МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2000

УДК 532.516.013.4

© 2000 г. Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, Д.М. КЛИМОВ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛАБОНЕОДНОРОДНЫХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЯХ

Исследована устойчивость деформирования слабонеоднородных вязких сред относительно малых возмущений, при этом и основное течение, и картина налагаемых возмущений трехмерны. Для анализа затухания или роста начальных возмущений выведены достаточные оценки, основанные на применении вариационных неравенств в различных функциональных пространствах (энергетические оценки). Выбор функционального пространства определяет меры отклонения параметров, причем для начальных и текущих параметров эти меры могут быть разными. В качестве невозмущенного процесса выбрано достаточно произвольное неустановившееся движение однородной несжимаемой вязкой жидкости в трехмерной области эйлерова пространства. Возмущениям в начальный момент подвергаются кинематика данного движения, а также плотность и вязкость жидкости, в связи с чем среда названа слабонеоднородной.

На основе развивающихся в последнее время методов интегральных соотношений получены достаточные интегральные оценки невозрастания возмущений в среднеквадратичном смысле (по мере пространства L_2). Скорость нарастания или убывания кинематических возмущений линейно зависит от начальных вариаций кинематики, плотности и вязкости. Приведены иллюстрирующие общий результат примеры.

Одним из наиболее используемых методов анализа устойчивости процесса в механике является метод, основанный на наложении малых возмущений (начальных и постоянно действующих), принадлежащих определенному классу, на параметры этого процесса. Асимптотическое затухание либо невозрастание по выбранной мере возмущений со временем свидетельствуют об устойчивом развитии основного процесса (например, движения или равновесия). Точное и приближенное численно-аналитическое исследование даже линеаризованной начально-краевой задачи в возмущениях сопряжено, как правило, с большими трудностями. Причем они возникают и в случае простых (одномерных, стационарных) основных процессов. Вызваны эти трудности необходимостью учета трехмерности и нестационарности картины возмущений, связанности полей различной природы и другими факторами.

Зачастую для оценки затухания или роста возмущений достаточно иметь некоторые интегральные характеристики основного процесса [1–3]. Таким достаточным оценкам, основанным на применении вариационных неравенств в различных функциональных пространствах (энергетическим оценкам), посвящена публикуемая работа. Выбор функционального пространства определяет меры отклонения параметров, причем для начальных и текущих параметров эти меры могут быть разными [4]. Энергетический анализ развития возмущений, проведенный в достаточно общем виде, может служить начальным этапом исследования процесса перемешивания [5, 6].

1. Постановка задачи возмущенного движения. Пусть в трехмерной области Ω с границей Σ реализуется течение несжимаемой неоднородной вязкой среды с плотностью ρ и динамической вязкостью μ, зависящими от эйлеровых координат и времени t. Параметры течения будем изучать в ортогональной криволинейной системе координат (q^1, q^2, q^3), связанных с эйлеровыми декартовыми координатами соотношениями $x_i = x_i(q^k)$, $i = 1, 2, 3$. Обозначим g_{ij}, $H_{(i)}$, Γ_{ij}^k компоненты фундаментальной матрицы, коэффициенты Ламе и символы Кристоффеля второго рода соответственно для системы (q^k). Индексы, заключенные в скобки, означают, что данная величина формально не является вектором или тензором, поэтому на нее не распространяются правила сокращенного суммирования по двум повторяющимся индексам. Такие величины (в тексте данной работы это будут лишь коэффициенты Ламе) во всех формулах следует считать весовыми функциями. Например, можно записать: $g_{ij} = H_{(j)}^2\delta_{ij}$; $g^{ij} = \delta^{ij} / H_{(j)}^2$. Обозначим также a^i, a_i, a_i^*; b^{ij}, b_{ij}, b_{ij}^* контра-, ковариантные и физические компоненты в системе (q^k), а a_i^d; b_{ij}^d декартовы компоненты вектора **a** и тензора второго ранга **b** соответственно. Символ ∇_i и запятая в индексе, как обычно, означают ковариантное и частное дифференцирование по координате q^i [7].

Включим в базис обезразмеривания характерные линейный размер l области Ω, скорость течения V и плотность $\rho°$ материала, заключенного в Ω; все дальнейшие соотношения выписаны в безразмерном виде. Величины l, V, $\rho°$ постоянны и в каждой конкретной задаче имеют свои значения.

Запишем уравнения движения и неразрывности

$$-p_{,j}g^{ij} + \nabla_j s^{ij} = \rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\rho\sqrt{g}v^k\right)_{,k} = 0, \quad g = \| g_{ij} \| = H_{(1)}H_{(2)}H_{(3)} \tag{1.2}$$

где p – давление, **s** – девиатор тензора напряжений, **v** – скорость.

Так как в данной задаче вязкость является неизвестной функцией эйлеровых координат и времени, то надо выписать еще одно скалярное уравнение для определения этой неизвестной величины. Общие законы механики сплошной среды (1.1), (1.2) уже использованы, поэтому необходимы дополнительные гипотезы, связывающие μ с остальными параметрами задачи. Стандартным путем здесь служат привлечение температуры как новой неизвестной функции, учет уравнения притока тепла и эмпирической зависимости вязкости от температуры.

