

УДК 532.516:532.59:537.2

© 2000 г. В.Е. ЗАХВАТАЕВ

ДЛИННОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОПЕРЕЧНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассматриваются некоторые аспекты вопроса об устойчивости и характере вторичных режимов плоскопараллельного двухслойного течения Пуазейля вязких диэлектрических жидкостей между горизонтальными электродами, находящимися под постоянной разностью потенциалов. Как показывает линейный анализ, при различии диэлектрических проницаемостей жидкостей электростатическое поле способно индуцировать нарастание возмущений с асимптотически малым волновым числом. В случае, когда длина волны возмущений велика относительно толщины одного из слоев и сравнима по порядку величины с толщиной другого, исследован один из возможных механизмов развития конечных флуктуаций, в рамках которого исходная математическая модель редуцируется к интегриродифференциальному эволюционному уравнению типа Курамото – Сивашинского, описывающему поведение границы раздела жидкостей. Периодические решения полученного уравнения, исследованные численно, ограничены и достаточно разнообразны.

Течения с границами раздела фаз типа жидкость – газ или жидкость – жидкость могут быть неустойчивыми относительно возмущений с достаточно большой длиной волны, так что при этом критическое волновое число равно нулю. Неустойчивость такого рода называют длинноволновой. Длинноволновая неустойчивость межфазной поверхности может быть обусловлена разнообразными физическими факторами, например продольной компонентой силы тяжести [1, 2], силами поверхностного натяжения [3–6], различием параметров жидких фаз, таких, как вязкость [7–11], массовая плотность [9–11], теплопроводность [12]. Проводимый в настоящей работе асимптотический линейный анализ устойчивости межфазной поверхности раздела двух однородных жидких диэлектриков в постоянном поперечном электрическом поле обнаруживает наличие еще одного вида длинноволновой неустойчивости двухслойных течений, связанного с различием диэлектрических проницаемостей жидкостей.

Длинноволновая неустойчивость основного состояния типа механического равновесия часто приводит к разрушению межфазной поверхности на нелинейной стадии развития возмущений (см., например, [13]). В этих случаях стабилизировать границу раздела может организация продольного установившегося течения в качестве основного состояния [4, 5]. Механизм этого явления в общих чертах заключается в следующем [4]. Сдвиг основного течения способствует укрупнению фронтальных областей волн на границе раздела и приводит к переносу энергии от длинноволновых возмущений к коротковолновым. Для возмущений же с достаточно малыми длинами волн энергия обычно рассеивается вследствие работы сил поверхностного натяжения. Этот механизм может привести к стабилизации роста длинноволновых возмущений на нелинейной стадии их развития и весьма многообразной динамике [4, 5, 8, 9]. В связи с этим в работе исследуется один из возможных сценариев развития конечных возмущений двухслойного течения диэлектриков в случае, когда источником энергии

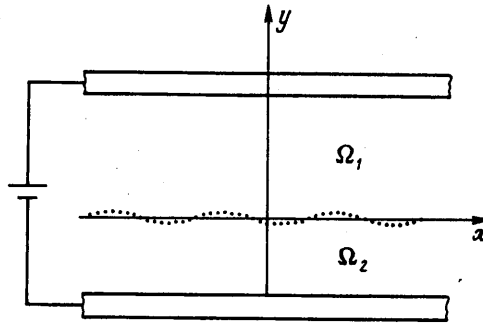


Схема течения

роста длинноволновых флуктуаций является постоянное электрическое поле, нормальное к межфазной поверхности.

1. Исходная математическая модель. Рассмотрим плоскопараллельное двухслойное течение Пуазейля несмешивающихся диэлектрических жидкостей между плоскими горизонтальными электродами, находящимися под постоянной разностью потенциалов Φ^* (фигура). Предположим следующее: обе жидкости представляют собой вязкие, несжимаемые однородные и изотропные диэлектрики с равной температурой и одинаковыми массовыми плотностями. Сторонние заряды на поверхности раздела и в объемах жидкостей отсутствуют. Electroды – идеальные проводники.

Введем прямоугольные декартовы координаты x и y так, что ось y направлена противоположно вектору силы тяжести (ограничимся двумерным случаем). В процессе движения жидкости занимают области $\Omega_1 = \{H(x, t) < y < d_1, -\infty < x < \infty\}$ и $\Omega_2 = \{-d_2 < y < H(x, t), -\infty < x < \infty\}$, где t – время, d_1, d_2 – положительные постоянные (см. схему течения). Условимся обозначать индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к областям Ω_1 и Ω_2 . Пусть U_j, V_j – x - и y -компонент вектора скорости, P'_j – давление, Φ_j – потенциал электрического поля в области Ω_j ($j = 1, 2$).

