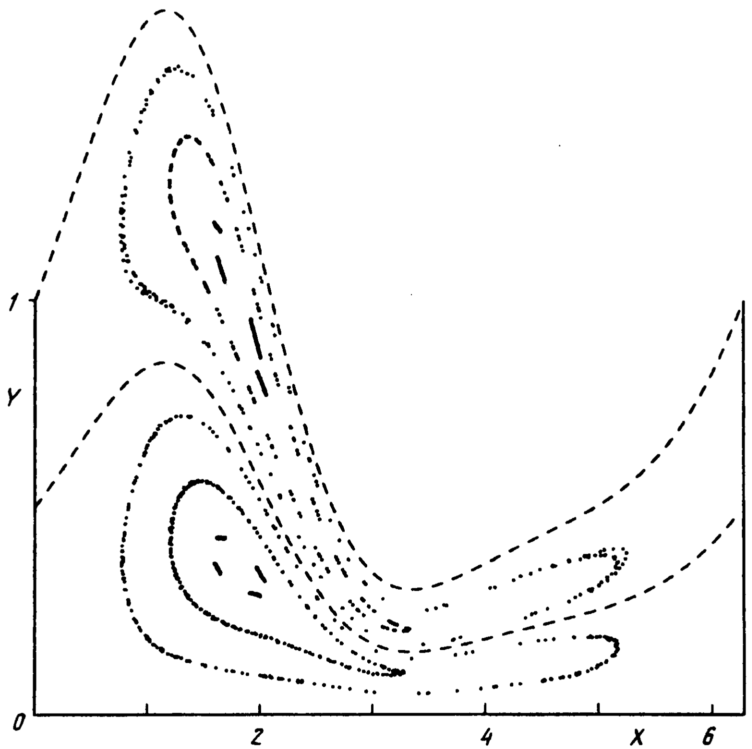
На фиг. 2 изображены стробоскопические точки за время, равное 100π: *а* для усредненного гамильтониана H^m и *б* для исходного гамильтониана (1.5) путем численного интегрирования уравнений Гамильтона. В начальный момент времени точки имели координаты $X_0 = \pi$; $Y_0 = 0{,}09$; $0{,}16$; $0{,}25$; $0{,}75$; $0{,}83$; $0{,}91$. Как видно из фиг. 2, стробоскопические точки располагаются на замкнутых интегральных кривых для усредненного гамильтониана.

Вычисления показывают, что при любой конечной амплитуде $0 < \varepsilon < 1$ стробоскопические точки практически не отклоняются от замкнутых интегральных кривых. Топологическая структура стробоскопических траекторий не зависит от ε. Такое поведение качественно можно обьяснить тем, что в силу $\langle q \rangle = 0$ усредненный гамильтониан имеет порядок ε^2. В этом вырожденном случае ширина стохастического слоя имеет существенно меньший порядок e^{-C/ε^2}. Даже при $\varepsilon = 0{,}8$ размер стохастических щелей очень мал. Для вязкопластической среды усредненный гамильтониан может иметь больший порядок ε и ширина стохастического слоя будет иметь больший порядок $e^{-C/\varepsilon}$.

5. Движение частиц в вязко-пластической среде Функция тока εH для вязкопластичного течения в приближении тонкого слоя определяется по (1.6), (1.7) или при $s \gg 1$ по приближенной формуле (1.8). Покажем, что при $s \gg 1$ усредненный гамильтониан εH^m, перемещения частиц за период и собственная частота ω_0 около критической точки, вообще говоря, имеют первый порядок по ε. Действительно, все перечисленные выше характеристики имеют одинаковый порядок малости по ε и поэтому о порядке малости можно судить по усредненному гамильтониану. Применяя формулу осреднения (3.1) и асимптотическую формулу (1.8), получим

$$\varepsilon H^m = \eta^2(1-2\eta)\frac{\varepsilon}{4s}I(X), \quad I(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{4sq(t,X)dt}{4s\,|\,q(t,X)\,|+1} \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sign} q dT \tag{5.1}$$

При несимметричном деформировании слоя длина интервала постоянного знака функции расхода q может отличаться от полупериода. Из (5.1) следует, что гамильтониан и собственная частота в этом случае будут пропорциональны ε. В пределе $s \to \infty$ (вязкая жидкость) гамильтониан и собственная частота будут иметь более высокий порядок малости ε^2. Можно показать, что усредненный гамильтониан εH^m для предельного пластического течения $s \to 0$ имеет также более высокий порядок малости ε^2.



Фиг. 3. Стробоскопические точки для вязкопластического течения в тонком слое при деформации границы по закону бегущей несимметричной волны при условии резонанса 4-го порядка

Таким образом, при несимметричном деформировании при некотором конечном s размеры стохастических слоев достигают наибольшего значения. Этот случай наиболее интересен для достижения эффекта перемешивания и требует численной проверки.

Была рассмотрена несимметричная деформация вида $h = \sin(X-t + \varepsilon_1(1-\cos(X-t)))$. При амплитуде $\varepsilon = 0{,}7$ и коэффициенте асимметрии $\varepsilon_1 = 0{,}69$ был обнаружен резонанс четвертого порядка. Собственная частота $\omega_0 = 1/4$ практически не зависела от числа s в диапазоне $0{,}2 < s < 1$. При меньших и больших значениях параметра s частота уменьшалась. Тем не менее и в условиях резонанса стробоскопические точки в течение длительного времени ложатся на интегральные замкнутые кривые. На фиг. 3 изображены стробоскопические точки за 200 периодов при $s = 1$, $\varepsilon = 0{,}7$, $\varepsilon_1 = 0{,}69$. Начальные точки выбирались из сечения $X = 2$.

Заключение. При периодическом деформировании границы тонкого слоя частицы однородной несжимаемой среды в течение, по крайней мере, экспоненциально большого времени порядка $\exp(C/\varepsilon)$ двигаются по замкнутым интегральным кривым и перемешивания не происходит.

Для моделирования процесса перемешивания следует принять во внимание факторы, неучтенные в рассмотренных моделях, например следующие: отличная от нуля продольная скорость верхней деформируемой границы слоя; непериодическое во времени деформирование границы слоя; начальная неоднородность среды.

Все эти факторы, как показывает численная проверка, существенно влияют на переход к стохастическому режиму.

Автор благодарит Д.М. Климова за внимание и интерес к данному исследованию, а также А.И. Нейштадта и Д.В. Трещева за полезные обсуждения результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00250).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Плоское течение вязкопластичных сред в узких каналах с деформируемыми стенками // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 23–31.
3. *Петров А.Г.* Плоская задача о выдавливании вязкопластичной среды параллельными пластинами // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 608–617.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
6. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 483–488.
7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951. 544 с.
8. *Нейштадт А.И.* О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1998. Т. 48. Вып. 3. С. 197–204.
9. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
10. *Трещев Д.В.* Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем. М.: ФАЗИС, 1998. 181 с.
11. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 319 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1999