В [8], где исследуется устойчивость стратифицированных сдвиговых течений несжимаемой вязкой жидкости, избран другой путь. В качестве недостающего выбрано уравнение

$$\frac{d\mu}{dt} \equiv \mu_{,t} + \mu_{,i}v_i = 0 \tag{1.3}$$

описывающее поведение динамической вязкости. Уравнение (1.3) записано по аналогии с уравнением неразрывности (1.2) в случае декартовых координат. Гипотеза (1.3) обосновывается в [8] со ссылкой на допущение Шлихтинга о том, что в стратифицированных жидкостях кинематическую вязкость μ/ρ можно считать практически постоянной. Кроме того, отклонения μ и μ/ρ от их средних по объему значений – величины более высокого порядка малости по сравнению с другими слагаемыми в уравнениях Навье – Стокса. Данное допущение (уравнение (1.3)) бралось за основу и во многих более поздних исследованиях (см., например, обзор [1]).

С учетом условия несжимаемости

$$\nabla_k v^k = 0 \tag{1.4}$$

запишем (1.2) и (1.3) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho,_k v^k = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu,_k v^k = 0 \tag{1.5}$$

Соотношения Навье – Стокса связывают тензор s с тензором скоростей деформаций v

$$s^{ij} = 2\mu v^{ij} \tag{1.6}$$

$$2v_{ij} = (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) \tag{1.7}$$

$$s^{ij} = \mu(g^{ik}\nabla_k v^i + g^{ik}\nabla_k v^j) \tag{1.8}$$

После подстановки (1.8) в (1.1) получим замкнутую в Ω систему шести уравнений (1.1), (1.4), (1.5) относительно трех компонент **v** и трех скалярных функций p, ρ, μ.

Имеют место кинематические граничные и начальные условия

$$\mathbf{v}|_{\Sigma} = \mathbf{V}_0(q^k, t) \tag{1.9}$$

$$t = 0: \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0(q^k), \quad \rho = \rho_0(q^k), \quad \mu = \mu_0(q^k) \tag{1.10}$$

Пусть начальные распределения плотности и вязкости не зависят от координат и времени, т.е. $\rho_0 \equiv 1$, $\mu_0 \equiv 1/\mathrm{Re}$. Тогда решение поставленной начально-краевой задачи при $t > 0$ можно искать в классе однородных течений, т.е. $\rho \equiv 1$, $\mu \equiv 1/\mathrm{Re}$. Будем помечать параметры данного решения индексом градус и называть это решение основным либо невозмущенным течением.

Наряду с основным рассмотрим другое течение с параметрами

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^\circ + \delta\mathbf{v}, \quad p = p^\circ + \delta p, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^\circ + \delta\mathbf{s}, \quad \rho = 1 + \delta\rho, \quad \mu = \frac{1}{\mathrm{Re}} + \delta\mu \tag{1.11}$$

$$(\mathbf{v}^\circ + \delta\mathbf{v})|_{\Sigma} = \mathbf{V}_0 \quad (\delta\mathbf{v}|_{\Sigma} = 0) \tag{1.12}$$

$$\delta\mathbf{v}|_{t=0} = \delta\mathbf{v}_0(q^k), \quad \delta\rho|_{t=0} = \delta\rho_0(q^k), \quad \delta\mu|_{t=0} = \delta\mu_0(q^k) \tag{1.13}$$

Все вариации в (1.11) являются неизвестными функциями координат и времени. Предполагая их малость в любой момент $t > 0$, линеаризуем уравнения (1.1), (1.5), (1.6) в Ω и запишем их в возмущениях. Для сокращения записи знак вариации опускаем. Имеем

$$-p,_j g^{ij} + \nabla_j s^{ij} = \rho\left(\frac{\partial v^{\circ i}}{\partial t} + v^{\circ j}\nabla_j v^{\circ i}\right) + \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^{\circ j}\nabla_j v^i + v^j\nabla_j v^{\circ i} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho,_k v^{\circ k} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu,_k v^{\circ k} = 0 \tag{1.15}$$

$$s^{ij} = 2\mu v^{\circ ij} + \frac{2}{\mathrm{Re}} v^{ij} \tag{1.16}$$

Соотношения (1.4), (1.7) в силу своей линейности не изменятся в возмущениях.

Линеаризованная задача (1.14)–(1.16), (1.4), (1.7) с граничными условиями (1.12) и начальными условиями (1.13) представляет собой задачу о развитии во времени возмущений в слабонеоднородной вязкой жидкости. Если основное течение в некотором смысле регулярно, то невозрастание или тем более асимптотическое затухание возмущений говорят о сохранении регулярности. Неограниченный рост возмущений – необходимое условие наступления перемешивания.

2. Оценки затухания возмущений в $\overset{\circ}{L}_2(\overline{\Omega})$. Пусть каждая компонента v_i^* – элемент пространства $\overset{\circ}{L}_2(\overline{\Omega})$, включающего в себя функции из $L_2(\overline{\Omega})$, равные нулю на Σ. Пусть, кроме того, функции ρ, μ и каждая компонента $(\operatorname{grad}\mu)_i^*$ – элементы $L_2(\overline{\Omega})$.

Умножим обе части уравнения (1.14) на v_i и проинтегрируем по Ω

$$\int_\Omega \frac{\partial v^i}{\partial t} v_i d\Omega = -\int_\Omega v^{\circ j}(\nabla_j v^i)v_i d\Omega - \int_\Omega (\nabla_j v^{\circ i})v^j v_i d\Omega - \tag{2.1}$$

$$-\int_\Omega \rho w^{\circ i} v_i d\Omega - \int_W p_{,j} g^{ij} v_i d\Omega + \int_\Omega (\nabla_j s^{ij})v_i d\Omega$$

$$w^{\circ i} = \partial v^{\circ i} / \partial t + v^{\circ j}\nabla_j v^{\circ i}$$

где $w^{\circ i}$ – контравариантные компоненты вектора ускорения в основном течении.