Течение характеризуется следующими постоянными физическими параметрами: ρ – плотность, μ_j – динамические вязкости, γ_j – диэлектрические проницаемости жидкостей, g – величина ускорения силы тяжести, σ – коэффициент поверхностного натяжения границы раздела жидкостей. Основное течение, устойчивость которого рассматривается, индуцируется постоянным градиентом давления вдоль оси x , равным $-F^*, F^* > 0$.

Пусть U^* – характерная скорость течения. В качестве масштабных множителей выберем: d_1 – для пространственных переменных, Φ^* – для потенциала электрического поля, U^* – для скорости, d_1/U^* – для времени, ρU^{*2} – для модифицированного давления, определенного как $P_j = P'_j + \rho g y$. Далее все переменные считаются безразмерными.

Для описания рассматриваемой физической системы используем систему уравнений и граничных условий электрогидродинамики, соответствующую квазистатическому приближению [14]. В каждой из областей Ω_j должны выполняться следующие уравнения:

$$U_{jt} + U_j U_{jx} + V_j U_{jy} = -P_{jx} + \frac{1}{\text{Re}_j} (U_{jxx} + U_{jyy}) \quad (1.1)$$

$$V_{jt} + U_j V_{jx} + V_j V_{jy} = -P_{jy} + \frac{1}{\text{Re}_j} (V_{jxx} + V_{jyy}) \quad (1.2)$$

$$U_{jx} + V_{jy} = 0, \quad \Phi_{jxx} + \Phi_{jyy} = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия на электродах имеют вид

$$y = 1: \Phi_1 = 1, U_1 = 0, V_1 = 0; y = -n: \Phi_2 = 0, U_2 = 0, V_2 = 0 \quad (1.4)$$

При $y = H(x, t)$ выполняются следующие соотношения:

$$[\chi(\Phi_y - H_x \Phi_x)] = 0 \quad (1.5)$$

$$[\Phi] = 0; [U] = 0, [V] = 0 \quad (1.6)$$

$$- \text{Re}_1[P](1 + H_x^2) + 2[M\{V_y - H_x(U_y + V_x) + H_x^2 U_x\}] + \\ + [\chi\{\Phi_y^2 + H_x^2 \Phi_x^2 - 2H_x \Phi_x \Phi_y - \frac{1}{2}(1 + H_x^2)(\Phi_y^2 + \Phi_x^2)\}] = -\text{We} \frac{H_{xx}}{(1 + H_x^2)^{1/2}} \quad (1.7)$$

$$[M\{2H_x V_y + (1 - H_x^2)(U_y + V_x) - 2H_x U_x\}] = 0 \quad (1.8)$$

$$H_t + U_2 H_x = V_2 \quad (1.9)$$

$$\text{Re}_j = \frac{\rho U^* d_1}{\mu_j}; \quad \text{We} = \frac{\sigma}{\mu_1 U^*}; \quad \chi_j = \frac{\gamma_j \Phi^{*2}}{4\pi d_1 \mu_1 U^*}; \quad M_j = \frac{\mu_j}{\mu_1}; \quad n = \frac{d_2}{d_1}$$

Здесь $[(\cdot)] \equiv (\cdot)_1 - (\cdot)_2$ — скачок величины на межфазной поверхности; нижние буквенные индексы используются для обозначения частных производных.

Соотношения (1.5)–(1.9) выражают непрерывность на границе раздела нормальной к межфазной поверхности компоненты вектора электрической индукции, потенциала, вектора скорости, нормальных и касательных напряжений и кинематическое условие непротекания соответственно.

2. Асимптотический линейный анализ устойчивости. Рассмотрим вопрос об устойчивости относительно длинноволновых возмущений основного состояния, определяемого следующим решением задачи (1.1)–(1.9):

$$H_0 = 0, \quad \Phi_{01} = \frac{1 + qy}{1 + q}, \quad \Phi_{02} = \frac{1 + y}{1 + q} \\ U_{0j} = b_j y^2 + a_j y + 1, \quad V_{0j} = 0, \quad P_{0jx} = -F, \quad P_{0jy} = 0 \quad (2.1)$$

$$a_1 = \frac{m-1}{2}, \quad a_2 = \frac{m-1}{2m}, \quad b_1 = -\frac{m+1}{2}, \quad b_2 = -\frac{m+1}{2m}$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad q = \frac{\chi_2}{\chi_1}, \quad F = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\rho F^* d_1^3}$$

Здесь в качестве масштабного множителя для скорости выбирается скорость основного течения на невозмущенной межфазной поверхности $U^* = F^* d_1^2 / (\mu_1 + \mu_2)$. Предполагается, что вязкости жидкостей различны ($m \neq 1$). Чтобы избежать громоздких выкладок, ограничимся случаем, когда толщины слоев равны ($n = 1$).

