

УДК 532.5.013.4:536.252:534.23

© 2000 г. Д.В. ЛЮБИМОВ, С.В. ШКЛЯЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АДВЕКТИВНОГО ТЕРМОАКУСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В рамках уравнений термоакустической конвекции проведено исследование линейной устойчивости течения в горизонтальном слое жидкости, вызванного продольным градиентом температуры и распространением в жидкости акустической волны. Обнаружены моды неустойчивости, соответствующие возмущениям типа плоских и продольных валов, а также косых волн. С помощью слабонелинейного анализа показано, что перечисленные выше режимы возникают мягко; исследована устойчивость различных вторичных течений при малых надкритичностях.

Линейному и нелинейному исследованию адвективного течения посвящено большое количество работ (см., например, обзоры в [1, 2]). Одной из главных причин такого внимания является обилие практических приложений данной задачи. Горизонтальный слой с заданным на границах продольным градиентом температуры часто может служить моделью различных технологических процессов, в которых жидкость движется по каналу (щели), соединяющему два резервуара, поддерживаемых при разных температурах. Кризис плоскопараллельного конвективного течения обычно играет негативную роль в рассматриваемых процессах (например, при росте кристаллов нерегулярное конвективное движение приводит к неоднородности получаемого образца) и задача управления устойчивостью актуальна.

Для стабилизации конвективных течений применяются различные методы. В ряде работ, обсуждаемых в [1], порог устойчивости конвективного течения повышается с помощью различных гидродинамических внешних воздействий (движение границ, внешний градиент давления и т.д.). При исследовании течения жидких металлов достаточно эффективным оказывается наложение внешнего магнитного поля [3]. Стабилизирующее действие высокочастотных (но неакустических) вибраций на устойчивость адвективного течения изучено в [4, 5]. Теоретическое рассмотрение гравитационной конвекции в звуковом поле начато в [6], где построены осредненные уравнения термоакустической конвекции. В работе [7] начато изучение линейной устойчивости термоакустического течения.

В ходе исследований, проведенных авторами в [7], обнаружено стабилизирующее влияние акустической волны на устойчивость адвективного течения. Оказалось, что стабилизация возможна лишь для жидкостей, обладающих малыми числами Прандтля (жидкие металлы) и при не слишком больших интенсивностях внешнего воздействия. Настоящая работа посвящена подробному анализу именно этой области пространства параметров.

В работе обнаружено, что в зависимости от параметров задачи наиболее опасными являются различные типы возмущений: бегущие плоские и стационарные продольные валы, бегущие косые волны. Существование последних представляется достаточно интересным фактом, так как в обширной литературе, касающейся устойчивости адвективного течения с твердыми границами, упоминание о наклонных волнах авторам не встречалось.

Помимо линейной задачи устойчивости проведен также слабонелинейный анализ. Получаемые этим методом амплитудные уравнения имеют схожий вид для достаточно широкого класса задач, причем различия зависят от типа наиболее опасных возмущений, а не от конкретной физической постановки задачи [1, 8–11]. Вследствие этого система амплитудных уравнений, полученная при слабонелинейном исследовании возмущений типа наклонных волн, является обобщением изученных ранее уравнений [1, 8–11]. Показано, что надкритические режимы всех типов (плоские и продольные валы, наклонные волны) возникают мягко, построены области устойчивости соответствующих вторичных течений. Обнаружено, что в некотором диапазоне параметров все ответвляющиеся от основного состояния пространственно-периодические вторичные течения неустойчивы и плоскопараллельное течение сменяется нестационарным режимом сложной структуры, требующим дальнейшего изучения.

1. Задача линейной устойчивости. Пусть плоская монохроматическая акустическая волна, поле скорости которой имеет вид $\mathbf{w} = a\omega \mathbf{j} \cos \omega(t - x/c)$, распространяется в горизонтальном слое жидкости толщины $2h$ (\mathbf{j} – орт оси x). Длина акустической волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ предполагается сравнимой с толщиной слоя. На идеально теплопроводных границах полости поддерживается постоянный продольный градиент температуры $A\mathbf{j}$. Оси координат выберем следующим образом: ось z направлена вертикально вверх, оси x, y лежат в плоскости слоя, начало координат выбрано в средней плоскости слоя.

Период акустических колебаний мал по сравнению с характерными временами процессов вязкости и теплопроводности, что делает эффективным осредненное описание динамики жидкости. Уравнения термоакустической конвекции для средних полей в рассматриваемой ситуации (распространяющаяся вдоль плоского слоя плоская волна) сводятся к обычным уравнениям тепловой конвекции в приближениях Буссинеска [6]. Все влияние акустической волны заключается в генерации внутри пограничного слоя осредненной завихренности. Эта завихренность переносится потоком и за счет вязкости по всему объему, занимаемому жидкостью, что приводит к формированию так называемого акустического течения [12]. Этот процесс можно учесть с помощью эффективных граничных условий на внешней границе скин-слоя. В силу малой толщины последнего граничные условия могут быть перенесены на твердую поверхность. Простой расчет, проведенный в [12], дает для скорости на стенках слоя значение (с учетом вклада пульсационного транспорта) $v_x = U = 3/4 a^2 \omega^2 / c$.