Преобразуем далее все интегралы, входящие в (2.1):

$$\int_\Omega \frac{\partial v^i}{\partial t} v_i d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial v_i^*}{\partial t} v_i^* d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v_i^* v_i^* d\Omega -$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla_j (v_i^* v_i^* v^j) d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \tag{2.2}$$

$$I_i^2(t) = \int_\Omega (v_i^*)^2 d\Omega \tag{2.3}$$

в силу граничных условий (1.12);

$$-\int_\Omega v^{\circ j}(\nabla_j v^i)v_i d\Omega = -\int_\Omega \nabla_j(v^{\circ j} v^i v_i) d\Omega +$$

$$+\int_\Omega (\nabla_j v^{\circ j})v^i v_i d\Omega + \int_\Omega v^{\circ j} v^i \nabla_j v_i d\Omega \tag{2.4}$$

В силу (1.12) и (1.4) первые два интеграла в правой части (2.4) равны нулю. Кроме того, $(\nabla_j v^i)v_i = g^{ik} v_i \nabla_j v_k = v^i \nabla_j v_i$. Поэтому интеграл в левой части (2.4) равен нулю.

$$\int_\Omega (\nabla_j v^{\circ i})v^j v_i d\Omega = -\int_\Omega (\nabla_j v_k^\circ)v^j v^k d\Omega = -\int_\Omega v_{jk}^\circ v^j v^k d\Omega = -\int_\Omega v_{jk}^\circ v_j^* v_k^* d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant q_{jk}\int_\Omega |v_j^*||v_k^*| d\Omega \leqslant q_{jk} I_j I_k \leqslant \frac{1}{2} q_{jk}(I_j^2 + I_k^2) \leqslant Q(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \tag{2.5}$$

$$q_{ij} = \sup_\Omega |v_{ij}^*|, \quad Q(t) = \max_{\alpha=1,2,3}(q_{\alpha\alpha}(t) + q_{\alpha\beta}(t) + q_{\alpha\gamma}(t)) \tag{2.6}$$

В цепочке (2.5) использовано неравенство Шварца для функций из $\overset{\circ}{L}_2(\overline{\Omega})$.

$$-\int_\Omega \rho w^{\circ i} v_i d\Omega = -\int_\Omega \rho w_i^{\circ *} v_i^* d\Omega \leqslant r_i \int_\Omega \rho |v_i^*| d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant r_i I_\rho I_i \leqslant \frac{1}{2} r_i (I_\rho^2 + I_i^2) \leqslant \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + r_3)I_\rho^2 + \frac{1}{2}R(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \tag{2.7}$$

$$I_\rho^2(t) = \int_\Omega \rho^2 d\Omega, \quad r_i(t) = \sup_\Omega |w_i^{\circ *}|, \quad R(t) = \max_{\alpha=1,2,3} r_\alpha(t) \tag{2.8}$$

$$-\int_\Omega p_{,j} g^{ij} v_i d\Omega = -\int_\Omega \nabla_j (p v^j) d\Omega + \int_\Omega p \nabla_j v^j d\Omega = 0 \tag{2.9}$$

в силу (1.12) и (1.14).

$$\int_\Omega \nabla_j s^{ij} v_i d\Omega = -\int_\Omega s^{ij}\nabla_j v_i d\Omega = -\frac{2}{\mathrm{Re}}\int_\Omega v^{ij}\nabla_j v_i d\Omega - 2\int_\Omega v^{\circ ij}\mu\nabla_j v_i d\Omega =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\Omega g^{ik}g^{jl}\nabla_l v_k \nabla_j v_i d\Omega + 2\int_\Omega (\nabla_j v^{\circ ij})\mu v_i d\Omega + 2\int_\Omega v^{\circ ij}\mu_{,j} v_i d\Omega \tag{2.10}$$

$$\int_\Omega g^{ik}g^{jl}\nabla_l v_k \nabla_j v_i d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial v_i^d}{\partial x_j}\frac{\partial v_i^d}{\partial x_j} d\Omega \geqslant \Lambda_\Omega^2 \int_\Omega v_i^d v_i^d d\Omega = \tag{2.11}$$

$$= \Lambda_\Omega^2 \int_\Omega v_i^* v_i^* d\Omega = \Lambda_\Omega^2 (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2), \quad \Lambda_\Omega^2 = \pi^2(l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})$$

где l_1, l_2, l_3 – ребра параллелепипеда, в который можно вписать область Ω (если Ω в одном или двух направлениях бесконечна, то $\Lambda_\Omega^2 = \pi^2(l_1^{-2} + l_2^{-2})$ или $\Lambda_\Omega^2 = \pi^2 / l_1^2$). Неравенство в цепочке (2.11) есть неравенство Фридрихса для функций из $\overset{\circ}{L}_2(\overline{\Omega})$.

$$\int_\Omega (\nabla_j v^{\circ ij})\mu v_i d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega g^{jk}(\nabla_j \nabla_k v^{\circ i})\mu H_{(i)} v_i^* d\Omega \leqslant \frac{1}{2} s_i \int_\Omega \mu |v_i^*| d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} s_i I_\mu I_i \leqslant \frac{1}{4} s_i (I_\mu^2 + I_i^2) \leqslant \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3) I_\mu^2 + \frac{1}{4} S (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \tag{2.12}$$

$$s_i(t) = \sup_\Omega |g^{jk} H_{(i)} \nabla_j \nabla_k v^{\circ i}| \equiv \sup_\Omega \left| \frac{H_{(i)}}{H_{(j)}^2} \nabla_j \nabla_j v^{\circ i} \right|$$

$$S(t) = \max_{\alpha=1,2,3} s_\alpha(t), \quad I_\mu^2(t) = \int_\Omega \mu^2 d\Omega \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega v^{\circ ij}\mu_{,j} v_i d\Omega = \int_\Omega v_{ij}^{\circ *} \frac{\mu_{,j}}{H_{(j)}} v_i^* d\Omega \leqslant q_{ij} I_{\mu j} I_i \leqslant \frac{1}{2} q_{ij}(I_{\mu j}^2 + I_i^2) \leqslant \tag{2.14}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} Q (I_{\mu 1}^2 + I_{\mu 2}^2 + I_{\mu 3}^2) + \frac{1}{2} Q (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)$$

$$I_{\mu i}^2(t) = \int_\Omega (\operatorname{grad} \mu)_i^{*2} d\Omega \tag{2.15}$$

