

УДК 532.59

© 2000 г. А.Т. ИЛЬЧЕВ

**УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ
И ДИССИПАЦИЕЙ**

(обзор)

Изложены полученные к настоящему времени результаты, относящиеся к теории нелинейных волн в диспергирующих и диссипативных средах. Основное внимание уделяется уединенным волнам малой амплитуды: классификации типов уединенных волн, условиям их существования, особенностям эволюции локализованных возмущений, связанным с наличием уединенных волн различных типов, а также вопросам существования нелинейных волн, локализованных по одному из направлений, при повышении пространственной размерности (спонтанное нарушение размерности). В качестве примеров диспергирующих и диссипативных сред, допускающих плоские уединенные волны различных типов, рассмотрены холодная бесстолкновительная плазма, идеальная несжимаемая жидкость конечной глубины под упругой пластиной и с поверхностным натяжением, жидкость в быстроосциллирующих прямоугольных сосудах (резонанс Фарадея). Примеры спонтанного нарушения размерности рассмотрены для обобщенного уравнения Кадомцева – Петвиашвили.

Уединенные волны – солитоноподобные решения нелинейных уравнений, описывающих волновые процессы в диспергирующих и диссипативных средах – привлекают значительный интерес в качестве объектов как математического, так и физического исследования. Получение решений типа уединенных волн сложных нелинейных уравнений стимулировало развитие разнообразных методов мощного математического формализма, в том числе знаменитого метода обратной задачи теории рассеяния – нелинейного аналога фурье-анализа [31]. В то же время представляет интерес выявление общих физических свойств нестационарных волновых процессов в диспергирующих и диссипативных средах, допускающих существование разных типов уединенных волн. Некоторые из упомянутых свойств будут отражены в настоящей статье.

Полная система уравнений, фиксирующая ту или иную модель диспергирующей среды, как правило, очень сложна для исследования нестационарных волновых процессов. Поэтому очень часто используются так называемые модельные уравнения, которые формально выводятся из полной системы методом многих масштабов. Принято считать, что модельные уравнения аппроксимируют полную систему. Строгое доказательство этого факта представляет собой очень сложную математическую задачу, до сих пор не решенную.

Широкое применение для описания распространения длинных волн малой, но конечной амплитуды в большем числе диспергирующих сред имеет уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ) [55]. Уравнение КдВ имеет солитонные решения [25], которые описывают классические уединенные волны, монотонно затухающие на бесконечности. При эволюции достаточно "крупных" локализованных возмущений последние для достаточно больших времен превращаются в последовательность солитонов. Примером среды, когда уравнение КдВ адекватно описывает решения типа бе-

гущих волн малой амплитуды, служит тяжелая идеальная несжимаемая жидкость конечной глубины без дополнительных поверхностных эффектов [11, 24, 56]. Однако для большого количества диспергирующих сред, где в малоамплитудном и длинноволновом приближении часто используется уравнение КдВ, волновые процессы, описываемые полной системой уравнений, обнаруживают ряд дополнительных важных свойств. К этим свойствам относятся излучение локализованным возмущением коротковолновой периодической волны и модуляционная неустойчивость периодических волн. Упомянутые эффекты присутствуют, например, в моделях идеальной тяжелой несжимаемой жидкости конечной глубины с поверхностным натяжением [4, 20, 48, 49, 64] или под упругой пластиной [22, 23, 42], моделирующей ледовый покров, непрерывно стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины [3], двуслойной идеальной несжимаемой жидкости с конечными глубинами слоев [7, 16, 19, 61, 65], холодной квазинейтральной бесстолкновительной плазмы [9, 35, 38, 39].

Процессы излучения и модуляционной неустойчивости периодических волн обусловлены наличием двух новых типов уединенных волн по сравнению с известным типом солитонов уравнения КдВ – классических уединенных волн. Это обобщенные уединенные волны – бегущие волны, подобные уединенной волне, но имеющие периодическую асимптотику на бесконечности, а также уединенные волны с осциллирующей структурой, называемые далее уединенными волнами-пакетами.

Наличие среди решений уединенных волн трех упомянутых типов демонстрирует рассматриваемое в обзоре неинтегрируемое (в смысле метода обратной задачи теории рассеяния) [33] обобщенное уравнение КдВ, впервые полученное в [53]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0, \quad \gamma = \pm 1 \quad (0.1)$$

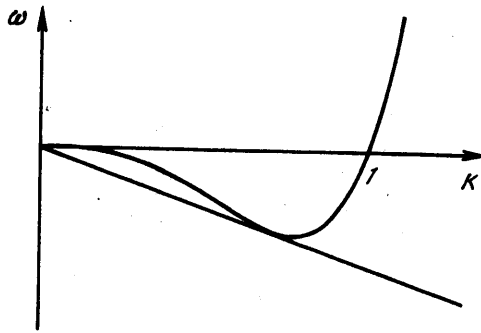
Уравнение (0.1) выводится в рамках асимптотической процедуры многих масштабов для описания распространения слабонелинейных длинных волн при учете дисперсии, обусловленной дополнительными факторами, например наличием капиллярных эффектов на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины [30], при числах Бонда $b \sim 1/3$ ($\gamma = 1$ соответствует $b < 1/3$, а $\gamma = -1$ – условию $b > 1/3$), на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под ледовым покровом [59], в холодной квазинейтральной бесстолкновительной плазме для углов наклона невозмущенного магнитного поля к направлению распространения волны, близких к критическому [52].

В [27, 30, 63] доказано существование симметричных решений типа бегущих волн при $\gamma = 1$, которые стремятся к солитонам уравнения КдВ при исчезающей дополнительной дисперсии. Однако эти бегущие волны не являются уединенными волнами, затухающими на пространственной бесконечности. Форма этих волн, представляющих собой обобщенные уединенные волны, определена численно [17]. Они возникают в результате нелинейного резонанса классической уединенной волны и периодической волны.

Обобщенные уединенные волны не могут быть результатом эволюции локализованных возмущений. Тем не менее в этом случае распад локализованных по пространству (имеющих конечную энергию) возмущений сопровождается излучением периодической волны с периодом, равным периоду осциллирующей составляющей обобщенной уединенной волны.

Наличие уединенных волн-пакетов связано с наличием в системе модуляционной неустойчивости периодических волн.

Уравнение (0.1) являет собой частный пример общей системы дифференциальных уравнений, для которой в [36, 37] сформулированы достаточные условия существования уединенных волн трех упомянутых типов для изотропных диспергирующих сред.



Фиг. 1. Дисперсионная кривая $\omega = -k^3 + k^5$ уравнения Кавахары второго рода и прямая, касательная к ней в точке 1:1 резонанса

В типичной ситуации классические уединенные волны возникают как бифуркации из нулевого волнового числа спектра линейных волн. Это означает, что существует ветвь дисперсионного соотношения, проходящая через нуль, такая, что ее график и графики всех остальных ветвей лежат по одну сторону от касательной к графику этой ветви в нуле. Если же такой ветви не существует, то в случае общего положения классическая уединенная волна отсутствует. При этом в ряде случаев возможно образование нового объекта – обобщенной уединенной волны. И наконец, третий тип уединенной волны – волна-пакет возникает в диспергирующих средах в результате так называемого 1:1 резонанса [50], т.е. при равенстве фазовой скорости длинной волны и групповой скорости короткой волны.

Все сказанное можно проиллюстрировать на примере уравнения (0.1). Будем различать два случая качественно разного поведения решения уравнения (0.1). В случае $\gamma = -1$ (уравнение (0.1) первого рода) имеется семейство решений типа классических уединенных волн (в том числе и для малых скоростей). Очевидно, что график единственной дисперсионной кривой $\omega = -k^3 - k^5$, $k > 0$, лежит по одну сторону от касательной к нему в точке $k = 0$. В этом случае амплитуда уединенной волны положительна и бифуркация, приводящая к появлению классических уединенных волн, соответствует увеличению угла наклона касательной, совпадающей с осью k . Для случая $\gamma = 1$ (уравнение (0.1) второго рода) кроме точки касания $k = 0$ для $k > 0$ имеется еще точка пересечения оси k с графиком в точке $k = 1$ (фиг. 1). В данном случае классической уединенной волны не существует, а вместо нее имеет место обобщенная уединенная волна.

На дисперсионной кривой, изображенной на фиг. 1 для $\gamma = 1$, существует точка касания с прямой, проходящей через нуль. Это точка 1:1 резонанса, соответствующая появлению многогорбых уединенных волн (уединенных волн-пакетов) при скоростях меньших, чем тангенс угла наклона касательной в данной точке. Уединенные волны-пакеты в низшем приближении по малому параметру – амплитуде волны – являются солитонными решениями соответствующего нелинейного уравнения Шредингера при равенстве скорости огибающей (групповой скорости) и фазовой скорости монохроматической волны, распространяющейся под огибающей [28, 43].

Важным универсальным свойством уравнения (0.1) второго рода является существование точки перегиба у дисперсионной кривой. Это свойство при дополнительных условиях на нелинейные члены [36, 37] обуславливает возникновение как обобщенных уединенных волн, так и уединенных волн-пакетов в общей изотропной диспергирующей среде [37].