Аналогичная задача в отсутствие электрического поля была рассмотрена в [7] и ниже используется методика, разработанная в [2, 7].

Положим

$$U_j = U_{0j} + u_j, \quad V_j = v_j, \quad P_j = P_{0j} + p_j \\ \Phi_j = \Phi_{0j} + \phi_j, \quad H = h \quad (2.2)$$

$$u_j = \Psi_{jy}, \quad v_j = -\Psi_{jx}$$

Рассмотрим возмущения вида нормальных мод

$$(\psi, p, \varphi) = (\Psi(y), p(y), \Phi(y)) \exp i\alpha(x - ct)$$

где α – волновое число, c – комплексная величина; при $\text{Im}(c) > 0$ возмущения нарастают.

Линеаризация уравнений и условий (1.1) – (1.9) на решении (2.1) дает задачу на собственные значения, которая состоит в нахождении значений c при фиксированных значениях определяющих параметров.

Линеаризуя уравнения Навье – Стокса (1.1), (1.2) и исключая давление, получаем уравнение Орра – Зоммерфельда

$$\psi_j^{IV} - 2\alpha^2 \psi_j'' + \alpha^4 \psi_j = i\alpha \text{Re}_j \{ (U_{0j} - c)(\psi_j'' - \alpha^2 \psi_j) - U_{0j}'' \psi_j \} \quad (2.3)$$

где штрихами обозначаются производные по y .

Из (1.3) имеем

$$\varphi_j'' = \alpha^2 \varphi_j \quad (2.4)$$

Из кинематического условия (1.9) находим

$$h = \frac{\Psi_2(0)}{c^*} \exp i\alpha(x - ct), \quad c^* = c - U_0(0) = c - 1.$$

Граничные условия (1.4) – (1.8) принимают вид

$$y = 1: \psi_1 = 0, \quad \psi_1' = 0, \quad \varphi_1 = 0; \quad y = -1: \psi_2 = 0, \quad \psi_2' = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad (2.5)$$

$$y = 0: \chi_1 \varphi_1' = \chi_2 \varphi_2', \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\Psi_2}{c^*} \frac{1 - q}{1 + q} \quad (2.6)$$

$$\psi_1' - \psi_2' = \frac{\Psi_2}{c^*} (a_2 - a_1), \quad \psi_1 = \psi_2 \quad (2.7)$$

$$\psi_1'' + \alpha^2 \psi_1 = m \{ \psi_2'' + \alpha^2 \psi_2 \} \quad (2.8)$$

$$m(\psi_2''' - 3\alpha^2 \psi_2') - (\psi_1''' - 3\alpha^2 \psi_1') + i\alpha \frac{\chi_2}{1 + q} (\varphi_1' - \varphi_2') = i\alpha^3 \text{We} \frac{\Psi_2}{c^*} \quad (2.9)$$

Следуя [2.7], представим искомые величины ψ_j , φ_j , c в виде рядов по волновому числу α , которое считается асимптотически малым ($\alpha \ll 1$), поскольку рассматривается устойчивость относительно длинноволновых возмущений:

$$c = c^{(0)} + \alpha c^{(1)} + \dots, \quad \psi_j = \psi_j^{(0)} + \alpha \psi_j^{(1)} + \dots, \quad \varphi_j = \varphi_j^{(0)} + \alpha \varphi_j^{(1)} + \dots \quad (2.10)$$

После подстановки (2.10) в (2.3) – (2.9) получим последовательность аппроксимационных задач в порядках малости $O(1)$, $O(\alpha)$ и т.д. Предположим, что $\text{Re}_j = O(1)$, $\chi_j = O(1)$.

В порядке $O(1)$ имеем

$$c^{(0)} = 1 + \frac{2(m-1)^2}{m^2 + 14m + 1} \quad (2.11)$$

$$\varphi_1^{(0)} = \frac{q(q-1)}{(c^{(0)} - 1)(1+q)^2} (y-1), \quad \varphi_2^{(0)} = \frac{q-1}{(c^{(0)} - 1)(1+q)^2} (1+y)$$

$$\psi_1^{(0)} = 1 + B_1 y + C_1 y^2 + D_1 y^3, \quad \psi_2^{(0)} = 1 + B_2 y + C_2 y^2 + D_2 y^3$$

где значения коэффициентов B_j , C_j , D_j определяются формулами (45) из [7]. Значение $c^{(0)}$, определяемое (2.11), совпадает со значением, полученным в [7, формула (46)].