Подставляя (2.11), (2.12), (2.14) в (2.10), получим

$$\int_\Omega (\nabla_j s^{ij}) v_i d\Omega \leqslant \left(\frac{S}{2} + Q - \frac{\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}} \right) I_i I_i + \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3) I_\mu^2 + Q I_{\mu i} I_{\mu i} \tag{2.16}$$

Соберем оценки (2.2), (2.4), (2.5), (2.7), (2.9), (2.16) в исходное равенство (2.1) и выпишем следующую верхнюю энергетическую оценку величины $d(I_i I_i)/dt$:

$$\frac{d}{dt}(I_i I_i) \leqslant \left(4Q + R + S - \frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}} \right) I_i I_i + (r_1 + r_2 + r_3) I_\rho^2 + (s_1 + s_2 + s_3) I_\mu^2 + 2Q I_{\mu i} I_{\mu i} \tag{2.17}$$

Неизвестные функции времени $I_\rho^2(t)$, $I_\mu^2(t)$, $(I_{\mu i} I_{\mu i})(t)$, входящие в (2.17), необходимо связать с их начальными значениями. Непосредственно из законов сохранения (1.15) следует, что

$$I_\rho^2(t) \equiv I_\rho^2(0) = \int_\Omega (\delta\rho_0)^2 d\Omega, \quad I_\mu^2(t) \equiv I_\mu^2(0) = \int_\Omega (\delta\mu_0)^2 d\Omega \tag{2.18}$$

причем $\delta\rho_0$, $\delta\mu_0$ известны из начальных условий (1.13). Для того чтобы связать $(I_{\mu i}I_{\mu i})(t)$ с $(I_{\mu i}I_{\mu i})(0)$, продифференцируем по q_i второе из соотношений (1.15), а затем умножим его на $\mu_{,i} / H_{(i)}^2$ и просуммируем по i. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\right)+\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}^2}\upsilon^{\circ k}\nabla_i\mu_{,k}+\frac{\mu_{,i}\mu_{,k}}{H_{(i)}^2}\nabla_i\upsilon^{\circ k}=0 \tag{2.19}$$

С другой стороны

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\right)-\frac{1}{H_{(i)}^2}\left(\mu_{,ik}\mu_{,i}-\mu_{,i}\mu_{,i}\frac{H_{(i),k}}{H_{(i)}}\right)\upsilon^{\circ k} \tag{2.20}$$

Подставим (2.20) в (2.19) и после некоторых преобразований будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\right)=-\frac{\mu_{,i}\mu_{,k}}{H_{(i)}^2}\nabla_i\upsilon^{\circ k}-\frac{\mu_i}{H_{(i)}^2}\left(\mu_{,i}\frac{H_{(i),k}}{H_{(i)}}-\mu_{,l}\Gamma_{ik}^l\right)\upsilon^{\circ k}\equiv\xi_{ij}\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\frac{\mu_{,j}}{H_{(j)}} \tag{2.21}$$

$$\xi_{\alpha\alpha}=-\overset{\circ}{\upsilon}{}^*_{\alpha\alpha}+\frac{H_{(\alpha),\beta}}{H_{(\alpha)}H_{(\beta)}}\overset{\circ}{\upsilon}{}^*_{\beta}+\frac{H_{(\alpha),\gamma}}{H_{(\alpha)}H_{(\gamma)}}\overset{\circ}{\upsilon}{}^*_{\gamma},\quad \xi_{\alpha\beta}=-\upsilon^*_{\alpha\beta} \tag{2.22}$$

Интегрируя равенство (2.21) по Ω и вынося аналогично (2.2) полную производную по времени за знак интеграла, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_{\mu i}I_{\mu i})=\int_\Omega\xi_{ij}\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\frac{\mu_{,j}}{H_{(j)}}d\Omega\leqslant\Xi_{ij}\int_\Omega\left|\frac{\mu_{,i}}{H_{(i)}}\right|\left|\frac{\mu_{,j}}{H_{(i)}}\right|d\Omega\leqslant\\ \leqslant\Xi_{ij}I_{\mu i}I_{\mu j}\leqslant\frac{1}{2}\Xi_{ij}(I_{\mu i}^2+I_{\mu j}^2)\leqslant\Xi I_{\mu i}I_{\mu i}\end{gathered} \tag{2.23}$$

$$\Xi_{ij}(t)=\sup_\Omega|\xi_{ij}^*|,\quad \Xi(t)=\max_{\alpha=1,2,3}(\Xi_{\alpha\alpha}(t)+\Xi_{\alpha\beta}(t)+\Xi_{\alpha\gamma}(t)) \tag{2.24}$$

Пусть некоторая функция $f(t)$ дифференцируема на интервале $t\in\,]0;+\infty[$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{df}{dt}\leqslant af+b \tag{2.25}$$

где a и b – известные непрерывные функции времени. Тогда

$$f(t)\leqslant\left[f(0)+\int_0^t b(\tau)e^{-A(\tau)}d\tau\right]e^{A(t)} \tag{2.26}$$

$$A(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau$$

Действительно, умножим обе части (2.25) на положительную функцию $e^{-A(t)}$

$$\frac{d}{dt}\left[fe^{-A(t)}-\int_0^t b(\tau)e^{-A(\tau)}d\tau\right]\leqslant 0$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, не возрастает со временем, т.е. не превышает своего значения при $t=0$, которое равно $f(0)$. Отсюда следует неравенство (2.26), известное как неравенство Гронуолла – Беллмана [9]. Если в неравенствах

(2.25), (2.26) знаки $\leqslant$ одновременно заменить на $\geqslant$, то утверждение останется справедливым.