Условие наличия периодической составляющей у обобщенной уединенной волны в общем случае сформулировано в [57]. Однако проверка этого условия представляет конструктивные трудности в каждом конкретном случае. В обобщенных уединенных

волнах уравнения (0.1) второго рода определенно присутствует коротковолновая составляющая с асимптотикой [63]

$$u = D_0 \pi \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right) \sin x + O\left[\sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right)\right], \quad x \rightarrow \infty$$

$$D_0 \neq 0, \quad \mu \ll 1 \tag{0.2}$$

Уравнение (0.1) описывает случай общего положения: почти любое обратимое уравнение пятого порядка, допускающее решение типа обобщенных уединенных волн, имеет периодическую составляющую с асимптотикой типа (0.2) и своим $D_0 \neq 0$. Лишь при дискретном множестве значений коэффициентов этих уравнений периодическая составляющая пропадает и обобщенные уединенные волны оказываются классическими (см. [63]). В этом случае эти уравнения являются интегрируемыми. Решение в виде классических уединенных волн для уравнений пятого порядка, таким образом, структурно неустойчиво: любое малое изменение коэффициентов уравнения приводит к возникновению периодической составляющей, а значит, к распаду классических уединенных волн, при этом время распада существенно зависит от амплитуды уединенных волн [14, 63].

В настоящей работе ограничимся лишь схематическим изложением метода получения уединенных волн трех упомянутых типов, опускаем детали вычислений и строгие математические формулировки с доказательствами. Подробности могут быть найдены в [37, 47–49, 54, 60, 67].

Кроме уединенных волн трех упомянутых типов известны еще так называемые "темные уединенные волны" – не локализованные бегущие волны, образованные в результате нелинейного резонанса боры с периодической волной. Своё название эти волны получили из нелинейной оптики вследствие того, что интенсивность волны в окрестности точки симметрии минимальна. Темные уединенные волны в отличие от уединенных волн-пакетов отвечают случаю, когда периодические волны в диспергирующей среде являются модуляционно устойчивыми.

Рассмотрены также примеры, иллюстрирующие формирование трехмерных бегущих волн при увеличении пространственной размерности – явление, получившее в литературе название "спонтанное нарушение размерности". В результате спонтанного нарушения размерности, в частности, могут возникать трехмерные волны, представляющие собой уединенные волны по одному из направлений и периодические по другому.

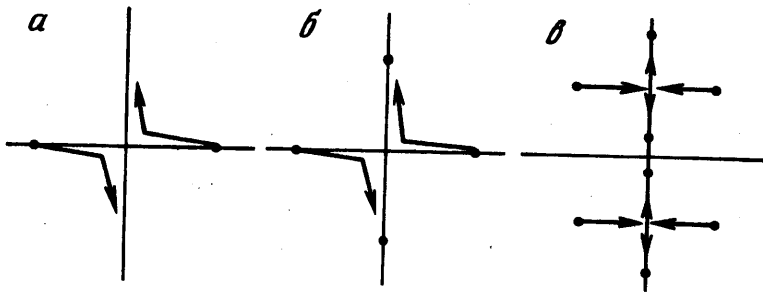
1. Типы бифуркаций. Рассмотрим семейства бегущих волн, являющихся бифуркацией из состояния покоя системы в окрестности этого состояния, т.е. волны малой амплитуды. Предполагается, что исследуемые системы уравнений в частных производных являются обратимыми, т.е. инвариантными относительно отражения времени и динамической координаты. Обратимость – естественное свойство задач, где направление распространения волн не ограничено и не имеет предпочтительной ориентации и фиксированного начала координат. Основные этапы исследования рассматриваемых задач сводятся к следующим.

1. Определение критического значения параметра бифуркации, т.е. значения физического параметра задачи $\lambda = \lambda_0$, при малом возмущении μ которого наряду с нулевым решением система имеет нетривиальное волновое решение.

2. Запись системы уравнений, описывающих бегущие волны в виде конечномерной или бесконечномерной динамической системы

$$\dot{w} = G(\lambda_0)w + F(\mu, w) \tag{1.1}$$

где $G(\cdot)$ – матрица или линейный оператор (в случае бесконечномерной динамической системы), а $F(\mu, w)$ – нелинейная функция своих аргументов. Точка обозначает производную по времени.



Фиг. 2. Динамика собственных значений оператора $G(\lambda)$, приходящих на мнимую ось при прохождении параметра μ через ноль для простого резонанса (а), резонанса длинной и короткой волн (б), 1:1 резонанса (в)

водную по пространственной координате, которая играет роль динамической переменной.

3. Исследование линейного оператора $G(\lambda_0)$. Бифуркации возникают при выходе собственных значений $G(\lambda)$ на мнимую ось. В силу обратимости системы уравнений собственные значения $G(\lambda)$ выходят на мнимую ось парами и являются симметричными относительно мнимой и вещественной осей. Будут рассмотрены следующие бифуркации.

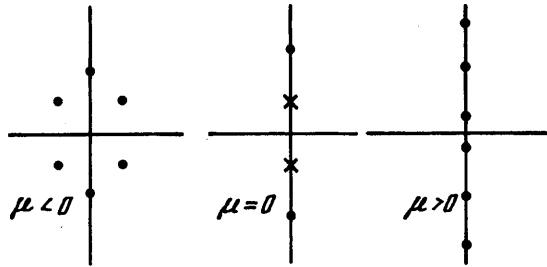
Оператор $G(\lambda_0)$ имеет двукратное нулевое собственное значение. При изменении λ в окрестности λ_0 собственные значения приходят с действительной оси и расходятся по мнимой. Классические уединенные волны могут возникнуть при тех $\lambda = \lambda_0 + \mu$, при которых пара собственных значений лежит на действительной оси (фиг. 2, а).

Резонанс длинной и короткой волны. Оператор $G(\lambda_0)$ имеет двукратное нулевое собственное значение и пару сопряженных мнимых собственных значений. Движение собственных значений через ноль происходит аналогичным предыдущему случаю образом, пара мнимых собственных значений всегда остается на мнимой оси. Другая пара приходит с действительной оси и, пройдя через ноль при $\lambda = \lambda_0$, расходится по мнимой оси. Обобщенные уединенные волны, будучи продуктом нелинейного резонанса уединенной и периодической волны, могут возникнуть при тех $\lambda = \lambda_0 + \mu$, при которых на мнимой оси лежит лишь пара собственных значений (фиг. 2, б).

При 1 : 1 резонансе бифуркация происходит из волнового числа, где фазовая скорость равна групповой. Оператор $G(\lambda_0)$ имеет две пары ненулевых кратных мнимых собственных значений. При изменении λ в окрестности λ_0 эти значения попарно приходят из комплексной плоскости на мнимую ось, а затем по ней расходятся. Уединенная волна-пакет может существовать при тех $\lambda = \lambda_0 + \mu$, при которых собственные значения еще не пришли на мнимую ось (фиг. 2, в).

Бифуркация сложного 1 : 1 резонанса [29], играющая важную роль при спонтанном нарушении размерности. Оператор $G(\lambda_0)$ имеет одну пару ненулевых простых и две пары ненулевых кратных значений. При изменении λ в окрестности λ_0 кратные собственные значения приходят из комплексной плоскости на мнимую ось, а затем по ней расходятся (фиг. 3).

4. Проекция динамической системы на центральное многообразие (понижение порядка динамической системы). Формально проекция на центральное многообразие осуществляется при помощи разбиения неизвестных функций на сумму двух слагаемых. Одно из этих слагаемых представляет собой линейную комбинацию присоединенных и собственных векторов, соответствующих центральному спектру (мнимым собственным значениям), а другое является малой следующего порядка по амплитуде волн и представляет собой функцию от первого слагаемого. Уравнение на коэффициенты упомянутой линейной комбинации является системой пониженного



Фиг. 3. Динамика мнимых собственных значений оператора $G(\lambda)$ при изменении параметра μ для сложного 1:1 резонанса

порядка. В случае бесконечномерной динамической системы указанное понижение порядка возможно лишь при выполнении дополнительных условий, которым должен удовлетворять оператор $G(\lambda_0)$ [54, 60, 67].

5. Исследование потока на центральном многообразии. Проводится асимптотическими методами, в частности приближением уравнения на центральном многообразии квазинормальными формами. Уравнения в квазинормальной форме, отвечающие всем четырем перечисленным типам бифуркаций, являются интегрируемыми [29, 49, 50].

6. Доказательство грубости решений типа уединенной волны асимптотических уравнений, т.е. доказательство того факта, что решения полной системы, приближаемые решениями асимптотической, являются также уединенными волнами соответствующих типов. Эти доказательства, как правило, сводятся к использованию теоремы о неявной функции в различных формах. Для бифуркаций, изображенных на фиг. 2, такие доказательства известны для всех типов бегущих волн, кроме случая решений типа классических уединенных волн, которыми обладает система уравнений в квазинормальной форме для бифуркации (фиг. 2, б): в случае общего положения эти уединенные волны соответствуют решениям типа обобщенных уединенных волн полной системы. (см., например, [49]).

2. Уединенные волны асимптотического уравнения (0.1). Уравнение (0.1) имеет универсальный характер, описывая волновые движения в длинноволновом малоамплитудном пределе в ряде диспергирующих сред. Динамическая система, описывающая волны, бегущие со скоростью V , имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u_1, & \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= u_3, & \dot{u}_3 &= -\gamma u_2 + \frac{1}{2} u^2 - V u \end{aligned} \quad (2.1)$$

где точка обозначает производную по $x - Vt$. В дальнейшем сохраним обозначение x за этой комбинацией. Система (2.1) имеет один внешний параметр – скорость V , которая в данном случае играет роль параметра λ в (1.1). Будем предполагать, что $V = V_0 + \mu$, где V_0 – критическое значение скорости, при котором происходит бифуркация, и μ – мало.

Динамическая система (2.1) может быть записана в виде (1.1) [8]. В зависимости от критического значения V_0 , реализуются все три типа бифуркаций, изображенных на фиг. 2.