Рассматривая задачу в следующем порядке $O(\alpha)$, находим

$$c^{(1)} = c_E^{(1)} + c_Y^{(1)} \quad (2.12)$$

$$c_E^{(1)} = \frac{i\chi_2(1-q)^2(m+1)}{3(1+q)^3(m^2+14m+1)}, \quad c_Y^{(1)} = 8i \operatorname{Re}_1 H_3 \quad (2.13)$$

значение величины $H_3(m)$ определяется формулой (52) в [7].

При $q \neq 1$ величина $\operatorname{Im}(c_E^{(1)}) > 0$. Таким образом, если диэлектрические проницаемости жидкостей различны, поперечное однородное электростатическое поле оказывает дестабилизирующее влияние на динамику межфазной поверхности, способствуя подкачке энергии к длинноволновым возмущениям. Согласно [7], $\operatorname{Im}(c_Y^{(1)}) > 0$. Следовательно, основное состояние (2.1) в исследуемом случае всегда неустойчиво.

Однако если поверхностное натяжение достаточно велико ($We = O(\alpha^{-2})$), то его влияние на динамику также проявляется в порядке $O(\alpha)$. В этом случае в правую часть (2.12) следует добавить слагаемое

$$-i\alpha^2 We \frac{m+1}{3(m^2+14m+1)}$$

т.е. поверхностное натяжение стабилизирует поведение границы раздела.

Длинноволновая неустойчивость, связанная с различием диэлектрических проницаемостей жидкостей в электрическом поле, проявляет себя и в случае $\operatorname{Re}_j = O(\alpha)$, когда $c_Y^{(1)} = 0$.

3. Один из возможных сценариев слабонелинейной эволюции возмущений. Для того чтобы выяснить, может ли рост малых возмущений, вызываемый влиянием электрического поля, стабилизироваться на нелинейной стадии, проведем слабонелинейный анализ устойчивости. Наличие длинноволновой неустойчивости делает естественным использование длинноволнового приближения. Следуя подходу [9] и используя длинноволновое приближение, редуцируем исходную задачу к единственному эволюционному уравнению, описывающему поведение границы раздела жидкостей. В этом случае длина волны возмущения должна быть велика по сравнению с толщиной обоих слоев жидкостей. Аналогично [4–6] рассмотрим более общую ситуацию, когда характерный пространственный масштаб вторичных режимов велик по сравнению с толщиной лишь одного из слоев и сравним по величине с толщиной другого. Однако при этом налагаются дополнительные условия на порядки параметров и делается ряд допущений.

При проведении редукции исходной задачи связь между порядками пространственных и временных масштабов и амплитуд возмущений определяется не из асимптотического линейного анализа, как при использовании длинноволнового приближения [9, 10, 15], но постулируется на основе соображений физического характера, отвечающих в определенной своей части приближениям Стокса и смазочного слоя, применяемых в слое (будем называть его тонким), толщина которого мала по сравнению с толщиной другого слоя [4–6, 15]. Обычно в задачах, соответствующих указанным приближениям, возмущения давления в тонком слое и, следовательно, флуктуации нормальных напряжений на межфазной поверхности сравнительно велики и устанавливают масштабы возмущений остальных величин.

Исследуемый механизм эволюции возмущений предполагает наличие в главном порядке связи возмущений электрического поля, давления и деформации межфазной поверхности через условие баланса нормальных напряжений на границе раздела. Полагаем, что как плотности, так и вязкости жидкостей одинаковы: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. В рамках проводимого анализа в основном сдвиговом течении в объеме тонкого слоя инерциальный эффект не учитывается [15]; инерциальные эффекты могут быть

учтены в смежном слое, если вязкости жидкостей различны [5], но для изучения рассматриваемого механизма это не имеет принципиального значения.

Положим $n \equiv \varepsilon \ll 1$. Введем масштабный множитель для скорости, равный максимальному значению скорости основного течения $U^* = (d_1 + d_2)^2 F^* / (8\mu)$. Основное состояние тогда определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} H_0 &= 0, \quad \Phi_{01} = \frac{\varepsilon + qy}{\varepsilon + q}, \quad \Phi_{02} = \frac{\varepsilon + y}{\varepsilon + q} \\ U_{0j} &= 4 \frac{(1-y)(y+\varepsilon)}{1+\varepsilon^2}, \quad V_{0j} = 0, \quad P_{0jx} = -F, \quad P_{0jy} = 0 \\ F &= \frac{64d_1\mu^2}{\rho F^* (d_1 + d_2)^4}, \quad q = \frac{\chi_2}{\chi_1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассмотрим случай, когда порядки определяющих параметров установлены следующим образом:

$$Re = O(\varepsilon^r), \quad q = O(\varepsilon), \quad \chi_1 = O(\varepsilon), \quad We = O(\varepsilon^{-1}) \quad (3.2)$$

где $r = 0$ либо 1 .