Воспользуемся неравенством Гронуолла–Беллмана и положим $f(t)=(I_{\mu i}I_{\mu i})(t)$, $a(t)=2\Xi(t)$, $b\equiv 0$. Тогда неравенства (2.23) и (2.25) совпадут, следовательно

$$(I_{\mu i}I_{\mu i})(t)\leqslant(I_{\mu i}I_{\mu i})(0)\exp\left[2\int\limits_0^t \Xi(\tau)d\tau\right] \tag{2.27}$$

Подставим теперь выражения (2.18) и оценку (2.27) в неравенство (2.17)

$$\frac{d}{dt}(I_iI_i)\leqslant\left(4Q+R+S-\frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}\right)I_iI_i+(r_1+r_2+r_3)I_\rho^2(0)+$$

$$+(s_1+s_2+s_3)I_\mu^2(0)+2Q(I_{\mu i}I_{\mu i})(0)\exp\left[2\int\limits_0^t \Xi(\tau)d\tau\right] \tag{2.28}$$

и еще раз воспользуемся неравенством Гронуолла–Беллмана, положив

$$f(t)=(I_iI_i)(t),\quad a(t)=4Q+R+S-2\Lambda_\Omega^2/\mathrm{Re}$$

$$b(t)=(r_1+r_2+r_3)(t)I_\rho^2(0)+(s_1+s_2+s_3)(t)I_\mu^2(0)+2Q(t)(I_{\mu i}I_{\mu i})(0)\exp\left[2\int\limits_0^t \Xi(\tau)d\tau\right]$$

Утверждение (2.26) показывает характер развития кинематических возмущений (возмущений скоростей) в зависимости от их начальных значений, а также начальных возмущений плотности, вязкости и градиента вязкости. Нормы всех перечисленных возмущений выбираются в пространстве $\overset{\circ}{L_2}(\overline{\Omega})$, т.е. затухание и рост понимается в среднеквадратичном смысле.

В частном случае стационарного основного процесса течения величины Q, r_i, s_i, R, S, Λ_Ω, Ξ – константы, так что

$$A(t)=at=\left(4Q+R+S-\frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}\right)t$$

$$b(t)=(r_1+r_2+r_3)I_\rho^2(0)+(s_1+s_2+s_3)I_\mu^2(0)+2Q(I_{\mu i}I_{\mu i})(0)e^{2\Xi t}\equiv b_0+b_1e^{2\Xi t} \tag{2.29}$$

Согласно (2.26) имеем

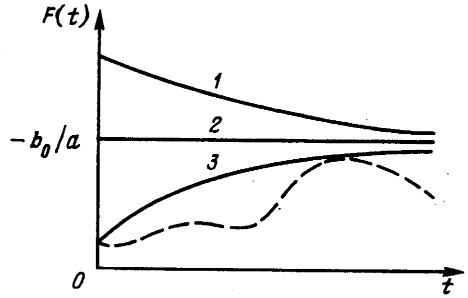
$$(I_iI_i)(t)\leqslant\left[(I_iI_i)(0)+\frac{b_0}{a}\right]e^{at}-\frac{b_0}{a}+\frac{b_1}{2\Xi-a}(a^{2\Xi t}-e^{at}),\quad a\neq 0 \tag{2.30}$$

$$(I_iI_i)(t)\leqslant(I_iI_i)(0)+b_0t+\frac{b_1e^{2\Xi t}}{2\Xi},\quad a=0 \tag{2.31}$$

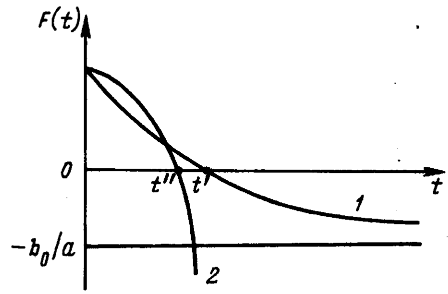
Из (2.30) и (2.31) видно, что для ограниченности возмущений достаточно одновременного выполнения требований $b_1=0$, $a<0$. Первое из них означает, что $(I_{\mu i}I_{\mu i})(0)=0$, т.е. возмущение градиента вязкости отсутствует в начальный и любой другой (согласно (2.27)) моменты времени. Второе дает нижнюю оценку критического числа Рейнольдса Re^*

$$\mathrm{Re}^*>\frac{2\Lambda_\Omega^2}{4Q+R+S}$$

Мажорирующие функции $F(t)=[(I_iI_i)(0)+b_0/a]e^{at}-b_0/a$ изображены на фиг. 1. Возмущения $(I_iI_i)(t)$ заключены между осью абсцисс и $F(t)$ (штриховая линия на



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Мажорирующие функции $F(t)$ в случаях: (I_iI_i) (0) > $-b_0/a$; (I_iI_i) (0) = $-b_0/a$; (I_iI_i) (0) < $-b_0/a$ (кривые *1–3*) и возмущения (I_iI_i) (t) (штриховая линия)

Фиг. 2. Минорирующие функции $F(t)$ в случаях: $b_1 = 0$; $b_1 \neq 0$ (кривые *1, 2*)

фиг. 1). Если $I_{\mu i}I_{\mu i}(0) \neq 0$, то правая часть неравенства (2.30) – экспоненциально возрастающая функция времени независимо от знака a. В этом случае сила оценки (2.30) значительно падает. Она свидетельствует лишь о том, что кинематические возмущения могут нарастать не быстрее, чем известная экспоненциальная функция. Таким образом, можно сделать вывод о том, что в слабонеоднородных вязких течениях начальный градиент вязкости играет дестабилизирующую роль.