При $\gamma = -1$, $V_0 = 0$ среди собственных значений матрицы $G(0)$ лишь ноль второго порядка лежит на мнимой оси. При $\mu > 0$ нулевое собственное значение $G(V)$ переходит на действительную ось в виде двух простых собственных значений, симметричных относительно мнимой оси (фиг. 2, а). Система (2.1) допускает решения в виде классических уединенных волн. Эти волны являются волнами повышения уровня и

существуют при $\mu > 0$

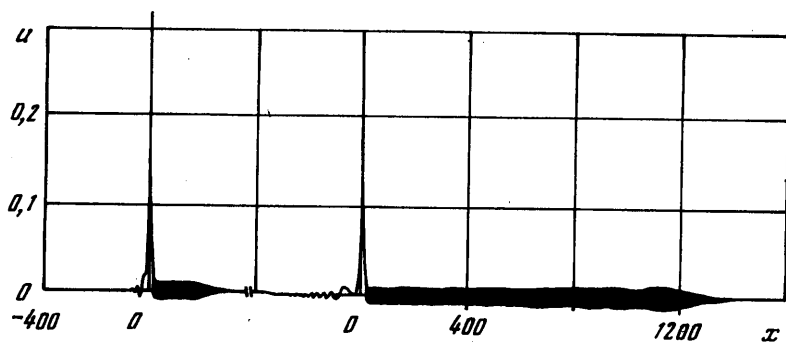
$$u = 3\mu \operatorname{ch}^{-2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{2}} x \right) + O(\mu^2) \quad (2.2)$$

Наличие решений уравнения (0.1) первого рода в виде классических уединенных волн (2.2), а также их динамическая устойчивость [32, 46] свидетельствуют о том, что уединенные волны являются конечным продуктом эволюции локализованных возмущений. Результаты численных расчетов, представленные в [43], демонстрируют выделение уединенной волны из локализованного образования в процессе эволюции.

При $\gamma = 1, V_0 = 0$ все собственные значения $G(0)$ лежат на мнимой оси: ноль второго порядка и пара симметричных относительно нуля чисто мнимых чисел. При $\mu > 0$ собственные значения из нуля расходятся по действительной оси (фиг. 2, б). Уравнение (0.1) второго рода имеет среди решений типа бегущих волн также решения, главная часть которых дается формулой (0.1). Однако в отличие от уравнения (0.1) первого рода решения (2.2) имеют асимптотику (0.2) на бесконечности. Асимптотика на минус бесконечности определяется из условий четности решения. Значение константы $D_0 \approx 119,82\pi$ было впервые подсчитано в [63] при помощи метода сращиваемых асимптотических разложений, а в [2] определено при помощи асимптотического анализа в спектральной k -плоскости. В [17] были подтверждены результаты [63] на основе точных численных методов. В статье [14] указано, что существование стационарных несимметричных обобщенных уединенных волн невозможно. Последнее заключение означает, что любое локализованное решение должно излучать энергию в форме осциллирующих периодических волн. Для малых μ амплитуда в низшем порядке равна удвоенной амплитуде периодической компоненты симметричной обобщенной уединенной волны [14]. Следовательно, время распада уединенной волны малой амплитуды экспоненциально велико. Когда же величина амплитуды уединенной волны умеренна, амплитуда излучаемой волны достаточно велика, что показывают численные расчеты [8, 14], следовательно, излучение существенным образом влияет на процесс распада локализованных возмущений и, в частности, уединенных волн в форме (2.2).

На фиг. 4 показана форма решения u , в начальный момент времени задаваемой главной частью (2.2) в системе отсчета, движущейся со скоростью $\mu > 0$, в разные моменты времени для достаточно больших амплитуд излучающего солитона.

При $\gamma = 1, V_0 = -1/4$ множество собственных значений матрицы $G(-1/4)$ состоит из двух пар двукратных мнимых собственных значений. При $\mu < 0$ собственные значения



Фиг. 4. Распад уединенной волны (3.2) в силу уравнения (0.1) второго рода за счет излучения короткой периодической волны. Форма решения u дана в системе отсчета, движущейся со скоростью $\mu > 0$ в моменты времени $t = 110$ и $560, \mu = 0,1$

уходят с мнимой оси в комплексную плоскость (фиг. 2, в). Уравнение (0.1) при $\mu < 0$ имеет убывающее на бесконечности решение вида

$$u = \pm 2 \sqrt{2 \frac{\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{q_1 \mu} x) \cos qx + O(|\mu|^{3/2}), \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1 = -\frac{1}{2}, \quad q_2 = \frac{19}{9} \quad (2.3)$$

В [28] было показано, что для волновых движений, описываемых уравнением (0.1) второго рода, огибающие периодических волн удовлетворяют нелинейному уравнению Шредингера

$$i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} + \omega'(k) \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) + \varepsilon \frac{\omega''(k)}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \varepsilon \Delta |\Psi|^2 \Psi = 0$$

$$\Delta = \frac{25k^2 - 3}{6k(-3 + 5k^2)(1 - 5k^2)}, \quad \omega = -k^3 + k^5, \quad \varepsilon^2 = -\mu \quad (2.4)$$

Штрих в (2.4) обозначает дифференцирование по волновому числу k . В окрестности волнового числа $k = k_0 = 1/\sqrt{2}$ периодические решения уравнения (2.4) модуляционно неустойчивы, т.е. подвержены самофокусировке, распадаясь на нестационарные локализованные волны-пакеты, представляющие собой модулированные монохроматические волны, движущиеся под огибающей с фазовой скоростью, огибающая при этом распространяется с групповой скоростью. В случае совпадения фазовой и групповой скоростей, что имеет место только при $k = k_0$, локализованные волны-пакеты становятся бегущими уединенными волнами-пакетами, форма которых дается формулой (2.3) [8, 14].

3. Уединенные волны в холодной плазме. При одномерных движениях холодной квазинейтральной бесстолкновительной плазмы подлежит определению зависимость от времени t и пространственной координаты x следующих величин [52]: плотности числа частиц n , вектора магнитной индукции $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ и скорости ионов $\mathbf{v} = (u, v, w)$, обезразмеренных при помощи плотности невозмущенной плазмы n_0 , невозмущенного вектора напряженности магнитного поля \mathbf{B}_0 и альфвеновской скорости $V_A = |\mathbf{B}_0| / \sqrt{4\pi n_0(m_i + m_e)}$ соответственно. Здесь m_i, m_e – массы ионов и электронов. Параметры дисперсии R_i, R_e выражаются формулами $R_i = \omega_{ic}/\omega_0, R_e = \omega_{ec}/\omega_0$, где ω_{ic} – ионная, ω_{ec} – электронная циклотронные частоты, ω_0 – характерная частота явления. Для одномерных движений холодной плазмы B_x – компонента магнитного поля – является абсолютной постоянной. Переменные $n, u, v, w, B_x, B_y, B_z$ в состоянии покоя имеют значения 1, 0, 0, 0, $\cos \theta, \sin \theta, 0$ соответственно. Здесь θ – угол между вектором магнитной индукции и направлением движения волн, которое совпадает с осью x . Скорость электронов и компоненты электрического поля могут быть исключены из уравнений поля и определены через остальные характеристики холодной плазмы [51]. Дисперсионная кривая в рассматриваемом случае состоит из двух ветвей [52] и для малых волновых чисел k (больших длин волн) фазовые скорости $V_{ph}^{\pm}(k)$ имеют вид

$$V_{ph}^+(k) = 1 - \frac{1}{2R_i R_e} \left\{ 1 - \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \right\} k^2 + \dots$$

$$V_{ph}^-(k) = \cos \theta \left[1 - \frac{1}{2R_i R_e} \left\{ 1 + \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \right\} k^2 + \dots \right]$$

Здесь $V_{ph}^+(k)$ отвечает магнитозвуковым волнам, и $V_{ph}^-(k)$ – альфвеновским волнам.

В пределе $k \rightarrow 0$ получим $V_{ph}^+ = V_{ph}^+(0) = 1$, $V_{ph}^- = V_{ph}^-(0) = \cos \theta$. Система уравнений, описывающих бегущие волны в холодной плазме, имеет один свободный параметр V – скорость бегущей волны. Будем предполагать, что V мало отличается от значения V_0 , при котором происходит бифуркация.

Рассмотрим бегущие волны, распространяющиеся со скоростями, мало отличающимися от фазовых скоростей быстрых (магнитозвуковых) волн бесконечной длины, т.е. со скоростями $V = V_{ph}^+ + \mu/2$, где μ – малый параметр. Около $V = V_{ph}^+$ система уравнений, описывающих бегущие волны, может быть записана в форме (1.1), роль параметра λ в (1.1), как и прежде, играет скорость бегущей волны V . Собственные значения σ матрицы $G(V_{ph}^+)$ удовлетворяют вековому уравнению

$$\sigma^2[\sigma^2 - R_i R_e \cos^2 \theta (\operatorname{tg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta_c)] = 0, \quad \operatorname{tg} \theta_c = \sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \quad (3.1)$$

Без ограничения общности положим $0 < \theta \leq \pi/2$. Критический угол θ_c разделяет две области (в пространстве параметров) качественно различного поведения ограниченных решений системы уравнений малой амплитуды.