Предположим, что межфазная поверхность деформируется на величину порядка δ : $h = \delta\eta(x, t)$, $0 < \delta \ll 1$ (обозначения для возмущений приведены в (2.2)). Связь между порядками параметров δ и ε установим в дальнейшем.

Рассмотрим случай, когда характерные изменения гидродинамических возмущений в тонком слое в поперечном направлении осуществляются на расстояниях, малых по сравнению с продольным направлением. Поскольку $\varphi_2 = 0$ при $y = -\varepsilon$ и в то же время величина φ_2 при $y = h$ определяется деформацией межфазной поверхности и гидродинамическими возмущениями, можно ожидать, что в тонком слое характерные изменения возмущений электрического поля в поперечном направлении происходят на тех же масштабах, что и для гидродинамических величин. В области тонкого слоя Ω_2 удобно использовать новую поперечную координату z : $y = \varepsilon(z - 1)$ ($0 \leq z \leq 1$), а в смежной области Ω_1 – координату ζ : $\zeta = 1 - y$ ($0 \leq \zeta \leq 1$).

В случае, когда поверхностное натяжение достаточно велико, возмущение межфазной границы может быть взаимно связано с возмущением давления в области Ω_2 через баланс нормальных напряжений (условие (1.7)):

$$p_2 \sim \varepsilon^{-1-r}\delta \quad (Re p_2 \sim We h_{xx})$$

Порядки величин u_2 и v_2 устанавливаем из уравнений Навье – Стокса и неразрывности

$$u_2 \sim Re \varepsilon^2 p_2 \sim \varepsilon\delta, \quad v_2 \sim \varepsilon u_2 \sim \varepsilon^2\delta$$

Связь порядков гидродинамических возмущений в областях Ω_1 и Ω_2 может определяться условием непрерывности скорости на межфазной поверхности: $u_1 \sim u_2$, как вытекает из (1.6) и (3.1). Принимая во внимание (1.1) и (1.3), естественно считать, что $p_1 \sim \varepsilon^{-r}u_1$, $v_1 \sim u_1$.

Развитие возмущений может характеризоваться несколькими временными масштабами

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \dots$$

Кинематическое условие (1.9) в главном порядке имеет вид $h_T + 4\varepsilon h_x = 0$. Зависимость от T можно исключить переходом в систему координат, движущуюся вдоль оси x со скоростью 4ε . В следующем порядке имеем

$$h_\tau + 4hh_x = v_2 \quad (z = 1)$$

Отсюда устанавливается связь между порядками величин δ и ε : $\delta \sim \varepsilon^2$. Оценки, аналогичные приведенным выше, использовались, в частности, в [4, 5].

Предположим, что $\varphi_1 \sim \varphi_2$. В рамках сделанных предположений возмущения электрического поля сопряжены в главном порядке с возмущением давления и силами поверхностного натяжения в балансе нормальных напряжений на межфазной поверхности, если $\varphi_2 = O(\varepsilon)$.

Согласно приведенным выше оценкам положим

$$\begin{aligned} p_1 &= O(\varepsilon^{3-r}), \quad v_1 = O(\varepsilon^3), \quad u_1 = O(\varepsilon^3), \quad \varphi_1 = \varepsilon\Phi \\ p_2 &= \varepsilon^{1-r} p, \quad v_2 = \varepsilon^4 v, \quad u_2 = \varepsilon^3 u, \quad \varphi_2 = \varepsilon\varphi, \quad h = \varepsilon^2 \eta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь попутно введены обозначения для нормированных возмущений.

С учетом (3.1) – (3.3) исходная математическая модель (1.1) – (1.9) редуцируется к системе

$$0 < z < 1: \quad -p_x + \frac{1}{\text{Re}^*} u_{zz} = 0, \quad p_z = 0, \quad u_x + v_z = 0, \quad \varphi_{zz} = 0 \quad (3.4)$$

$$z = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \varphi = 0 \quad (3.5)$$

$$0 < \zeta < 1: \quad \Phi_{xx} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0 \quad (3.6)$$

$$\zeta = 0: \quad \Phi = 0 \quad (3.7)$$

$$z = 1, \quad \zeta = 1: \quad -\Phi_\zeta = q^* \varphi_z, \quad \Phi - \varphi = \frac{\eta}{1 + q^*} \quad (3.8)$$

$$\text{Re}^* p = -\text{We}^* \eta_{xx} + \frac{\chi_2^*}{1 + q^*} \varphi_z, \quad u_z = 0 \quad (3.9)$$

$$\eta_\tau + 4\eta\eta_x = \nu \quad (3.10)$$

$$\text{Re}^* = \varepsilon^{-r} \text{Re}, \quad \text{We}^* = \varepsilon \text{We}, \quad q^* = \varepsilon^{-1} q, \quad \chi_2^* = \varepsilon^{-2} \chi_2$$