Обратимся вновь к интегральному равенству (2.1). В данном разделе все слагаемые в правой части были оценены сверху. Точно таким же образом можно провести оценки снизу. Исключение составляет лишь цепочка (2.11), где использовано неравенство Фридрихса, знак в котором обратить невозможно. Эта цепочка связана с тем, что вязкость основного течения больше нуля. Поэтому ограничимся в данном пункте рассмотрения случая, при котором $\mathrm{Re} = \infty$, но малые возмущения вязкости в (1.11) могут иметь место.

Опуская выкладки, выпишем нижнюю энергетическую оценку величины $d(I_iI_i)/dt$, аналогичную верхней (2.28)

$$\frac{d}{dt}(I_iI_i) \geqslant -(4Q+R+S)I_iI_i - (r_1+r_2+r_3)I_\rho^2(0) - \tag{2.32}$$

$$-(s_1+s_2+s_3)I_\mu^2(0) - 2Q(I_{\mu i}I_{\mu i})(0)\exp\left[2\int_0^t \Xi(\tau)d\tau\right] \tag{2.32}$$

Используем неравенство Гронуолла–Беллмана, положив

$$f(t) = (I_iI_i)(t), \quad a(t) = -(4Q+R+S)$$

$$b(t) = -(r_1+r_2+r_3)(t)I_\rho^2(0) - (s_1+s_2+s_3)(t)I_\mu^2(0) - 2Q(t)(I_{\mu i}I_{\mu i})(0)\exp\left[2\int_0^t \Xi(\tau)d\tau\right]$$

Получим оценку роста во времени кинематических возмущений в зависимости от их начальных значений, а также начальных возмущений плотности, вязкости и градиента вязкости. Как и ранее, продемонстрируем эту оценку на примере стационарного основного процесса. Будем иметь

$$(I_iI_i)(t) \geqslant \left[(I_iI_i)(0) + \frac{b_0}{a}\right]e^{at} - \frac{b_0}{a} + \frac{b_1}{2\Xi - a}(e^{2\Xi t} - e^{at}) \tag{2.33}$$

причем все постоянные a, b_0, b_1 отрицательны. Минорирующие функции $F(t)$ в случае $b_1 = 0$ (кривая 1), соответствующем отсутствию вязкости не только в основном, но и в возмущенном движении, и в случае $b_1 \neq 0$ (кривая 2) приведены на фиг. 2. Нетривиальный смысл оценка (2.33) имеет лишь на ограниченном интервале времени: $0 < t < t'$ для кривой 1 и $0 < t < t''$ для кривой 2.

3. Примеры классических одномерных течений. Применим результаты разд. 2 к исследованию развития возмущений в слабонеоднородных вязких течениях с достаточно простой кинематикой. К числу таких течений относятся одномерные стационарные сдвиговые течения.

Из соотношений (2.29) и неравенства (2.30) следует, что если $b_1 = 0$ и кинематика основного течения такова, что $r_i = 0$, а следовательно, $R = 0$, то начальные возмущения плотности в конечных оценках присутствовать не будут. Если же $b_1 = 0$ и кинематика такова, что $s_i = 0$, а следовательно, $S = 0$, то начальные возмущения вязкости в конечные оценки не войдут.

Плоскопараллельное течение Куэтта. Декартовы компоненты скорости в области $\Omega = \{\mathbf{x}: 0 < x_2 < 1\}$ равны

$$v_1^{\circ *} = x_2, \quad v_2^{\circ *} = v_3^{\circ *} \equiv 0 \tag{3.1}$$

а константы, входящие в (2.29) – (2.31) и вычисленные на основании (3.1), следующие:

$$Q = \Xi = 1/2, \quad r_i = s_i = 0, \quad R = S = 0, \quad \Lambda_\Omega = \pi$$

$$a = 2 - 2\pi^2/\mathrm{Re}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = (I_{\mu i} I_{\mu i})(0)$$

Подставляя их в (2.31), получим искомую оценку. При $b_1 = 0$ неравенство (2.32) имеет вид $\mathrm{Re}^* > \pi^2$.

Течение Пуазейля в плоском слое. Характерная скорость V – скорость в середине слоя. Декартовы компоненты скорости в области $\Omega = \{\mathbf{x}: 0 < x_2 < 1\}$ равны

$$v_1^{\circ *} = 4x_2(1 - x_2), \quad v_2^{\circ *} = v_3^{\circ *} \equiv 0 \tag{3.2}$$

Безразмерный перепад давления вдоль оси x_1 при таком обезразмеривании равен 8/Re. Ненулевые параметры основного течения (3.2), входящие в (2.29) – (2.31), следующие:

$$Q = \Xi = 2, \quad s_1 = S = 8, \quad \Lambda_\Omega = \pi$$

$$a = 16 - 2\pi^2/\mathrm{Re}, \quad b_0 = 8I_\mu^2(0), \quad b_1 = 4(I_{\mu i} I_{\mu i})(0)$$

Если $b_1 = 0$, то достаточное условие ограниченности кинематических возмущений таково: $\mathrm{Re} < \pi^2/8$, т.е. $\mathrm{Re}^* > \pi^2/8$.