Для $\theta > \theta_c$ уравнение (3.1) имеет три корня, один из них (ноль кратности 2) лежит на мнимой оси (фиг. 2, а). При $\mu > 0$ двукратное нулевое собственное значение распадается на два действительных простых собственных значения (в силу обратимости системы уравнений, симметричных относительно мнимой оси). В этом случае существуют классические уединенные волны. Выражение для неизвестных компонент скорости и магнитного поля дается формулами [35] (плотность числа частиц n и компонента u ионной скорости выражаются алгебраически через остальные неизвестные)

$$v = -\mu \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\Delta}} x \right) + O(\mu^2)$$

$$w = \frac{\mu}{\sin \theta} (R_e^{-1} - R_i^{-1} \cos^2 \theta) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\Delta}} x \right) + O(\mu^2)$$

$$B_y = \sin \theta + \frac{\mu}{\sin \theta} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\Delta}} x \right) + O(\mu^2)$$

$$B_z = \mu \operatorname{ctg} \theta (R_i^{-1} - R_e^{-1}) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\Delta}} x \right) + O(\mu^2)$$

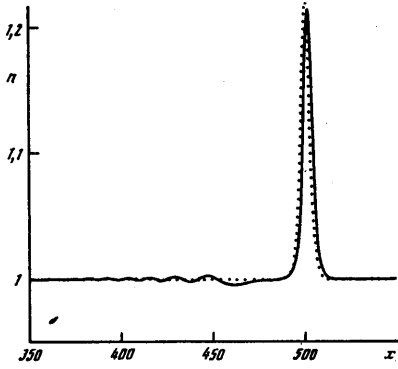
$$\Delta = R_e^{-1} R_i^{-1} \cos^2 \theta (\operatorname{tg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta_c) > 0 \quad (3.2)$$

Формулы (3.2) дают асимптотические выражения для семейства классических уединенных волн малой амплитуды полной системы уравнений, т.е. приближают соответствующие решения полной системы уравнений с точностью до $O(\mu^2)$ [35].

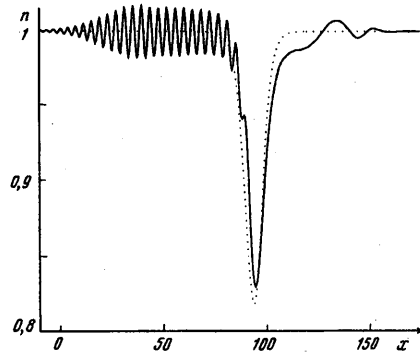
Для $\theta < \theta_c$ центральная часть спектра матрицы $G(V_{ph}^+) - \{0, \pm iq\}$, где

$$q^2 = -R_i R_e \cos^2 \theta (\operatorname{tg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta_c)$$

и ноль имеет кратность 2. Таким образом, все собственные значения лежат на мнимой оси. При $\mu < 0$ собственные значения расходятся по вещественной оси. Решение типа



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Эволюция уединенной волны – плотности для водородной плазмы ($\theta_c = 1,547$) в области $\theta > \theta_c$; $\theta = 1,555$, $\mu = 0,2$, пунктир – начальное положение

Фиг. 6. Эволюция уединенной волны – плотности для водородной плазмы в области $\theta < \theta_c$; $\theta = 1,535$, $\mu = -0,2$, пунктир – начальное положение

уединенной волны в данном случае имеет вид (3.2), но при этом $\Delta < 0$, $\mu < 0$. Однако в отличие от предыдущего случая имеем незатухающую периодическую асимптотику на бесконечности

$$\begin{aligned} \{v, B_y - \sin \theta\} &\rightarrow \{D_1, D_2\} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}\right) \sin qx, \quad x \rightarrow \infty \\ \{w, B_z\} &\rightarrow \{D_3, D_4\} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}\right) \cos qx, \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

с ненулевыми константами D_i , $i = 1, \dots, 4$. Асимптотика на $-\infty$ находится из условия четности функций $\{v, B_y\}$ и нечетности $\{w, B_z\}$. Решение (3.2) с асимптотикой (3.3) описывает обобщенную уединенную волну. Отсутствие классических уединенных волн для данного диапазона углов и здесь означает, что локализованные возмущения будут распадаться за счет излучения периодических волн. На фиг. 5 изображена эволюция симметричной плотности n в системе координат, движущейся со скоростью $V = V_{ph}^+ + \mu/2$, в начальный момент совпадающей с главной частью (3.2) для водородной плазмы для угла $\theta > \theta_c$ (в области существования уединенных волн, результаты численных расчетов в [8]). Легко видеть, что уединенная волна распространяется практически без изменения формы. На фиг. 6 представлена эволюция плотности в случае $\theta < \theta_c$ также из начальных данных в форме, задаваемой главной частью (3.2). Видно, что локализованное начальное возмущение с течением времени интенсивно излучает периодическую волну.

При $\theta < \theta_c$ на кривой быстрой (магнитозвуковой) ветви дисперсионного соотношения $\omega(k)$ присутствует точка $k = q > 0$, где фазовая скорость равна групповой (точка 1:1 резонанса). При этом критическая скорость $V_0 = \omega(q)/q$ вычисляется по формуле

$$V_0 = \sqrt{\frac{[(R_i R_e^{-1} + R_e R_i^{-1}) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta]^2 - 4 \cos^2 \theta}{4 \text{tg}^2 \theta_c \cos^2 \theta}} \quad (3.4)$$

Скорость V_0 в (3.4) равна тангенсу угла наклона прямой, касательной к кривой быстрой (магнитозвуковой) ветви дисперсионной кривой в точке

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(R_i^2 + R_e^2) \cos^2 \theta}{V_0^2} - 2R_i R_e + \frac{R_i R_e \sin^2 \theta}{V_0^2}} \quad (3.5)$$

т.е. в точке, где фазовая скорость волны совпадает с групповой скоростью. Подкоренное выражение в (3.5) положительно при $\theta < \theta_c$, что соответствует наличию точки перегиба у быстрой дисперсионной кривой. При $\theta > \theta_c$ эта кривая монотонна и точки на ней, в которых достигается равенство фазовой и групповой скорости (точки 1:1 резонанса), отсутствуют.

Будут рассматриваться волны, бегущие со скоростью $V = V_0 + \mu$. Собственные значения σ матрицы $G(V_0)$ удовлетворяют уравнению

$$\sigma^4 + \left[\frac{(R_i^2 + R_e^2) \cos^2 \theta}{V_0^2} - 2R_i R_e + \frac{R_i R_e \sin^2 \theta}{V_0^2} \right] \sigma^2 + \left(1 - \frac{1}{V_0^2} \right) R_i^2 R_e^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{V_0^2} \right) = 0 \quad (3.6)$$

Решением уравнения (3.6) является пара двукратных мнимых собственных значений $\sigma = \pm iq$. При $\mu > 0$ собственные значения $G(V)$ уходят в комплексную плоскость (см. фиг. 2, а). Далее для простоты ограничимся рассмотрением случая $\theta = 0$. Уравнения холодной плазмы имеют в данном случае локализованные решения – волны-пакеты

$$v = 2\alpha_0 \sqrt{2 \frac{\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{q_1 \mu x}) \cos qx + O(\mu^{3/2})$$

$$w = -2\beta_0 \sqrt{2 \frac{\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{q_1 \mu x}) \sin qx + O(\mu^{3/2})$$

$$B_y = \sin \theta + \gamma_0 \sqrt{2 \frac{\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{q_1 \mu x}) \cos qx + O(\mu^{3/2})$$

$$B_z = -2\delta_1 \sqrt{2 \frac{\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{q_1 \mu x}) \sin qx + O(\mu^{3/2})$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{4V_0^3} (R_e + R_i)(R_e - R_i)^2, \quad \beta_0 = \frac{q}{2V_0^2} (R_e^2 - R_i^2)$$

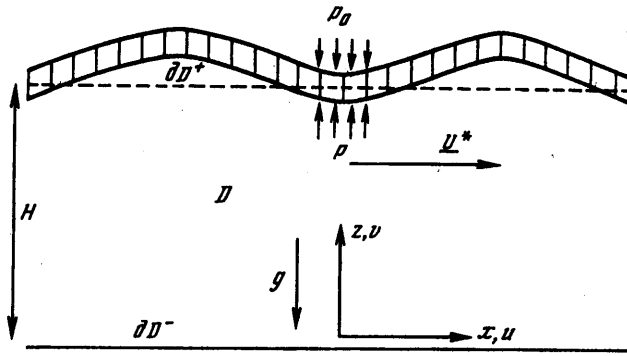
$$\gamma_0 = -\frac{R_e}{2V_0^2} (R_e - R_i)^2, \quad \delta_1 = -\frac{qR_e}{V_0} (R_e - R_i)$$

$$q_1 = \frac{1}{2V_0^3} (R_e + R_i)^2, \quad q_2 = \frac{R_e^3 R_i^5}{V_0^{12}} \left(\frac{y^4}{2} - 2y^3 + 3y^2 - 2y + \frac{1}{2} \right), \quad y = \frac{R_e}{R_i}$$

Для $y > 1$, т.е. $R_e > R_i$, что всегда имеет место, коэффициент $q_2 > 0$.

Как и в случае уравнения (0.1), наличие уединенных волн-пакетов свидетельствует о самофокусировке периодических волн с волновым числом k в окрестности q .

4. Уединенные волны на поверхности жидкости под упругим ледяным покровом (изгибно-гравитационные волны). Математическое описание упругой ледяной пластины, свободно плавающей на поверхности жидкости, формулируется гло-



Фиг. 7. Глобальная геометрия системы лед – жидкость

бально в декартовой системе координат (x, z) и локально в криволинейной системе (ξ, ζ) , привязанной к серединной поверхности пластины, задаваемой уравнением $z = \eta(x) + h/2$, с ξ , изменяющимся вдоль серединной поверхности, и с ζ – ортогонально серединной поверхности. Ледовая пластина толщины h занимает область Ω

$$\Omega = \{(\xi, \zeta) \in \mathbf{R}^2 / -h < 2\zeta < h\}, \quad \partial\Omega^+ = \{(\xi, \zeta) \in \Omega / 2\zeta = h\},$$

$$\partial\Omega^- = \{(\xi, \zeta) \in \Omega / 2\zeta = -h\}$$

с границами $\partial\Omega^\pm$. Плотность ледяной пластины обозначена ρ_s , граница раздела задается уравнением $z = \eta(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Предполагается, что $h/R_m \ll 1$, где R_m – радиус кривизны серединной поверхности. Учитываются только члены порядка $O(h/R_m)$. Тогда преобразование координат (ξ, ζ) к глобальной системе локально идентично.