Уравнения тепловой конвекции и граничные условия запишем в безразмерных переменных, выбрав в качестве единиц измерения длины – h , скорости – v/h , времени – h^2/ν , температуры – Ah , давления – $\rho_0 v^2 / h^2$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Gr T \boldsymbol{\gamma} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$z = \pm 1: \quad T = x, \quad \mathbf{v} = Re \mathbf{j} \quad (1.3)$$

$$\int_{-1}^1 \langle v_x \rangle dz = 0 \quad (1.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma}$ – орт оси z ; T и p – средняя температура и перенормированное давление, угловые скобки означают осреднение по координате y . В уравнениях (1.1)–(1.4) используется средняя лагранжева скорость жидкости \mathbf{v} , так что вектор $\rho_0 \mathbf{v}$ является средним импульсом единицы объема жидкости [5, 12]. В предположении замкнутости слоя на бесконечности условие отсутствия потока (1.4) необходимо поставить именно на \mathbf{v} .

Уравнения (1.1), (1.2) и граничные условия (1.3), (1.4) содержат три безразмерных параметра подобия: $Gr = g\beta Ah^4/\nu^2$ – число Грасгофа, $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля и $Re = Uh/\nu$ – число Рейнольдса.

Задача (1.1) – (1.4) допускает стационарное плоскопараллельное течение

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\text{Gr}}{6}(z^3 - z) + \frac{\text{Re}}{2}(3z^2 - 1) \quad (1.5)$$

$$T_0 = x + \frac{\text{Gr Pr}}{360}(3z^5 - 10z^3 + 7z) + \frac{\text{Re Pr}}{8}(z^4 - 2z^2 + 1) \quad (1.6)$$

Профиль скорости является суперпозицией адвективного [1] и акустического [12] течений.

Для исследования устойчивости течения (1.5), (1.6) внесем в (1.1) – (1.4) возмущения скорости \mathbf{v}_1 , температуры T_1 и давления p_1 . В линейном по малым возмущениям приближении получим следующую задачу:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_1 + \Delta \mathbf{v}_1 + \text{Gr } T_1 \boldsymbol{\gamma} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) T_1 + (\mathbf{v}_1 \nabla) T_0 = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T_1, \quad \text{div } \mathbf{v}_1 = 0 \quad (1.8)$$

$$z = \pm 1: T_1 = 0, \quad \mathbf{v}_1 = 0 \quad (1.9)$$

Ищем решение (1.7) – (1.9) в виде трехмерных нормальных возмущений, пропорциональных $\exp\{i(k_x x + k_y y - \Omega t)\}$, где k_x , k_y и Ω – компоненты волнового вектора и частота нейтральных возмущений. Вводя обозначения u , v , w , θ и p для зависящих от вертикальной координаты z амплитуд x -, y -, z -компонент скорости, температуры и давления соответственно, получаем из (1.7) – (1.9) спектрально-амплитудную задачу

$$-i\Omega u + ik_x v_0 u + v_0' w = -ik_x p + \Delta u \quad (1.10)$$

$$-i\Omega v + ik_x v_0 v = -ik_y p + \Delta v \quad (1.11)$$

$$-i\Omega w + ik_x v_0 w = -p' + \Delta w + \text{Gr } \theta \quad (1.12)$$

$$\text{Pr}(-i\Omega \theta + ik_x v_0 \theta + u + T_0' w) = \Delta \theta \quad (1.13)$$

$$ik_x u + ik_y v + w' = 0 \quad (1.14)$$

$$z = \pm 1: u = v = w = \theta = 0 \quad (1.15)$$

$$\Delta = d^2 / dz^2 - k^2, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Здесь штрихом обозначается дифференцирование по вертикальной координате. Решая (1.10) – (1.15), можно определить два собственных числа (например, Gr и Ω) как функции остальных безразмерных параметров и построить соответствующие собственные функции. Условие (1.4) выполняется автоматически в силу (1.14) для плоских возмущений и ввиду усреднения по y при $k_y \neq 0$.

Задача (1.10)–(1.15) имеет два хорошо изученных предельных случая [1, 2, 13].

В отсутствие акустического воздействия получаем задачу об устойчивости адвективного течения в горизонтальном слое, которая не допускает преобразований Сквайра. В большинстве работ (см. [1, 2]) рассматривается устойчивость течения по отношению к плоским ($k_y = 0$, $v = 0$) и спиральным ($k_x = 0$) возмущениям. В области малых чисел Прандтля происходит конкуренция двух основных мод неустойчивости – плоской гидродинамической и спиральной колебательной. Существуют также две монотонные спиральные моды неустойчивости различной четности, являющиеся опасными лишь при достаточно больших Gr .

В некотором смысле протиположный предел имеет место в гидродинамическом приближении ($\text{Pr} = 0$), когда возмущения предполагаются изотермическими. В этом случае получаем задачу Орра – Зоммерфельда для (1.5). Но (1.5) отличается от основного течения, рассмотренного в [13], на постоянное слагаемое. Можно показать,

что такое слагаемое приводит лишь к изменению частоты возмущений Ω на величину $k_x \text{Re}$. Таким образом, при $\text{Pr} = 0$ (1.10) – (1.15) сводится к гидродинамическому приближению в задаче об устойчивости конвективного течения в вертикальном слое между изотермическими пластинами при наличии продольного градиента давления. Разумеется, для задачи Орра – Зоммерфельда справедлива теорема Сквайра и наиболее опасными являются плоские возмущения.