Из (3.4) – (3.10) можно получить нетривиальное эволюционное уравнение, описывающее поведение межфазной поверхности, прообразом которого служит редуцированное кинематическое условие (3.10). Решая задачу (3.4) – (3.9), выразим функцию v в правой части (3.10) как функционал от η . В рассматриваемом случае нет необходимости определять эволюцию гидродинамических возмущений в области Ω_1 , поэтому соответствующие уравнения не выписываем.

Система (3.4) совместно с условиями (3.5) имеет решение

$$u = \text{Re}^*(p_x z^2 / 2 + az), \quad v = -\text{Re}^*(p_{xx} z^3 / 6 + a_x z^2 / 2), \quad \varphi = fz$$

где $p = p(x, \tau)$, $a = a(x, \tau)$, $f = f(x, \tau)$. Отсюда и из (3.9) находим

$$v(z=1) = -\frac{1}{3} \left(\text{We}^* \eta_{xxx} - \frac{\chi_2^*}{1 + q^*} f_{xx} \right) \quad (3.11)$$

Используя преобразование Фурье $F(\Phi)$, из (3.6), (3.7) получим

$$F(\Phi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \exp(-i\alpha x) dx = C(\alpha) \{ \exp(\alpha\zeta) - \exp(-\alpha\zeta) \}$$

Тогда из (3.8), находим

$$f(x, \tau) = F^{-1} \left\{ \frac{-\alpha F(\eta)}{(1 + q^*)(\alpha + q^* \text{th } \alpha)} \right\} \quad (3.12)$$

Подстановка (3.11), (3.12) в (3.10) приводит к окончательному результату

$$\eta_\tau + 4\eta\eta_x + \frac{We^*}{3}\eta_{xxx} - \frac{\chi_2^*}{6\pi(1+q^*)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^3}{\alpha + q^* \operatorname{th} \alpha} \eta(\xi, \tau) \exp\{i\alpha(x - \xi)\} d\xi d\alpha = 0 \quad (3.13)$$

Аналогичным образом может быть рассмотрено двухслойное течение между коаксиальными цилиндрическими электродами. Можно показать, что в этом случае в амплитудном уравнении появится новое слагаемое вида $\operatorname{const} \eta_{xx}$, связанное с дестабилизирующим влиянием (преимущественно на длинноволновые возмущения) поверхностного натяжения в цилиндрической геометрии, а подынтегральное ядро будет выражено через модифицированные функции Бесселя первого и второго порядков.

Несложно обобщить проведенный анализ на случай, когда динамические вязкости жидкостей различны и эволюция гидродинамических возмущений в области Ω_1 оказывает влияние на динамику в тонком слое. В этой ситуации в эволюционное уравнение должно быть внесено дополнительное нелокальное слагаемое, отражающее развитие гидродинамических флуктуаций в области Ω_1 , как это показано для случая цилиндрической геометрии в [5].

4. Численное исследование периодических режимов. Рассмотрим L^* – периодические решения уравнения (3.13). С помощью следующей замены переменных задача может быть записана в виде

$$(x, \xi) \rightarrow (x, \xi)L, \quad \alpha \rightarrow \alpha L^{-1}, \quad \tau \rightarrow t \frac{3L^4}{We^*}$$

$$\eta \rightarrow H \frac{We^*}{12L^3} \left(L = \frac{L^*}{2\pi} \right)$$

$$H_t + HH_x + H_{xxx} - \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\alpha) H(\xi, t) \exp\{i\alpha(x - \xi)\} d\xi d\alpha = 0 \quad (4.1)$$

$$E(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\alpha + q^* L \operatorname{th}(\alpha/L)}, \quad \mu = \frac{\chi_2^* L^2}{We^*(1+q^*)^2} > 0$$

$$H(0, t) = H(2\pi, t), \quad H(x, 0) = H^{(0)}(x) \quad (4.2)$$

Линеаризация уравнения (4.1) на основном состоянии $H \equiv 0$ дает дисперсионное соотношение (для возмущений $\exp(\lambda t + ikx)$)

$$\lambda = \mu E(k) - k^4 \quad (4.3)$$

Представим функцию H в виде ряда Фурье

$$H = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k \exp(ikx), \quad H_{-k} = \bar{H}_k \quad (4.4)$$

(черта означает операцию комплексного сопряжения). Не уменьшая общности, положим $H_0 = 0$. Умножим на H уравнение (4.1) и проинтегрируем по периоду

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H\|^2 = 4\pi\mu \sum_{k=1}^{\infty} E(k) |H_k|^2 - \|H_{xx}\|^2 \quad (4.5)$$

где $\|H\|$ – обычная норма в пространстве Лебега L_2 .