Течение Пуазейля в трубе круглого сечения. Характерная скорость V выбрана на оси трубы. В цилиндрической системе координат в области $\Omega = \{\mathbf{x}: 0 < r < 1\}$ компоненты скорости равны

$$v_z^{\circ *} = 1 - r^2, \quad v_r^{\circ *} = v_\theta^{\circ *} \equiv 0 \tag{3.3}$$

Безразмерный перепад давления вдоль оси трубы в данном случае равен 4/Re, а ненулевые параметры основного течения, найденные по кинематике (3.3), следующие:

$$Q = \Xi = 1, \quad s_z = S = 4, \quad \Lambda_\Omega^2 = \pi^2/2$$

$$a = 8 - \pi^2/\mathrm{Re}, \quad b_0 = 4I_\mu^2(0), \quad b_1 = 2(I_{\mu i} I_{\mu i})(0)$$

Подставляя эти константы в (2.30), (2.31), получим оценку развития возмущений в слабонеоднородном течении Пуазейля. Неравенство (2.32) сводится к следующему: $\mathrm{Re}^* > \pi^2/8$.

Круговое течение Куэтта между коаксиальными цилиндрами. Характерные линейный размер l и скорость V – радиус и скорость внутреннего цилиндра; γ – отношение внешнего радиуса к внутреннему ($\gamma > 1$); β – отношение скорости внешнего цилиндра к скорости внутреннего ($-\infty < \beta < \infty$).

В цилиндрических координатах в области $\Omega = \{\mathbf{x}: 1 < r < \gamma\}$ кинематика течения такова

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_{\theta}^{\circ *} = \frac{1}{\gamma^2 - 1}\left[(\gamma\beta - 1)r - \frac{\gamma(\beta - \gamma)}{r}\right] \\
&\upsilon_{r}^{\circ *} = \upsilon_{z}^{\circ *} \equiv 0, \quad \upsilon_{r\theta}^{\circ *} = \frac{\gamma(\beta - \gamma)}{(\gamma^2 - 1)r^2} \qquad (3.4) \\
&w_{r}^{\circ *} = -\frac{1}{(\gamma^2 - 1)^2 r}\left[(\gamma\beta - 1)r - \frac{\gamma(\beta - \gamma)}{r}\right]^2
\end{aligned}
$$

Опуская выкладки, запишем значения констант Q, r_i, s_i, R, S, Ξ, Λ_Ω для кругового течения Куэтта, найденные по кинематике (3.4)

$$Q = \Xi = \frac{\gamma|\beta - \gamma|}{\gamma^2 - 1}, \quad \Lambda_\Omega^2 = \frac{\pi^2}{2\gamma^2}$$

$$r_r = \sup_\Omega |w_r^{\circ *}| = \begin{cases} 1, & \beta^2 < \gamma, \quad r \to 1 \\ \dfrac{\beta^2}{\gamma}, & \beta^2 \geqslant \gamma, \quad r \to \gamma \end{cases}$$

$$s_\theta = \sup_\Omega \left| \frac{H_{(\theta)}}{H_{(j)}^2} \nabla_j \nabla_j \upsilon^{\circ\theta} \right| = \sup_\Omega \left| (\upsilon_\theta^{\circ *})'' + \frac{(\upsilon_\theta^{\circ *})'}{r} - \frac{\upsilon_\theta^{\circ *}}{r^2} \right| = 0,$$

$$r_\theta = r_z = 0, \quad R = r_r, \quad s_r = s_z = S = 0$$

Следовательно

$$a = \frac{4\gamma|\beta - \gamma|}{\gamma^2 - 1} + r_r - \frac{\pi^2}{\gamma^2 \mathrm{Re}}, \quad b_0 = r_r I_\rho^2(0), \quad b_1 = \frac{2\gamma|\beta - \gamma|}{\gamma^2 - 1}(I_{\mu i} I_{\mu i})(0)$$

Нижняя оценка критического числа Рейнольдса в данной задаче выглядит следующим образом:

$$\mathrm{Re}^* > \frac{\pi^2(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2[4\gamma|\beta - \gamma| + r_r(\gamma^2 - 1)]}$$

Нестационарное поступательное перемещение плоского слоя вдоль своей границы. Кинематика поступательного движения вдоль оси x_1 слоя $\Omega = \{\mathbf{x}: 0 < x_2 < 1\}$ следующая

$$\upsilon_1^{\circ *} = V(t), \quad \upsilon_2^{\circ *} = \upsilon_3^{\circ *} \equiv 0 \qquad (3.5)$$

Выпишем ненулевые параметры невозмущенного движения: $r_1 = R = |\dot{V}|$, $\Lambda_\Omega = \pi$. Тогда

$$a(t) = |\dot{V}| - \frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}, \quad A(t) = \int_0^t |\dot{V}(\tau)|\, d\tau - \frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}} t, \quad b(t) = |\dot{V}|\, I_\rho^2(0) \qquad (3.6)$$

В случае постоянства знака $\dot{V}(t)$ (например, разгона: $\dot{V}(t)\geqslant 0$) из (3.6) следует

$$A(t)=V(t)-V(0)-\frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}t,\quad b(t)=\dot{V}I_\rho^2(0)\geqslant 0 \tag{3.7}$$

Согласно (2.26) и (3.7), имеем интегральную оценку

$$(I_iI_i)(t)\leqslant\left[(I_iI_i)(0)+I_\rho^2(0)\int_0^t\dot{V}(\tau)\exp\left(-V(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+V(0)+\frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}\tau\right)d\tau\right]\exp\left(V(t)-V(0)-\frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}t\right) \tag{3.8}$$

с мажорирующей функцией, зависящей от времени.