Обсудим симметрии, которыми обладает задача (1.10)–(1.15). Очевидно, что выбор направления оси y произволен, т.е. задача инвариантна относительно замены k_y на $-k_y$, v на $-v$. При $\text{Re} = 0$ задача допускает еще одно преобразование, связанное с инверсией координатных осей. Рассмотрим этот случай подробнее. В отсутствие акустического течения существуют моды неустойчивости, обусловленные как монотонными, так и бегущими возмущениями (см., например, [1, 2]). Собственные функции монотонных возмущений обладают определенной четностью. Колебательные возмущения при $\text{Re} = 0$ вырождены по направлению волнового вектора. Действительно, меняя k на $-k$, z на $-z$, p на $-p$, вернемся к задаче (1.10) – (1.15). В зависимости от знака x -компоненты волнового вектора возмущения типа наклонных волн локализованы в нижней ($k_x > 0$) или верхней ($k_x < 0$) частях слоя. Лишь спиральные колебательные возмущения обладают определенной четностью, и для них указанное вырождение отсутствует.

При наложении акустического воздействия свойство четности для монотонных при $\text{Re} = 0$ возмущений теряется. Возмущения начинают дрейфовать, причем фазовая скорость возмущений растет с увеличением Re и k_x (отметим, что спиральные монотонные возмущения остаются монотонными и в присутствии акустической волны). Для этого класса возмущений смена знака числа Рейнольдса не приводит к изменению задачи, лишь направление распространения возмущений меняется на противоположное.

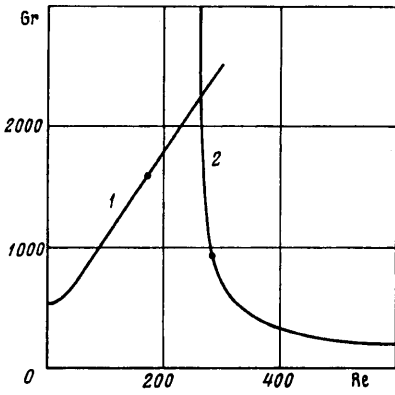
Для бегущих при $\text{Re} = 0$ возмущений описанное выше вырождение по знаку волнового вектора снимается акустическим воздействием. Возмущения, локализованные в верхней и нижней частях слоя, будут различным образом изменяться с ростом Re , т.е. вырожденный колебательный уровень неустойчивости распадется на пару уровней. Отсутствие вырождения по знаку k_x приводит к необходимости исследования трехмерной задачи (1.10) – (1.15) в полной постановке. Действительно, спиральные колебательные возмущения уже не могут быть наиболее опасными среди произвольных трехмерных возмущений типа косых волн, так как в разложении $\text{Gr}(k_x)$ при малых k_x отличен от нуля член первого порядка.

Задача (1.10) – (1.15) инвариантна относительно замены k на $-k$, z на $-z$, p на $-p$, Re на $-\text{Re}$, т.е. изменение знака числа Рейнольдса соответствует в этом случае переходу от одного уровня из пары к другому.

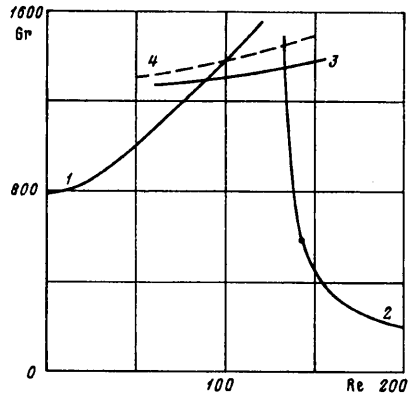
Таким образом, задача устойчивости (1.10) – (1.15) не меняется при смене знака числа Рейнольдса. С другой стороны, одновременное изменение знака Re и Gr не приводит к появлению физически новой ситуации. Это замечание позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением положительных чисел Рейнольдса и Грасгофа.

Для плоских и спиральных возмущений краевая задача (1.10) – (1.15) рассматривалась в [7], где были исследованы жидкости, обладающие различными тепловыми свойствами ($0 \leq \text{Pr} \leq 10$). По мере роста числа Рейнольдса было обнаружено заметное понижение устойчивости течения (1.5), (1.6), причем наиболее опасной является одна из монотонных спиральных мод неустойчивости. Область параметров, в которой возможна стабилизация адвективного течения с помощью акустического воздействия, существует лишь при малых числах Прандтля (жидкие металлы). Эта область стабилизации подробно изучается в настоящей работе; также рассматривается устойчивость течения (1.5), (1.6) по отношению к произвольным пространственным возмущениям.

В ходе численного исследования применялись методы дифференциальной прогонки [14] и ортогонализации [15, 16], причем результаты, полученные разными методами, хорошо согласуются.



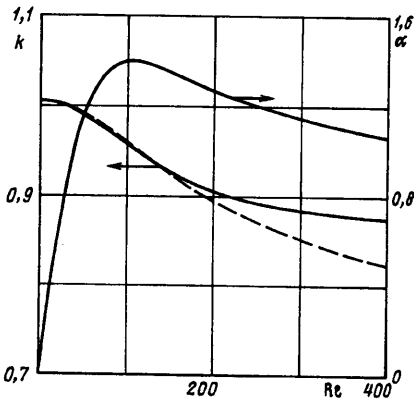
Фиг. 1



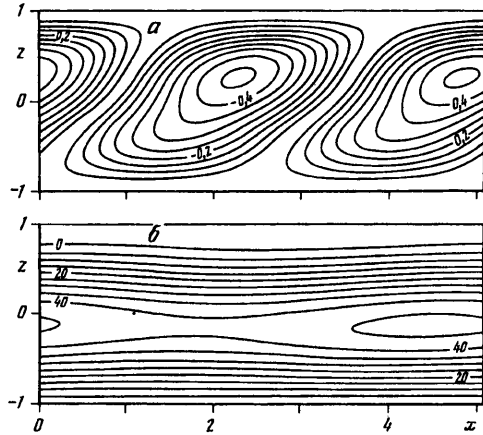
Фиг. 2

Фиг. 1. Карта устойчивости течения на плоскости $Gr-Re$ при $Pr = 0,03$, кривые 1 и 2 – границы устойчивости по отношению к плоским и спиральным монотонным возмущениям