Из (4.3), (4.5) видно, что в рассмотренном случае влияние электрического поля сводится к подкачке энергии преимущественно к длинноволновым возмущениям, в то время как поверхностное натяжение является диссипативным фактором, доминирующим в области коротковолновых фурье-компонент. Механизм стабилизации длинно-

волновых возмущений заключается в том, что их энергия последовательно переносится квадратично-нелинейным взаимодействием мод в коротковолновую область, где рассеивается.

Периодические режимы в рамках модели (4.1) весьма разнообразны и по существу аналогичны динамике, описываемой уравнением Курамото – Сивашинского

$$H_t + HH_x + \nu H_{xx} + H_{xxx} = 0 \quad (4.6)$$

линейное дисперсионное соотношение для которого имеет вид

$$\lambda = \nu k^2 - k^4 \quad (4.7)$$

Данная аналогия легко объясняется сходством структуры дисперсионных соотношений (4.3) и (4.7) (отметим, что четная функция $E(k)$ при $k > 0$ монотонно возрастает, причем найдутся такие постоянные $C_1, C_2 > 0$, что $C_1 k^2 < E(k) < C_2 k^2$).

Важным параметром, определяющим в данном случае характер динамики, является (конечное) число линейно неустойчивых фурье-компонент в представлении (4.4). Оно определяется как целая часть корня k_0 уравнения $\lambda(k) = 0$. Для уравнения (4.6)

$k_0 = k'_0 = \nu^{1/2}$. При $k_0 < 1$ все фурье-гармоники линейно устойчивы и в этом случае, как показывают численные расчеты, предельным режимом является однородное состояние $H \equiv 0$. С возрастанием значения μ растет и число неустойчивых фурье-компонент в периодических решениях уравнения (4.1), что приводит к постепенному усложнению наблюдаемой динамики и в конечном счете к нерегулярному поведению.

Задача (4.1), (4.2) исследовалась методом Галеркина. Решение аппроксимировалось конечной суммой (4.4). Полученная в результате система обыкновенных дифференциальных уравнений численно интегрировалась методом Рунге – Кутты – Мерсона четвертого порядка с контролируемой точностью (порядка 10^{-6}) на каждом варьируемом шаге интегрирования. Число фурье-компонент N обычно выбиралось, исходя из условия $N \sim 4k_0$. Начальные данные задавались в виде

$$H^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^m (\sin(jx) + \cos(jx)), \quad m = 3; 4$$

Приведем ряд результатов численного изучения предельных режимов, описываемых в рамках модели (4.1), (4.2).

Наиболее общее свойство динамики заключается в ограниченности периодических решений уравнения (4.1). Таким образом, учитывая $\delta \ll \varepsilon$, можно предположить, что в рассмотренном случае межфазная граница раздела будет устойчива.

Проведенные численные расчеты в случае $L = 1, q = 1$ позволили наблюдать следующие типы предельных режимов.

1. Аттракторы вида неподвижных точек, имеющих лакунарное фурье-представление:

$$H_j(x) = a_{1j} \cos(jx) + \varepsilon a_{2j} \cos(2jx) + \varepsilon^2 a_{3j} \cos(3jx) + \dots$$

$$a_{ij} = O(1), \quad \varepsilon = O(10^{-1})$$

(с точностью до начальной фазы). Предельные режимы H_j , в которых доминирующей является j -я фурье-компонента, называют j -модальными установившимися состояниями [16]. (Приблизительные границы интервалов, где наблюдаются аттракторы данного типа: $1,85 < \mu < 4,95$ – унимодальные состояния $H_1(x)$, $7,9 < \mu < 10,2$ – бимодальные состояния $H_2(x)$, $17,5 < \mu < 20,7$ – тримодальные состояния $H_3(x)$.)

2. Стационарные бегущие волны, соответствующие в силу условий периодичности аттракторам типа предельных циклов. Существует как минимум два вида бегущих волн: в первом случае доминирующей является первая фурье-компонента (приблизительно в интервале $4,97 < \mu < 6,27$), во втором – наблюдаются волновые образования с двумя основными гребнями на периоде (например, при $\mu = 16,6$).