Жидкость глубины H является идеальной и несжимаемой, движения потенциальны. Плотность жидкости обозначена ρ . Жидкость занимает область D

$$D = \{(x, z) \in \mathbf{R}^2 / 0 < z < \eta(x)\}, \quad \partial D^+ = \{(x, z) \in D / z = \eta(x)\}$$

$$\partial D^- = \{(x, z) \in D / z = 0\}$$

с границами ∂D^\pm . Глобальная геометрия системы лед – жидкость представлена на фиг. 7. Аналогично [22] предполагается, что ледовый покров локально ведет себя как пластина Кирхгофа–Лява, т.е. серединная поверхность не подвергается деформациям сжатия и растяжения. Каждое волокно упругого слоя, ортогональное к серединной поверхности в недеформированном состоянии, остается прямым и ортогональным к этой поверхности в деформированном состоянии. И наконец, пластина подчиняется закону Гука. Предполагается также наличие предварительно напряженного состояния, при котором компонента тензора напряжений $\sigma_{xx} = \sigma_0$ постоянна. Результаты экспериментов [22] показывают, что ледяной покров при определенных условиях обнаруживает упругие свойства.

Вследствие принятых предположений соответствующие компоненты тензора деформаций и напряжений имеют вид

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\zeta}{R_m}, \quad \sigma_{\xi\xi} = \frac{E}{R_m(1-\nu_0^2)} \zeta$$

где E – модуль Юнга, а ν_0 – коэффициент Пуассона. Изгибающий момент M имеет вид

$$M = \int \zeta \sigma_{\xi\xi}(\zeta) d\zeta = \frac{J}{R_m}, \quad J = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_0^2)}$$

где J обозначает жесткость на изгиб. Здесь и далее интегралы берутся в пределах от $-h/2$ до $h/2$. Давление на поверхности жидкости под ледовым покровом выражается по формуле [42]

$$p = p_0 + \rho_s g h + \frac{\sigma_0 h}{R_m} - \partial_{xx}^2 M \quad (4.1)$$

Кривизна $1/R_m$ выражается формулой [22]

$$\frac{1}{R_m} = - \frac{\partial_{xx} \eta}{(1 + (\partial_x \eta)^2)^{3/2} - h \partial_{xx} \eta / 2}$$

Система уравнений, описывающая волны в рассматриваемой модели, представляет собой уравнение неразрывности, уравнение отсутствия вихря, а также кинематическое и динамическое условия на поверхности жидкости с учетом (4.1) и условие непротекания на дне, а также асимптотические условия по неограниченной переменной x [42]. Предполагается, что бегущая волна распространяется вдоль оси x со скоростью U^* (фиг. 7).

Модель характеризуется тремя безразмерными параметрами

$$c = Fr^{-2} = \frac{gH}{U^{*2}}, \quad b = \frac{\sigma_0 h}{\rho H U^{*2}}, \quad \gamma_1 = \frac{J}{\rho U^{*2} H^3}$$

где c обозначает обратный квадрат числа Фруда, b является аналогом числа Бонда для гравитационно-капиллярных волн, а γ_1 – безразмерная жесткость на изгиб.

Уравнения для бегущих волн могут быть записаны в виде (1.1), представляя собой бесконечномерную динамическую систему, динамической переменной в которой служит неограниченная переменная x , а $G(\lambda_0)$ является оператором с компактной резольвентой [42]. Роль параметра бифуркации играет c . Будет предполагаться, что $c = c_0 + \mu$, где c_0 – критическое значение c , при котором происходит бифуркация.

Собственные значения σ оператора $G(c)$ удовлетворяют уравнению

$$\sigma \cos \sigma = (\lambda - b\sigma^2 + \gamma_1 \sigma^4) \sin \sigma$$

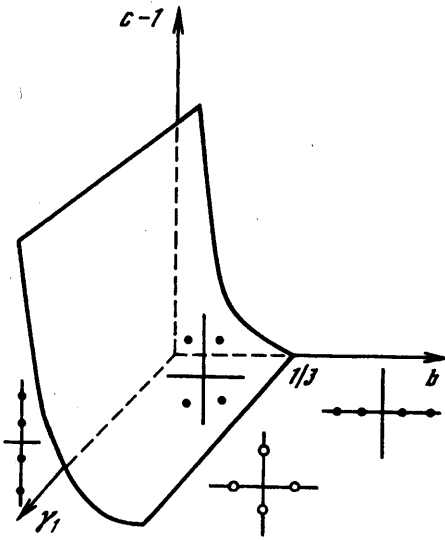
В силу обратимости исходных уравнений собственные значения симметричны относительно мнимой и вещественной оси. При $\sigma = \pm iq$, $c, q > 0$ бифуркации из состояния покоя возможны в двух случаях: $q = 0$, при этом $c = c_0 = 1$, а b и $\gamma_1 > 0$ произвольны, и $q \neq 0$, при этом $\gamma_1 > 0$, а параметры $c = c_0(q)$ и $b = b(q)$ определяются соотношениями [42]

$$\begin{aligned} c_0 &= \gamma_1 q^4 + \frac{q \operatorname{cth}(q)}{2} + \frac{q^2 \operatorname{sh}^{-2}(q)}{2} \\ b &= -2\gamma_1 q^2 + \frac{\operatorname{cth}(q)}{2q} - \frac{\operatorname{sh}^{-2}(q)}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поверхности $c = 1$ и (4.2) в пространстве параметров (c, b, γ_1) , на которых происходит бифуркация из состояния покоя, изображены на фиг. 8.

В случае $(c, b, \gamma_1) = (1, b, \gamma_1)$, $b > 1/3$, $\gamma_1 \geq 0$, имеет место бифуркация, представленная среди собственных значений оператора $G(1)$, лишь ноль второго порядка лежит на мнимой оси (фиг. 2,а). При $\mu > 0$ нулевое собственное значение переходит на действительную ось в виде двух простых собственных значений, симметричных относительно мнимой оси. В этом случае в системе существуют классические уединенные волны понижения уровня. Форма поверхности раздела дается формулой

$$\eta = -\mu \operatorname{ch}^{-2} vx / 2 + O(\mu^2), \quad v = \sqrt{\mu(b - 1/3)^{-1}} \quad (4.3)$$



Фиг. 8. Поверхности $c = 1$ и (4.2), на которых происходит бифуркация из состояния покоя в пространстве параметров. Собственные значения, пара из которых приходит на мнимую ось и совпадает на этих поверхностях, изображены черными кружками по обе стороны от поверхности (4.2) и над плоскостью $c = 1$ и белыми – под плоскостью $c = 1$

В случае $(c, b, \gamma_1) = (1, b, \gamma_1)$, $b < 1/3$, $\gamma_1 \geq 0$, среди собственных значений $G(1)$ ноль второго порядка и пара симметричных относительно нуля значений лежат на мнимой оси. При $\mu < 0$ собственные значения расходятся из нуля по мнимой оси (фиг. 2,б). В этом случае имеют место обобщенные уединенные волны. Форма поверхности раздела вода–лед по-прежнему дается формулой (4.3) с $\mu < 0$ (волны возвышения уровня). Однако в отличие от случая 1 члены следующего порядка малости не убывают к нулю на бесконечности, но имеют асимптотику

$$\eta = D_0 \exp \left[\frac{-\pi}{\sqrt{(b - 1/3)\mu}} \right] \sin x(1 + o(\mu)), \quad x \rightarrow \infty, \quad D_0 \neq 0 \quad (4.4)$$

Асимптотика на минус бесконечности определяется из условия четности η . Решение (4.3) с асимптотикой (4.4) соответствует обобщенной уединенной волне.

В случае, когда (c_0, b, γ_1) удовлетворяют уравнениям (4.2), собственными значениями оператора $G(c_0)$, лежащими на мнимой оси, являются две пары двукратных мнимых собственных значений. При $\mu > 0$ собственные значения уходят с мнимой оси, а при $\mu < 0$ расходятся по мнимой оси (фиг. 2,в). Условием существования уединенных волн-пакетов при $\mu > 0$ и темных уединенных волн при $\mu < 0$ является условие на знак коэффициента $q_2(q)$ при ведущей нелинейности в уравнениях в квазинормальной форме, приближающих исходную систему уравнений. Коэффициент q_2 имеет асимптотику [42]: $\gamma_1 > 0$

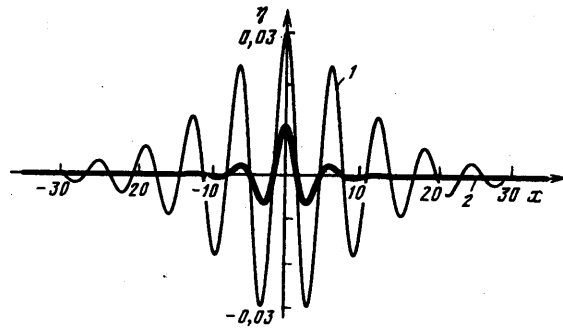
$$q_2 \sim \frac{19}{8(1/45 + \gamma_1)^2 q^8}, \quad q \rightarrow 0, \quad q_2 \sim -\frac{3}{8}, \quad q \rightarrow \infty$$

$\gamma_1 = 0$ (случай гравитационно-капиллярных волн)