Фиг. 2. Карта устойчивости течения на плоскости $Gr-Re$ при $Pr = 0,1$, кривые 1–4 – границы устойчивости по отношению к плоским, спиральным монотонным, типа косых волн и спиральным колебательным возмущениям



Фиг. 3

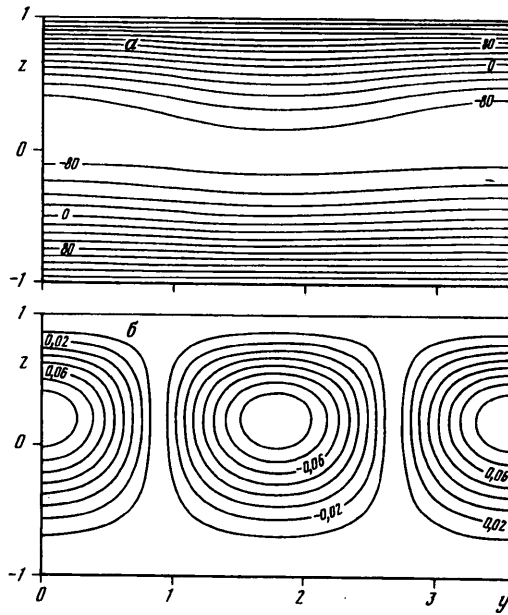


Фиг. 4

Фиг. 3. Зависимость волнового числа (k) и угла наклона волнового вектора к оси y (α) от числа Рейнольдса для наиболее опасных возмущений типа косых волн (сплошные) и спиральных колебательных возмущений (штриховая линия)

Фиг. 4. Изолинии функций тока плоских возмущений (a) и соответствующего им вторичного течения (b). Изолинии проведены на фиг. a через 0,5; b – через 5 единиц

На фиг. 1 и 2 представлены карты устойчивости течения (1.5), (1.6) на плоскости $Gr-Re$ соответственно для $Pr = 0,03$ и $0,1$. Вычисления показывают, что вторая (нечетная в отсутствие акустического воздействия) спиральная монотонная мода достаточно сильно стабилизируется с ростом числа Рейнольдса и не играет никакой роли в развитии неустойчивости. При малых числах Рейнольдса наиболее опасными являются плоские гидродинамические возмущения, по отношению к которым наблюдается заметная стабилизация с ростом Re . По мере дальнейшего увеличения интенсивности акустического воздействия кризис становится обусловленным трехмерными возмущениями, причем при достаточно больших Re наиболее опасными являются спиральные монотонные возмущения. В этой области параметров наблюдается заметное понижение устойчивости течения (1.5), (1.6) с ростом числа Рейнольдса.



Фиг. 5. Изолинии x -компоненты скорости (а) и функции тока для y -, z -компонент скорости (б) вторичного течения, соответствующего спиральной монотонной моде неустойчивости на плоскости y - z . Изолинии проведены через 20 (а) и 0,01 (б) единиц

Существует также область параметров, в которой наиболее опасными становятся возмущения типа косых волн (кривая 3 на фиг. 2). При этом критическое число G_r по отношению к спиральным колебательным возмущениям (линия 4) всегда больше, чем G_r для других возмущений. По отношению к возмущениям типа косых волн с ростом числа Рейнольдса наблюдается слабая стабилизация.

На фиг. 3 представлены волновое число k и угол α между осью y и волновым вектором в зависимости от числа Рейнольдса ($Pr = 0,1$) для наиболее опасных возмущений типа косых волн. Угол α выбран таким образом, чтобы волновой вектор k имел компоненты: $k_x = -k \sin \alpha$, $k_y = k \cos \alpha$. Наиболее опасные возмущения распространяются под тупым углом к оси x и мало отличаются от спиральных (отношение k_x/k_y не превосходит 20%). Последним может быть объяснено качественное подобие границ устойчивости для этих возмущений (кривые 3 и 4 на фиг. 2). Различие между волновыми числами наиболее опасных возмущений для спиральной колебательной моды ($\alpha = 0$) и для моды типа косых волн мало при $Re < 150$, однако становится заметным с ростом интенсивности акустического воздействия.

При малых числах Прандтля ($Pr < 0,05$) возмущения типа косых волн более опасны, чем спиральные колебательные возмущения, даже при $Re = 0$. Соответствующая мода неустойчивости четырехкратно вырождена по направлению распространения косой волны. При малых k_x минимизация по k_y приводит для неустойчивости типа косых волн к результату

$$Gr = Gr_0 + a Re k_x + b(Pr - Pr_c)k_x^2$$

где Gr_0 , a и b – медленно меняющиеся положительные функции чисел Прандтля и Рейнольдса, а $Pr_c \approx 0,0473$ в отсутствие акустического воздействия.