3. Регулярные пульсации, представляющие собой сравнительно быстрые переходы со сдвигом фазы на $\pi/2$ между установившимися состояниями, инвариантными относительно π -трансляций, чередующиеся с состояниями, когда траектория в фазовом пространстве длительное время находится вблизи соответствующей неподвижной точки H_2 . Предельные режимы данного типа можно интерпретировать как некоторую гомоклиническую структуру [16, 17]. Данный вид поведения наблюдается приблизительно при $6,3 < \mu < 7,8$ и при $11,2 < \mu < 14,4$.

4. Регулярные и (или) хаотические осцилляции, в частности инвариантные торы ($10,3 < \mu < 11,1$; $14,5 < \mu < 17,4$). В этой же области существуют и аттракторы типа стационарных бегущих волн.

5. При достаточно большой величине μ наблюдаемое поведение является нерегулярным, но при этом характеризуется наличием пространственно когерентных структур.

Как показывают результаты расчетов и их сравнение с данными об аттракторах уравнения Курамото – Сивашинского [16–18], имеет место как полное подобие типов динамики и последовательностей бифуркаций, так и соответствие в пространстве параметров k_0 и k'_0 границ областей существования аттракторов одинаковых типов для уравнений (4.1) и (4.6).

Заключение. Проведенный анализ обнаруживает новый вид длинноволновой неустойчивости двухслойных течений вязких жидкостей, обусловленной наличием нормального к межфазной поверхности электростатического поля и различием диэлектрических проницаемостей фаз. Сдвиговой характер течения в окрестности границы раздела жидкостей может являться причиной стабилизации роста возмущений на нелинейной стадии эволюции. При этом динамика рассматриваемой физической системы характеризуется большим разнообразием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benjamin T.B. Wave formation in laminar flow down a inclined plane // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. Pt 6. P. 554–574.
2. Yih C.-S. Stability of liquid flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 3. P. 321–334.
3. Goren S.L. The instability of an annular thread of fluid // J. Fluid Mech. 1962. V. 12. Pt 2. P. 309–319.
4. Frenkel A.L., Babchin A.J., Levich B.G. et al. Annular flows can keep unstable films from breakup: nonlinear saturation of capillary instability // J. Colloid and Interface Sci. 1987. V. 115. № 1. P. 225–233.
5. Papageorgiou D.T., Maldarelli C., Rumschitzki D.S. Nonlinear interfacial stability of core-annular film flows // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. № 3. P. 340–352.
6. Georgiou E., Maldarelli C., Papageorgiou D.T., Rumschitzki D.S. An asymptotic theory for the linear stability of a core-annular flow in the thin annular limit // J. Fluid Mech. 1992. V. 243. P. 653–677.
7. Yih C.-S. Instability due to viscosity stratification // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt. 2. P. 337–352.
8. Shlang T., Sivashinsky G.I., Babchin A.J., Frenkel A.L. Irregular wavy flow due to viscous stratification // J. Physique. 1985. V. 46. № 6. P. 863–866.
9. Hooper A.P., Grimshaw R. Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 1. P. 37–45.
10. Charru F., Fabre J. Long waves at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 3. P. 1223–1235.
11. Tilley B.S., Davis S.H., Bankoff S.G. Linear stability theory of two-layer fluid flow in an inclined channel // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 12. P. 3906–3922.
12. Smith M.K. The long-wave interfacial instability of two liquid layers stratified by thermal conductivity in an inclined channel // Phys. Fluids. 1995. V. 7. № 12. P. 3000–3012.
13. Hammond P.S. Nonlinear adjustment of a thin annular film of viscous fluid surrounding a thread of another within a circular cylindrical pipe // J. Fluid Mech. 1983. V. 137. P. 363–384.
14. Melcher J.R., Taylor G.I. Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses // Annu. Rev. Fluid Mech. 1969. V. 1. P. 111–146.

15. *Chen K.P., Joseph D.D.* Long wave and lubrication theories for core – annular flow // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. № 11. P. 2672–2679.
16. *Hyman J.M., Nicolaenko B.* The Kuramoto – Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems // *Physica D*. 1986. V. 18. № 1. P. 113–126.
17. *Kevrekidis I.G., Nicolaenko B., Scovel J.C.* Back in the saddle again: a computer assisted study of the Kuramoto – Sivashinsky equation // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. V. 50. № 3. P. 760–790.
18. *Hyman J.M., Nicolaenko B., Zaleski S.* Order and complexity in the Kuramoto – Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces // *Physica D*. 1986. V. 23. № 1/3. P. 265–292.

Красноярск

Поступила в редакцию
5.V.1997