В заключение рассмотрим случай, когда слой совершает поступательные гармонические колебания: $V(t)=\sin\omega t$, где безразмерная частота ω – число Струхаля, а в качестве характерной скорости выбрана амплитуда скоростей.

Согласно (3.6) найдем функцию $A(t)$

$$A(t)=\left(\int_0^{t_1}-\int_{t_1}^{t_2}+\ldots+(-1)^{k-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}+(-1)^k\int_{t_k}^{t}\right)\dot{V}(\tau)d\tau-\frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}t=$$

$$=2k+(-1)^k\sin\omega t-\frac{2\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}t \tag{3.9}$$

где $t_i=\pi(2i-1)/(2\omega)$, $i\geqslant 1$ – положительные корни уравнения $\cos\omega t=0$, а k – число этих корней на интервале $]0;\,t[$. Заметим, что $A(t)$ непрерывно дифференцируема при $t>0$. Характер роста либо убывания $A(t)$ линейный, поэтому аппроксимируем выражение (3.9) линейной функцией

$$A(t)\sim Ct,\quad C=2\left(\frac{\omega}{\pi}-\frac{\Lambda_\Omega^2}{\mathrm{Re}}\right) \tag{3.10}$$

Подставим (3.6) и (3.10) в интеграл по времени, входящий в (2.26). После преобразований получим

$$\int_0^t b(\tau)e^{-A(\tau)}d\tau=\frac{I_\rho^2(0)}{\omega^2+C^2}\left[C+2\omega(e^{-Ct_1}+\ldots+e^{-Ct_k})+(-1)^k(\omega\sin\omega t-C\cos\omega t)e^{-Ct}\right]=$$

$$=\frac{I_\rho^2(0)}{\omega^2+C^2}\left[C+\frac{\omega}{\operatorname{sh}Ct_1}(1-e^{-k\pi C/\omega})+(-1)^k(\omega\sin\omega t-C\cos\omega t)e^{-Ct}\right],\quad C\neq 0 \tag{3.11}$$

Окончательно имеем следующую оценку развития кинематических возмущений:

$$(I_iI_i)(t)\leqslant(I_iI_i)(0)e^{Ct}+\frac{I_\rho^2(0)}{\omega^2+C^2}\left[(-1)^k(\omega\sin\omega t-C\cos\omega t)+\right.$$

$$\left.+\left(C+\frac{\omega}{\operatorname{sh}Ct_1}\right)e^{Ct}-\frac{\omega}{\operatorname{sh}Ct_1}e^{C(t-k\pi/\omega)}\right] \tag{3.12}$$

Правая часть (3.12) также допускает аппроксимацию монотонной функцией, совпадающей с данной в точках $t=k\pi/\omega$, $k\geqslant 0$

$$(I_iI_i)(t)\leqslant(I_iI_i)(0)e^{Ct}+\frac{I_\rho^2(0)}{\omega^2+C^2}\left(C+\frac{\omega}{\operatorname{sh}Ct_1}\right)(e^{Ct}-1) \tag{3.13}$$

При $C \to 0$ (3.13) превращается в линейное неравенство

$$(I_i I_i)(t) \leq (I_i I_i)(0) + \frac{2t}{\pi} I_\rho^2(0) \tag{3.14}$$

Из анализа (3.13), (3.14) видно, что достаточным условием невозрастания начальных кинематических возмущений является неравенство $C < 0$ или $\omega \mathrm{Re} < \pi \Lambda_\Omega^2$. Так как в исследуемой задаче $\Lambda_\Omega = \pi$, то ω Re < π^3, т.е. произведение чисел Струхаля и Рейнольдса должно быть меньше π^3. В размерных переменных это неравенство означает, что для ограниченности возмущений во времени достаточно, чтобы произведение частоты колебаний на квадрат толщины слоя, отнесенное к кинематической вязкости жидкости, было меньше π^3.

Возмущения, накладываемые на рассмотренные в разд. 3 основные течения, допускаются трехмерными, т.е. на класс возмущений не требуется ограничений типа теоремы Сквайра в теории гидродинамической устойчивости вязкой жидкости [10]. Применительно к течениям с осевой симметрией это означает, что возмущенное движение может быть спиралевидным.

Заключение. Выведенные в пространстве L_2 оценки показывают степень влияния слабых в начальный момент времени неоднородности плотности и вязкости на развитие малых начальных возмущений скорости в течениях первоначально однородной несжимаемой вязкой жидкости. Скорость нарастания или убывания кинематических возмущений линейно зависит от начальных вариаций кинематики, плотности и вязкости. При отсутствии начального градиента вязкости в теле интегральные оценки устойчивости более сильные чем в случае, когда начальная вязкость зависит от координат.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00125 и 99-01-00250) и ФЦП "Интеграция" (проект 426).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.
2. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 176 с.
3. *Георгиевский Д.В.* Общие оценки развития возмущений в трехмерных неоднородных скалярно нелинейных течениях // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 90–97.
4. *Мовчан А.А.* Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел // Arch. Mech. Stosow. 1963. V. 15. № 5. S. 659–682.
5. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Плоское течение вязкопластичных сред в узких каналах с деформируемыми стенками // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 23–31.
6. *Петров А.Г.* Об оптимизации процессов управления вязкопластическим течением в тонком слое с изменяемыми формами границ // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 127–132.
7. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
8. *Drazin P.G.* On stability of parallel flow of an incompressible fluid of variable density and viscosity // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1962. V. 58. № 4. P. 646–661.
9. *Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. Киев: Наук. думка, 1989. 270 с.
10. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.1999