Функции тока плоских возмущений и соответствующего им вторичного течения показаны на фиг. 4 ($Pr = 0,1$). При построении вторичных течений условно прини-

мается, что максимальная по абсолютному значению скорость возмущений составляет 10% максимальной скорости основного течения. Гидродинамической моде неустойчивости соответствуют возмущения в виде валов, локализованных немного выше центра слоя. Эти валы медленно дрейфуют вдоль оси x . По мере роста интенсивности акустического воздействия картина качественно не меняется. Приведенные на фиг. 4 функции тока вычислены при параметрах, соответствующих минимуму нейтральной кривой $Gr(k)$: $Re = 50$; $Gr = 1005$; $k_x = 1,237$; $c = 0,2203$ ($c = \Omega/(k_x Re)$ – фазовая скорость возмущений).

Интересная ситуация наблюдается для собственных функций спиральных монотонных возмущений. В отсутствие акустической волны спиральная мода неустойчивости обусловлена рэлеевскими возмущениями, локализованными вблизи границ слоя в зонах, где основной профиль температуры (1.8) соответствует потенциально неустойчивой стратификации жидкости. Рассматриваемый уровень неустойчивости является четным, т.е. возмущение завихренности у противоположных границ имеет одинаковый знак, а в центре слоя существует еще один вихрь малой интенсивности и другого знака (см. [1]). При наложении акустического воздействия указанная симметрия пропадает, причем по мере роста Re интенсивность верхнего вихря растет, а нижнего уменьшается, что приводит к появлению "застойной зоны" в нижней части слоя. При достаточно большом числе Рейнольдса всю область занимает единственный вихрь (фиг. 5). Очевидно, что поле скорости вторичного течения, соответствующего спиральным возмущениям, может быть описано с помощью двух скалярных полей, зависящих от координат y и z : продольной компоненты скорости (фиг. 5, *a*) и функции тока для поперечных компонент (фиг. 5, *b*). Приведенные на фиг. 5 собственные функции соответствуют критическим параметрам задачи: $Re = 180$; $Gr = 252$; $k_y = 1,754$. Описанное изменение собственных функций объясняется перестройкой спектра декрементов, вызывающей достаточно резкое изменение кривой устойчивости $Gr(Re)$ для спиральных монотонных возмущений (см. фиг. 1, 2, а также [7]).

Сравним полученные результаты с результатами задачи о влиянии вибраций неакустической частоты на устойчивость адвективного течения. Интенсивность внешнего воздействия в приближениях Зеньковской – Симоненко характеризуется вибрационным аналогом числа Грасгофа $G_v = (\beta A b \omega)^2 h^4 / 2\nu^2$, которое можно выразить через пульсационное число Рейнольдса (для простоты принято равенство амплитуды вибраций b и амплитуды смещения частиц в акустической волне a)

$$G_v \sim Re Gr^2 \nu^3 / g^2 h^5 \quad (1.16)$$

Рассмотрим в качестве примера поведение жидкого металла под действием акустической волны с амплитудой $a = 10^{-3}$ см и частотой $\omega = 10^5$ рад/с в слое толщиной около 1 см (сравнимой с длиной акустической волны). В этом случае число Рейнольдса имеет значение порядка 10^2 , критическое число Грасгофа (фиг. 1) порядка 10^3 , а его вибрационный аналог, полученный из (1.16), настолько мал (10^{-2}), что вибрационное воздействие ничтожно (см. [4]). В то же время акустическая волна приводит к заметной стабилизации адвективного течения (см. фиг. 1,2). Неправомерное применение теории вибрационной конвекции существенно искажает результаты.

2. Слабонелинейный анализ. Если число Грасгофа не намного превосходит свое минимальное критическое значение G_0 , определяемое из линейной теории, то время роста возмущений велико, что дает возможность применить метод многих масштабов [17] для изучения слабонелинейного поведения возмущений. Допуская также медленную пространственную модуляцию плоских наклонных волн [1, 8, 9], представим производные по x , y и t в виде рядов по формальному малому параметру ε , связанному с надкритичностью

$$Gr = G_0 + \varepsilon^2 G_2 + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \dots \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} + \dots \quad (2.2)$$

Раскладывая в аналогичный ряд возмущенные поля

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{j} + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \dots, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots \quad (2.3)$$

и подставляя (2.1)–(2.3) в уравнения (1.3)–(1.4) и граничные условия (1.5), в первом порядке получим линейную задачу устойчивости (1.10)–(1.15), из решения которой имеем для $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1, w_1), T_1$ и p_1