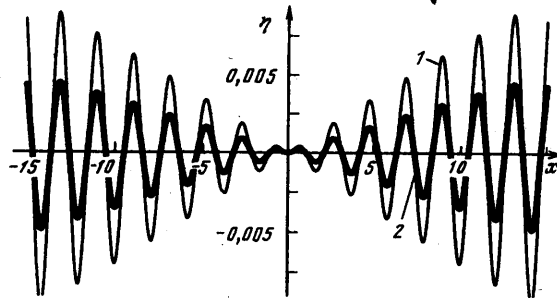
$$q_2 \sim \frac{38475}{8q^8}, \quad q \rightarrow \infty, \quad q_2 \sim \frac{11}{2}, \quad q \rightarrow \infty$$

Видно, что для гравитационно-изгибных волн ($\gamma_1 > 0$) коэффициент q_2 меняет знак. Для $\mu > 0$, $q_2 > 0$ решениями исходных уравнений являются уединенные волн-пакеты

$$\eta = \pm \frac{2 \operatorname{th} q}{q^2} \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1 x} \cos qx + O(|\mu|^{3/2})$$



Фиг. 9. Сравнительная форма двух уединенных волн – пакетов возвышения для $\gamma_1 = 0$ – случай гравитационно-капиллярных волн (линия 1) и $b = 0$ – случай чисто изгибно-гравитационных волн (жирная линия 2) при $q = 1, \mu = 0,01$



Фиг. 10. Сравнительная форма двух темных уединенных волн возвышения для $\gamma_1 = 0,1$ (линия 1) и $\gamma_2 = 0,2$ (жирная линия 2) для $q = 3$ и $\mu = -0,01$

Выражение для $q_1(q) > 0$ дано в [42]. На фиг. 9 представлена сравнительная форма двух уединенных волн возвышения для случая гравитационно-капиллярных волн и чисто изгибно-гравитационных волн.

Для $\mu < 0, q_2 < 0$ решениями исходных уравнений являются темные уединенные волны

$$\eta = \pm \frac{2 \operatorname{th} q}{q^2} \sqrt{\frac{\mu q_1}{q_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{-\mu q_1}{2}} x \sin qx + O(|\mu|^{3/2})$$

Сравнительная форма двух темных уединенных волн возвышения для разных значений физических параметров представлена на фиг. 10.

5. Уединенные волны в длинных осциллирующих сосудах – резонанс Фарадея. Уравнения, описывающие поверхностные волны в неограниченном канале, вертикально колеблющемся с частотой, близкой к двум собственным частотам, представляет собой уравнения для огибающей и нелинейно модулированных волн [62]. Для вертикально осциллирующего с частотой 2ω и амплитудой A канала или длинного прямоугольного сосуда модельное уравнение имеет вид обобщенного уравнения Шредингера

$$i u_t + \beta u + u_{xx} \pm 2|u|^2 u + i \alpha u + \gamma_2 \bar{u} = 0 \quad (5.1)$$

где нижние индексы x и t обозначают производные по медленным пространственной

переменной и времени соответственно. Уравнение (5.1) выведено в предположениях, что

$$k\eta^0 = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - 1 = 2\varepsilon^2\beta, \quad \frac{A\omega^2}{g} = \varepsilon^2\gamma_2, \quad \delta_0 = \varepsilon^2\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma_2 = O(1)$$

$$\omega_1 = 2gkT, \quad T = \text{th} kd, \quad k = \pi/b_0$$

где η^0 – характеристическая амплитуда поверхностной волны, b_0 и d – длина и глубина сосуда соответственно, δ_0 – коэффициент вязкости и g – ускорение свободного падения. Для канала или длинного сосуда, например с длиной и шириной порядка нескольких сантиметров, амплитуда A имеет величину порядка нескольких миллиметров, а частота ω – 10 Гц.

Медленные безразмерные переменные x и t связаны с размерными ξ и τ следующим образом:

$$t = \varepsilon^2\omega\tau, \quad x = \frac{\varepsilon k \xi}{\sqrt{K}}, \quad K = \frac{1}{4T}(T + kd \text{sh}^2 kd)$$

Амплитуда огибающей $u = u(x, t)$ в (5.1) выражается через доминантную моду волн в сосуде по формуле

$$u = \sqrt{2N}\eta_1, \quad N = \frac{k^2}{64T^4}(6T^6 - 5T^4 + 16T^2 - 9)$$

где η_1 – амплитуда (0.1) моды поверхностного возвышения η

$$\eta = \varepsilon\eta_1 \cos ky \exp(-i\omega t) + \text{c. c.} + O(\varepsilon^2)$$

Здесь рассматривается только модуляционно неустойчивый случай (знак плюс перед кубичной нелинейностью в (5.1)). Модуляционная неустойчивость (самофокусировка) имеет место при $N > 0$, что подразумевает $kd > 1,022$ [62].

Присутствие вынуждающего члена в (5.1) нарушает вращательную симметрию задачи и, как следствие, решения (5.1) типа классических уединенных волн являются стоячими (не бегущими) волнами [62]

$$u = r \exp(i\psi), \quad r = \rho \text{sh} \rho x, \quad \rho = \sqrt{-\beta - \gamma_2 \cos 2\psi}$$

$$\psi = \psi_{1,2}, \quad \psi_1 = \pi/2 - \frac{1}{2} \arcsin(\alpha/\gamma_2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2} \arcsin(\alpha/\gamma_2) \quad (5.2)$$

При $\psi = \psi_2$ уединенная волна всегда неустойчива [62]. При $\psi = \psi_1$ уединенная волна устойчива в части области в пространстве параметров $\beta < 0$ и $\alpha^2 < \gamma_2^2 < \alpha^2 + \beta^2$ (см. [10, 40]). Эта область вложена в область устойчивости состояния покоя (нулевого решения (5.1)): $\beta < 0$, если $\gamma_2^2 < \beta^2$, или $\gamma_2^2 > \beta^2$ и одновременно $\beta^2 + \alpha^2 > \gamma_2^2$, $\beta > 0$ при $\alpha > \gamma_2$. Будем интересоваться решениями (5.1) малой амплитуды в окрестности критической кривой в пространстве параметров, на которой происходит бифуркация

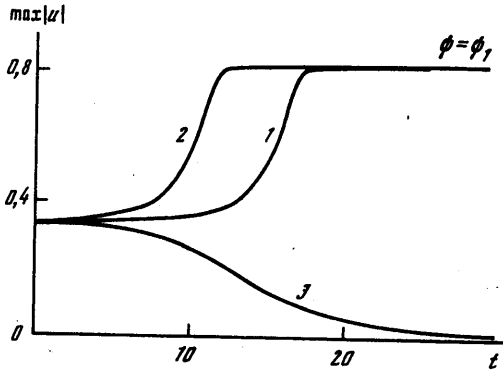
$$\beta^2 + \alpha^2 = \gamma_2^2 \quad (5.3)$$

Предположим

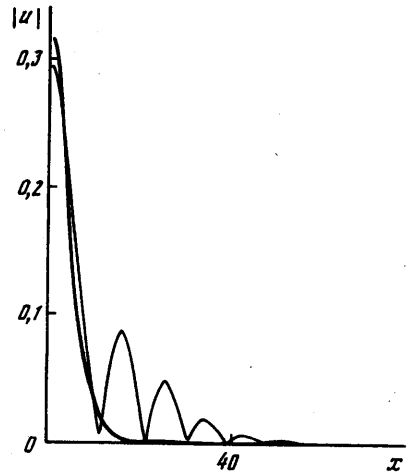
$$\beta^2 + \alpha^2 = \gamma_2^2 + \mu\rho_2, \quad \rho_2 = -(\beta - \gamma_2 \cos 2\psi)$$

с малым μ . В окрестности кривой (5.3) уравнение (5.1) для стоячих волн может быть записано в виде обратимой динамической системы, имеющей форму (1.1).

При $\beta < 0$, $\beta^2 + \alpha^2 > \gamma_2^2$ состояние покоя системы является устойчивым. В этом случае среди собственных значений матрицы $G(\alpha, \beta, \gamma_2)$, где $(\alpha, \beta, \gamma_2)$ лежат на кривой



Фиг. 11



Фиг. 12

Фиг. 11. Зависимость от времени амплитуды уединенных волн, форма которых задается главной частью (5.4) от времени в рассматриваемой области параметров $\beta < 0$, $\beta^2 + \alpha^2 > \gamma^2$.

Кривая 1 – неустойчивая уединенная волна с $\psi = \psi_2$, $\mu = \mu_0 = -\beta + \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$. Кривая 3 – неустойчивая уединенная волна с $\mu < \mu_0$. Кривая 2 – устойчивая уединенная волна с $\psi = \psi_1$

Фиг. 12. Начальная стадия эволюции возмущения умеренной амплитуды ($\mu = 0,1$), описываемого главной частью (5.4), в области параметров $\beta > 0$, $\beta^2 + \alpha^2 < \gamma^2$ для времени $t = 50$ (жирная линия) и 100. Показана только область $x > 0$ ввиду симметрии решения

(5.3), лишь ноль второго порядка лежит на мнимой оси. Для $\mu \neq 0$, $\mu \rho_2 > 0$ нулевое собственное значение распадается на два действительных (фиг. 2,а) и уравнение (5.1) имеет в качестве решений семейство классических уединенных волн, параметризованное ψ [40] ($u = p + is$)

$$p = a_0, \quad s = -\frac{\kappa_2}{\rho_2} a_0$$

$$a_0 = \pm \left(\frac{\mu}{\Delta \delta} \right)^{1/2} \operatorname{ch}^{-1} \left[\left(\frac{\mu}{\Delta} \right)^{1/2} x \right] + O(\mu)$$

$$\delta = \left(1 + \frac{\kappa_2^2}{\rho_2^2} \right), \quad \Delta = \left(1 + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\rho_2^2} \right)$$

$$\kappa_1 = \alpha + \gamma_2 \sin 2\psi, \quad \kappa_2 = -(\alpha - \gamma_2 \sin 2\psi) \quad (5.4)$$

Для $\kappa_2 = 0$ решение (5.4) превращается в неустойчивую уединенную волну (5.2) с фиксированным $\psi = \psi_2$. Неустойчивым является все семейство (5.4). На фиг. 11 приведена зависимость амплитуды уединенных волн, форма которых задается главной частью (5.4), от времени в рассматриваемой области параметров.