$$\begin{aligned} u_1 &= u(z)(c_1 \exp\{i\Phi_1\} + c_2 \exp\{i\Phi_2\}) + \text{к.с.} \\ v_1 &= v(z)(c_1 \exp\{i\Phi_1\} - c_2 \exp\{i\Phi_2\}) + \text{к.с.} \\ w_1 &= w(z)(c_1 \exp\{i\Phi_1\} + c_2 \exp\{i\Phi_2\}) + \text{к.с.} \\ T_1 &= \theta(z)(c_1 \exp\{i\Phi_1\} + c_2 \exp\{i\Phi_2\}) + \text{к.с.} \\ p_1 &= p(z)(c_1 \exp\{i\Phi_1\} + c_2 \exp\{i\Phi_2\}) + \text{к.с.} + b \\ \Phi_{1,2} &= k_x x \pm k_y y - \Omega t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь и далее индексы у t_0, x_0 и y_0 опускаются. Функции u, v, w, θ и p определяются из решения краевой задачи (1.10)–(1.15), к.с. – комплексно-сопряженные слагаемые. Амплитуды двух наклонных волн c_1 и c_2 , а также слагаемое b , отвечающее изменению давления вследствие возмущений (см. [1,9]), являются в соответствии с идеологией метода многих масштабов функциями "медленных" координат и времени. В дальнейшем часто будет говориться, что первая волна распространяется вдоль оси y , а вторая – против оси. При этом, однако, не следует забывать, что обе волны имеют одинаковую (отрицательную) x -компоненту волнового вектора. В частном случае, соответствующем плоским и спиральным монотонным возмущениям, вид решений (2.4) существенно упрощается – одна из амплитудных функций (например, c_2) полагается равной нулю. Здесь же отметим, что в (2.4) отсутствуют слагаемые вида

$$\bar{u}(-z)(c_3 \exp\{i(k_x x + \Omega t + k_y y)\}) + \text{к.с.}$$

$$\bar{u}(-z)(c_4 \exp\{i(k_x x + \Omega t - k_y y)\}) + \text{к.с.}$$

что не позволяет изучать при $\text{Re} = 0$ колебательные моды неустойчивости, вырожденные по знаку k_x (чертой обозначено комплексное сопряжение). Однако известно, что в классической адвективной задаче (см. [1,2]) существует только одна наиболее опасная колебательная мода неустойчивости, причем чисто спиральная. Как отмечалось ранее, для спиральных колебательных мод неустойчивости вырождение по знаку k_x отсутствует, т.е. необходимости в учете указанных слагаемых нет.

Для изучения слабонелинейных режимов, возникающих при потере устойчивости течением (1.5), (1.6), учтем следующие порядки разложения (2.1)–(2.3). В третьем порядке теории возмущений получим систему нелинейных уравнений, которую можно привести к виду ([1])

$$\begin{aligned} c_{1t} &= u_y c_{1\eta} + e^{i\varphi} c_{1\xi\xi} + g e^{i\varphi} c_{1\eta\eta} + \delta e^{i\varphi} c_{1\xi\eta} + \\ &+ c_1 (e^{i\psi} (1 - |c_1|^2) - K e^{i\mu} |c_2|^2 - \chi e^{i\sigma} b_\xi - \chi e^{i\xi} b_\eta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} c_{2t} &= -u_y c_{2\eta} + e^{i\varphi} c_{2\xi\xi} + g e^{i\varphi} c_{2\eta\eta} - \delta e^{i\varphi} c_{2\xi\eta} + \\ &+ c_2 (e^{i\psi} (1 - |c_2|^2) - K e^{i\mu} |c_1|^2 - \chi e^{i\sigma} b_\xi + \chi e^{i\xi} b_\eta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$(|c_1|^2 + |c_2|^2)_\xi + Q(|c_1|^2 - |c_2|^2)_\eta = b_{\xi\xi} + b_{\eta\eta} \quad (2.7)$$

Здесь $\psi, \varphi, g, \phi, \delta, \Psi, K, \mu, \kappa, \sigma, \chi, \zeta, Q$ и u_y – вещественные коэффициенты, определяемые численно. Индексы t, ξ и η у амплитудных функций c_1, c_2 и b обозначают производные по времени и соответствующим координатам. Коэффициент u_y является величиной предыдущего порядка малости, что упрощает исследование (2.5)–(2.7).

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных является обобщением рассмотренных в [1,8–11] уравнений. Важный предельный случай (2.5)–(2.7), когда отлична от нуля лишь одна амплитудная функция (скажем, $c_2 = 0, c_1 \neq 0$), рассматривался в [1,8–10]. Подобный случай реализуется и в рассматриваемой задаче для плоской и спиральной монотонной мод неустойчивости. В [11] изучались колебательные возмущения для задачи об устойчивости плоскопараллельного течения в вертикальном слое с изотермическими границами, поддерживаемыми при разных температурах. Такая постановка задачи приводит к амплитудным уравнениям, схожим с (2.5)–(2.7). В [11], однако, рассматривались лишь плоские возмущения, что соответствует случаю $b = c_{1\eta} = c_{2\eta} = 0$. Кроме того, во всех перечисленных выше работах в амплитудных уравнениях отсутствовали слагаемые с первой производной по η , т.е.

$$\delta = Q = \chi = 0 \quad (2.8)$$

что вызвано изучением в [1,8–11] слабонелинейного поведения плоских возмущений. В рассматриваемой здесь задаче необходим более общий анализ ввиду трехмерной структуры наиболее опасных возмущений.

Рассмотрим решения (2.5)–(2.7), соответствующие возмущениям основного течения в виде бегущих волн. Уравнения (2.5)–(2.7) позволяют найти область устойчивости пространственно-периодических вторичных течений вблизи минимума нейтральной поверхности $\text{Gr}(k_x, k_y)$. Однако в данной задаче такое построение в общем виде невозможно – для каждого конкретного набора параметров (чисел Рейнольдса и Прандтля) необходимо строить границы области устойчивости численно. Аналитически можно сформулировать критерии устойчивости регулярных надкритических движений с волновым вектором, соответствующим минимуму нейтральной поверхности $\text{Gr}(k_x, k_y)$. Можно показать, что при выполнении этих условий вблизи минимума нейтральной поверхности существует некоторая область устойчивых вторичных движений. Справедливо и обратное утверждение: если вторичное течение неустойчиво при $k = k_m$, то неустойчивы и любые другие вторичные движения вблизи минимума нейтральной поверхности, где справедливы разложения (2.1)–(2.3).