При $\beta > 0$, $\beta^2 + \alpha^2 < \gamma_2^2$ нулевое решение (5.1) неустойчиво. На кривой (5.3) собственные значения матрицы $G(\alpha, \beta, \gamma_2)$ состоят из двойного нуля и пары мнимых собственных значений. При $\mu/\Delta > 0$, т.е. $\operatorname{sgn} \rho_2 = -\operatorname{sgn} \mu$, нулевое собственное значение переходит на вещественную ось в виде симметричной относительно нуля пары собственных значений (фиг. 2,б). Уравнение (5.1) имеет в этом случае решения типа обобщенных уединенных волн, главная часть которых дается формулами (5.4). Асимпто-

тика на бесконечности имеет вид

$$p = \kappa_1 D_0 \sqrt{|\mu|} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sigma \sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}\right) \sin \sigma x + O\left[\mu \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sigma \sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}\right)\right]$$

$$s = \rho_2 D_0 \sqrt{|\mu|} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sigma \sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}\right) \sin \sigma x + O\left[\mu \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sigma \sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}\right)\right], \quad x \rightarrow \infty$$

где $\sigma^2 = -\Delta \rho_2 > 0$. В частном случае $\kappa_2 = 0$ обобщенная уединенная волна превращается в классическую уединенную волну (5.2) с $\psi = \Psi_1$ и $\rho = (\mu_0)^{1/2}$. Однако эта уединенная волна не может быть устойчивой в области, где неустойчиво состояние покоя системы.

На фиг. 12 показана начальная стадия эволюции возмущения умеренной амплитуды ($\mu = 0, 1$), описываемого главной частью (5.4).

6. Спонтанное нарушение размерности. Рассматриваемое здесь уравнение

$$\partial_{xx}\eta + \partial_x(\eta\partial_x\eta) + \partial_x^4\eta + \partial_x^6\eta + \partial_y^2\eta = 0 \quad (6.1)$$

где t, x, y – безразмерные временные и пространственные переменные, а $\eta = \eta(t, x, y)$ – безразмерная функция, описывающая форму поверхности, является обобщением уравнения Кадомцева – Петвиашвили на случай отсутствия эффектов высшей дисперсии. Уравнение (6.1) было выведено в [29] из полной трехмерной системы уравнений Эйлера в длинноволновом малоамплитудном пределе для гравитационно-капиллярных волн с числом Бонда b в левой окрестности критического значения $1/3$, а также для поверхностных волн при наличии упругой бесконечной ледяной пластины. В обоих случаях рассматривается жидкость конечной глубины. Смещение упругой ледяной пластины описывается уравнениями теории тонких пластин.

Рассмотрим решения (6.1) типа бегущих волн, распространяющиеся со скоростью V в направлении оси x . Эти решения удовлетворяют уравнению

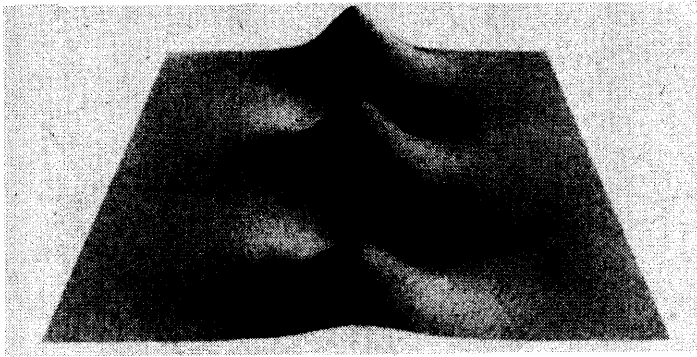
$$\partial_{yy}\eta - V\partial_{xx}\eta + \partial_x(\eta\partial_x\eta) + s\partial_x^4\eta + \partial_x^6\eta = 0 \quad (6.2)$$

где старое обозначение x сохранено для комбинации $x - Vt$.

Физическим параметром задачи в данном случае является скорость бегущей волны V . Уравнение (6.2) может быть записано в виде (1.1), где динамической переменной является переменная y , $\lambda_0 = V_0$ – значение скорости, при котором происходит бифуркация, а $G(V) - 2 \times 2$ -матрица, элементами которой являются дифференциальные операторы по x [41]. Будем рассматривать решения, периодические в направлении распространения (оси x), с периодом $2l$, где l – произвольное положительное число. При $k = \pi/l > 1/\sqrt{5}$ имеет место бесконечное число (каскад) бифуркаций, первая из которых происходит при $V_0 = -k^2 + k^4$ [41]. Если ограничимся решениями, которые являются четными по переменной x , то среди мнимых собственных значений оператора $G(V_0)$ лишь ноль второго порядка лежит на мнимой оси. При $\mu < 0$ нулевое собственное значение $G(V)$ переходит на действительную ось в виде двух простых собственных значений в силу обратимости исходной системы симметричных относительно мнимой оси. Таким образом, имеет место бифуркация, представленная на фиг. 2, а. В этом случае уравнение (6.2) допускает локализованное по y решение (записанное в старых переменных)

$$\eta = \pm k \sqrt{\frac{2\mu}{\zeta_0}} \operatorname{sech} k\sqrt{|\mu|} |y| \cos(kx - V_0 t) + O(\mu), \quad \zeta_0 = \frac{1}{24(1 - 5k^2)} \quad (6.3)$$

Форма волны возвышения (6.3) представлена на фиг. 13.



Фиг. 13. Форма волны возвышения (6.3)

Решение (6.3) принадлежит двумпараметрическому семейству локализованных в трансверсальном направлении решений уравнения (6.1), которые являются продуктом распада однородной периодической волны в результате самоканализации (подробности см. в [40]). Семейство решений (6.3) аналогично решениям типа уединенных волн-пакетов уравнения (0.1): наличие уединенных волн-пакетов в системе с одной пространственной переменной свидетельствует о самофокусировке периодических волн, существование же семейства волн (6.3) в системах с двумя пространственными измерениями свидетельствует о самоканализации периодических волн, однородных в трансверсальном направлении.

Уравнение (6.2) может быть записано также в виде (1.1), где в качестве динамической переменной выступает переменная x . В этом случае матрица-оператор $G(V)$ представляет собой 6×6 матрицу, где элементами являются дифференциальные операторы по y [29]. Рассмотрим решения, периодические по y , с периодом $2l$ и произвольным положительным l . В рассматриваемом случае также имеет место каскад бифуркаций, первая из которых происходит при

$$V_0 = 3q^4 - 2q^2, \quad \frac{\pi^2}{l^2} = 2q^6 - q^4 \quad (6.4)$$

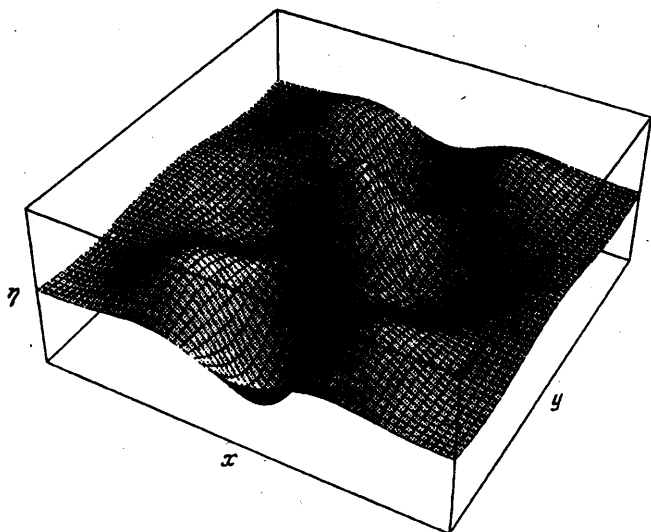
для любого $q^2 > 1/2$ [29]. Из (6.4) видно, что $V_0 > -1/4$. Будем рассматривать случай $V_0 > 0$. Кроме того, ограничимся рассмотрением решений, четных по переменной y . Тогда оператор $G(V_0)$ имеет две пары симметричных относительно нуля собственных значений на мнимой оси, собственные значения с меньшей по модулю мнимой частью являются двукратными, т.е. имеет место бифуркация сложного $1 : 1$ резонанса, проиллюстрированная на фиг. 3. При $\mu < 0$ пара двукратных собственных значений уходит с мнимой оси в комплексную плоскость и имеют место решения (6.2) вида

$$\eta(x, y) = \pm \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{\mu q_1} x) \cos qx \cos\left(\frac{\pi}{l} y\right) + O(\mu)$$

$$q_1 = \frac{1}{4(1-3q^2)} < 0, \quad q_2 = \frac{43q^2 - 8}{96q^2(3q^2 - 1)(5q^2 - 1)(13q^2 - 2)} > 0 \quad (6.5)$$

Решения (6.5) образуют двумпараметрическое семейство, зависящее от μ и $q > \sqrt{2/3}$ [29]. Характерная форма волны возвышения изображена на фиг. 14. Пара собственных значений оператора $G(V)$, остающихся на мнимой оси при $\mu < 0$ оказывает влияние на асимптотику решения (6.5): как и в рассматриваемых выше аналогичных случаях, волна (6.5) имеет на бесконечности периодическую асимптотику с экспоненциально малой по отношению к μ амплитудой.