Уравнения (2.5)–(2.7) имеют два различных решения в виде регулярных валов [1,11]. Первое из них соответствует бегущей наклонной волне

$$c_1^{(0)} = \rho e^{-i\omega t}, \quad c_2^{(0)} = 0, \quad b_\xi^{(0)} = \rho^2, \quad b_\eta^{(0)} = Q\rho^2 \quad (2.9)$$

$$\rho^2 = \frac{\cos \psi}{\cos \psi + \kappa \cos \sigma + \chi Q \cos \zeta} \quad (2.10)$$

$$\omega = \frac{\kappa \sin(\sigma - \psi) + \chi Q \sin(\zeta - \psi)}{\cos \psi + \kappa \cos \sigma + \chi Q \cos \zeta} \quad (2.11)$$

Второе описывает бегущую вдоль оси x волну, модулированную в направлении оси y

$$c_{1,2}^{(0)} = \rho e^{-i\omega t}, \quad b_\xi^{(0)} = 2\rho^2, \quad b_\eta^{(0)} = 0 \quad (2.12)$$

$$\rho^2 = \frac{\cos \psi}{\cos \psi + K \cos \mu + 2\kappa \cos \sigma} \quad (2.13)$$

$$\omega = \frac{K \sin(\mu - \psi) + 2\kappa \sin(\sigma - \psi)}{\cos \psi + K \cos \mu + 2\kappa \cos \sigma} \quad (2.14)$$

В обоих решениях (2.9)–(2.11) и (2.12)–(2.14) градиенты давления выбраны так, чтобы во втором порядке теории возмущений выполнялось условие замкнутости (1.4).

Решение (2.9)–(2.11) возникает мягко, если

$$\cos \psi > 0, \quad \cos \psi + \kappa \cos \sigma + Q\chi \cos \zeta > 0 \quad (2.15)$$

и устойчиво при выполнении условий

$$K \cos \mu > \cos \psi + 2 \chi Q \cos \zeta \quad (2.16)$$

$$A\alpha^4 + B\alpha^3\beta + C\alpha^2\beta^2 + D\alpha\beta^3 + E\beta^4 > 0, \quad \forall \alpha, \beta \quad (2.17)$$

$$A = \cos(\psi - \phi) + \kappa \cos(\sigma - \phi)$$

$$B = \delta \cos(\psi - \Psi) + Q\kappa \cos(\sigma - \phi) + \delta\kappa \cos(\sigma - \Psi) + \chi \cos(\zeta - \phi)$$

$$C = \cos(\psi - \phi) + g \cos(\psi - \phi) + \kappa(g \cos(\sigma - \phi) + \delta Q \cos(\sigma - \Psi)) + \chi(Q \cos(\zeta - \phi) + \delta \cos(\zeta - \Psi))$$

$$D = \delta \cos(\psi - \Psi) + gQ\kappa \cos(\sigma - \phi) + g\chi \cos(\zeta - \phi) + \chi\delta Q \cos(\zeta - \Psi)$$

$$E = g(\cos(\psi - \phi) + Q\chi \cos(\zeta - \phi))$$

При нарушении (2.16) на фоне волны начинают нарастать возмущения, распространяющиеся в противоположную сторону по оси y (возмущения c_2). Условие (2.17) является критерием внутренней устойчивости бегущей волны, т.е. это условие сохраняется и в более простых случаях, когда наиболее опасными являются плоские или спиральные монотонные возмущения. Для плоских возмущений (2.17) приобретает вид

$$A > 0, E > 0, 2\sqrt{AE} + C > 0 \quad (2.18)$$

с коэффициентами A , E и C из (2.17) при учете (2.8). Условия (2.18) можно переписать в том же виде, что и аналогичные условия, приведенные в [1]. Для спиральных монотонных возмущений условия (2.17) можно записать в виде

$$1 + \kappa > 0, \quad 2\sqrt{g(1 + \kappa)} + (1 + g + \kappa g + \delta\chi) > 0$$

где коэффициенты κ , δ , χ могут быть как положительными, так и отрицательными (принято, что $\phi = \sigma = \psi = \zeta = 0$, $\Psi = \zeta = \pi/2$).

При изучении вторичного течения типа косых волн необходимо исследовать (2.17) в наиболее общем случае. Этот анализ может быть проведен лишь численно, при найденных коэффициентах A , B , C , D . Очевидно, что условие (2.17) может быть выполнено, только если выполнены первое и второе неравенства (2.18). Нарушение первого приводит к так называемой (см. [1]) неустойчивости экхаузова типа, т.е. неустойчивости по отношению к возмущениям, модулированным вдоль оси x . При нарушении второго неравенства решение (2.12)–(2.14) неустойчиво по отношению к зигзаговой моде, т.е. по отношению к возмущениям, модулированным вдоль оси y . Если же оба неравенства выполнены, но (2.17) не имеет места, то говорят о косой варикозной моде неустойчивости.

При изучении вторичного течения вида (2.12)–(2.14) обнаружено, что такое решение возникает мягким образом при выполнении условий

$$\cos \psi > 0, \quad \cos \psi + K \cos \mu + 2\kappa \cos \sigma > 0$$

При анализе устойчивости таких возмущений главную роль играет первое слагаемое в уравнениях (2.5)–(2.7), имеющее предыдущий порядок малости. В первом исчезающем порядке разложения по $1/u$, условие устойчивости решения (2.12)–(2.14) совпадает с (2.17). Кроме того, необходимо рассмотреть устойчивость решения (2.12)–(2.14)

по отношению к возмущениям, не зависящим от координаты η . Условия устойчивости для таких возмущений выглядят достаточно громоздко и здесь не приводятся. В предельном случае длинноволновых возмущений (не зависящих также и от координаты ξ) эти условия примут вид

$$\cos \psi - K \cos \mu > 0$$

$$(\cos(\psi - \varphi) + \kappa \cos(\sigma - \varphi))^2 > (K \cos(\mu - \varphi) + \kappa \cos(\sigma - \varphi))^2$$

В ходе численных исследований было обнаружено, что оба вида вторичных течений (2.9)–(2.11) и (2.12)–(2.14) неустойчивы по отношению к экхаузовской моде во всем диапазоне параметров, соответствующем наиболее опасным возмущениям типа косых волн. Результаты слабонелинейного исследования возмущений других типов приведены на фиг. 1 и 2. На этих фигурах точки на соответствующих кривых разделяют области устойчивых и неустойчивых вторичных течений данного типа. Вторичные течения в виде плоских валов устойчивы при $Pr = 0,1$ во всем диапазоне чисел Рейнольдса (фиг. 2. кривая 1), а при $Pr = 0,03$ – при $Re < 170$. Справа от точки на кривой 1 (фиг. 1) плоские валы становятся неустойчивыми, причем кризис вызывается и экхаузовской и зигзаговой модами. Вторичные течения в виде спиральных валов устойчивы лишь при достаточно большой интенсивности акустического воздействия, что, вероятно, связано с перестройкой вида собственного решения по мере увеличения Re . Области устойчивости спиральных валов расположены справа от соответствующих точек (фиг. 1 и 2, кривая 2). Вторичные течения, приведенные на фиг. 4 и 5, являются устойчивыми. Все рассмотренные типы возмущений возникают мягко.

Заключение. Показана возможность стабилизации адвективного течения с помощью акустического воздействия в области малых чисел Прандтля. Подкритических режимов в ходе слабонелинейного исследования задачи не обнаружено. Построены области устойчивости пространственно-периодических вторичных течений различных типов.

Таким образом, на основании работы можно говорить о целесообразности применения акустического воздействия для стабилизации адвективного течения. Однако, для того чтобы применять данные результаты в практических целях, необходимо более подробное теоретическое и согласованное с ним экспериментальное изучение данной задачи. Особенно интересными представляются исследования в области неустойчивости регулярных вторичных течений.

Работа выполнена при частичной поддержке Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант 96-015-96084).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
2. Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M. et al. On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // *Micrograv. Quart.* 1992. V. 2. № 3. P. 141–151.
3. Ben Hadid H., Henry D., Kaddeche S. Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Pt 1. Two-dimensional flow // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 333. P. 23–56.
4. Бирух Р.В., Катанова Т.Н. Влияние высокочастотных вибраций на устойчивость адвективного течения // *Изв. РАН. МЖГ.* 1998. № 1. С. 16–22.
5. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. *Thermal Vibrational Convection*. N.Y. et al.: Wiley, 1998. 358 p.
6. Любимов Д.В. О тепловой конвекции в акустическом поле // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 2. С. 28–36.
7. Lyubimov D.V., Shklyayev S.V. Acoustic field influence on the advective flow stability // *Proc. Joint 10th Europ. and 6th Russian Symp. on the Physical Sciences in Microgravity*, St.-Petersburg, 1997. М.: Inst. Probl. Mech. RAS, 1997. V. 1. P. 245–248.

8. *Stewartson K., Stuart J.T.* A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 48. Pt 3. P. 529–545.
9. *Davey A., Hocking L.M., Stewartson K.* On the nonlinear evolution of three dimensional disturbances in plane Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 63. Pt 3. P. 529–536.
10. *Непомнящий А.А.* Движения типа модулированных волн, возникающие в результате неустойчивости пространственно-периодических вторичных движений // *Гидродинамика: Учен. зап. Перм. ун-та.* № 316. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1974. Вып. 5. С. 105–113.
11. *Моршнева И.В., Юдович В.И.* Возникновение автоколебаний в динамических системах с симметрией и конвекция в вертикальном слое жидкости // *Проблемы динамики вязкой жидкости: Матер. Всесоюз школы, Новосибирск, 1986.* Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986. С. 209–212.
12. *Ниборг В.* Акустические течения // *Физическая акустика Т. 2. Ч.Б* // Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1969. С. 302–377.
13. *Лобов Н.И.* Об устойчивости смешанного конвективного течения в плоском вертикальном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1979. № 6. С. 130–132.
14. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
15. *Бирих Р.В., Рудаков Р.Н.* Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений // *Гидродинамика: Учен. зап. Перм. ун-та.* № 316. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1974. Вып. 5. С. 149–158.
16. *Бирих Р.В., Рудаков Р.Н., Семакин И.Г.* Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. Ч. II. Расчет формы возмущений // *Конвективные течения.* Пермь: Изд-во Перм. пед. ин-та, 1979. С. 58–60.
17. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Пермь

Поступила в редакцию
3.XI.1998