7. Обсуждение результатов. В настоящей работе рассмотрен ряд задач о существовании уединенных волн различных типов в изотропных (обратимых) средах. По-



Фиг. 14. Форма волны возвышения (6.5)

мимо чисто математического интереса, связанного с приложениями используемого метода построения решений сложных нелинейных уравнений в частных производных, задачи об уединенных волнах представляют и чисто физический интерес. Этот интерес обусловлен рядом особенностей нелинейных нестационарных процессов, наличие которых в системе может быть предсказано, исходя из типа уединенной волны, допускаемой уравнениями для данной модели.

Уравнение (0.1) представляет собой универсальный пример уравнения, среди решений которого находятся уединенные волны трех типов. Кроме семейств уединенных волн малой амплитуды (являющихся бифуркацией из нуля) в работах [18, 34, 68] установлено существование семейств уединенных волн конечной амплитуды (в частности, в случае $\gamma = -1$ решения уравнения (0.1) содержат однопараметрическое семейство уединенных волн, аналитическое выражение для представителей которого неизвестно, кроме единственного значения скорости $V = 36/169$ [66]). В связи с этим следует отметить также интерес в литературе к так называемым "глобальным" вопросам существования уединенных волн конечной (не малой) амплитуды в различных диспергирующих средах (см., например, [5, 6]). Семейство классических уединенных волн, которым обладает уравнение (0.1) первого рода является динамически устойчивым. Это означает, что локализованные возмущения произвольной (не обязательно малой) амплитуды в процессе эволюции в силу (0.1) распадаются на уединенные волны. Анализ динамической устойчивости, предпринятый в [32, 44–46], основан на теории нелинейной устойчивости для гамильтоновых систем с трансляционно-инвариантным гамильтонианом [12, 15, 26].

В холодной плазме распад локализованных возмущений имеет различный характер для $\theta < \theta_c$ и $\theta > \theta_c$. Различие это связано с отсутствием классических уединенных волн в первой из областей. До сих пор было принято считать, что уединенные волны в холодной плазме существуют для всех углов наклона $0 < \theta < \pi/2$ невозмущенного магнитного поля к направлению распространения волны, так как движение плазмы предполагалось описываемым модельным уравнением КдВ. На самом деле уединенные волны существуют лишь для очень узкого диапазона углов θ в физически реальной плазме [38]. Так, в водородной плазме отношение параметров R_e и R_i (равное отношению массы протона к массе электрона) равно $1,8361 \cdot 10^3$, что соответствует $\theta_c = 88,6631^\circ$.

Модель идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под ледовым покровом, находящимся в начально напряженном состоянии, с математической точки

зрения является обобщением модели идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины с капиллярными эффектами [20, 48]. Типы уединенных волн, существующих в этих обеих моделях, во многом сходны. Однако следует отметить, что модель гравитационно-капиллярных волн имеет чисто теоретический интерес, так как масштабы, на которых существенны капиллярные силы, являются малыми. В частности, глубина жидкости (и, значит, амплитуда) имеет величину порядка нескольких миллиметров. При таких глубинах важны эффекты, обусловленные вязкостью, и модель идеальной жидкости не может быть использована. Следовательно, сравнение теоретических результатов, полученных в рамках модели идеальной жидкости, с экспериментом не имеет смысла для гравитационно-капиллярных волн. Для изгибно-гравитационных волн ограничений на глубину жидкости нет. Амплитуда волны может иметь достаточно большие значения даже для небольших отклонений волновой скорости от фазовой скорости бесконечно длинных волн, т.е. для малых μ . Например, для глубины жидкости $H = 10$ м и скорости волны $U^* = 10 \pm 0,5$ м/с ($\mu = 0,1$) амплитуда волны имеет величину порядка 10 см. Подобные волны (с амплитудой порядка 0,5 м) наблюдались в арктических районах. Они проходили расстояния порядка 1000 км от кромки сплошного ледового покрова.

Для c в окрестности единицы и $b < 1/3$ имеют место обобщенные уединенные волны с периодической асимптотикой на бесконечности. Для реальной среды, например с $h = 1$ м, $E = 5 \cdot 10^9$ н/м², $H = 10$ м и $\sigma_0 = 0$, длина волны l периодической компоненты обобщенной уединенной волны имеет порядок 10 м. Используемая здесь модель Кирхгофа – Лява ледовой пластины, справедливая при малых отношениях h/l (см. [42]), может быть применена для описания волн такой длины. Таким образом, детектирование периодических волн, излученных локализованными возмущениями, представляется возможным проводить экспериментально.

Для бифуркации 1 : 1 резонанса поверхность (4.2) в пространстве параметров порождает семейство уединенных волн-пакетов. Как уже отмечалось, существует естественная связь между локализованными волнами-пакетами нелинейного уравнения Шредингера, являющимися продуктами самофокусировки (неустойчивости Бенджамина – Фейра [13]) периодических волн, и уединенными волнами-пакетами [1, 28, 58]. Локализованные нестационарные волны-пакеты нелинейного уравнения Шредингера образуют двухпараметрическое семейство; параметрами служат групповая и фазовая скорости. Уединенная волна-пакет является членом этого семейства при равенстве фазовой и групповой скоростей. Когда коэффициент q_2 при ведущей нелинейности в уравнениях в квазинормальной форме, приближающих исходную систему, отрицателен, периодические волны малой амплитуды устойчивы и как следствие в системе присутствуют темные уединенные волны вместо уединенных волн-пакетов.

Аналогичные волны известны в двухслойной идеальной несжимаемой жидкости с бесконечными толщинами слоев, жесткой верхней границей и капиллярными эффектами на поверхности раздела [21]. Переход от уединенных волн-пакетов к темным уединенным волнам в этом случае происходит, когда q_2 меняет знак, что имеет место при $R = R_c = (21 - 8\sqrt{5})/11 \sim 0,28286$, где R равно отношению плотностей верхнего и нижнего слоев. При $R < R_c$ существуют уединенные волны-пакеты, т.е. в окрестности волнового числа $q = (1 + R)/2$, отвечающего 1 : 1 резонансу, имеет место явление самофокусировки периодических волн малой амплитуды. При $R > R_c$ уединенные волны-пакеты отсутствуют, а имеют место темные уединенные волны – индикаторы модуляционной устойчивости. Таким образом, при переходе через R_c фокусирующая окрестность волнового числа q сменяется на дефокусирующую. Уединенные волны-пакеты и темные уединенные волны существуют, когда число Бонда не является свободным параметром, а зависит от коэффициента R [21].

В случае гравитационно-изгибных волн, рассматриваемых в настоящей статье, коэффициент q_2 также меняет знак. Однако физический механизм перехода фокусирующей области в дефокусирующую отличен от случая двухслойной жидкости. Огра-

начимся рассмотрением случая $b = 0$, когда начальное напряжение σ_0 в ледовой пластине равно нулю. Поверхность (4.2) в этом случае вырождается в кривую, параметрически заданную

$$c_0 = \frac{3q \operatorname{cth}(q)}{4} + \frac{q^2 \operatorname{sh}^{-2}(q)}{4}, \quad \gamma_1 = \frac{\operatorname{cth}(q)}{4q^3} - \frac{\operatorname{sh}^{-2}(q)}{4q^2} \quad (7.1)$$

Функции c_0 и γ_1 , удовлетворяющие (7.1), монотонны и имеют асимптотику

$$c_0 = 1 + \frac{q^2}{6} + O(q^3), \quad \gamma_1 \sim \frac{1}{6q^2}, \quad q \rightarrow 0, \quad c_0 \sim \frac{3q}{4}, \quad \gamma_1 \sim \frac{1}{4q^3}, \quad q \rightarrow \infty$$

Коэффициент q_2 обращается в нуль при критическом безразмерном волновом числе $q = q_c \approx 5,79$. Для резонансных волновых чисел $q < q_c$ система обладает уединенными волнами-пакетами и, следовательно, самофокусировка периодических волн имеет место в данной области. Для $q > q_c$ вместо уединенных волн-пакетов в системе появляются темные уединенные волны и периодические волны с волновыми числами из этой области устойчивы. Из определения безразмерных параметров c и γ_1 следуют выражения для глубины и скорости

$$H = 4 \sqrt{\frac{Jc_0}{\rho g \gamma_1}}, \quad U^* = 8 \sqrt{g^3 \frac{J}{\rho c_0^3 \gamma_1^3}} \quad (7.2)$$

Из монотонности c_0 и γ_1 и (7.2) следует, что глубина H увеличивается при увеличении q . Таким образом, при $H > H_c$, где H_c – критическое значение глубины жидкости, соответствующее $q_2 = 0$, $q > q_c$ и уединенные волны-пакеты заменяются на темные уединенные волны. Другими словами, окрестность резонансного волнового числа q не принадлежит более к фокусирующей области, но к дефокусирующей. Критические значения параметров $c_0 = c_c = 4,34$ и $\gamma_1 = \gamma_c = 0,013$ определяются из (7.1) подстановкой $q = q_c$. Резонансные волновые числа q безразмерны при помощи глубины H , т.е. $q = kH$, где k обозначает размерное волновое число. Числовые значения критических параметров U_c^* , H_c и k_c для некоторых значений толщины льда h представлены ниже.

$h, \text{ м}$	0,01	0,1	0,4	0,8	1
$U_c^*, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$	2,23	5,28	8,88	11,52	12,53
$H_c, \text{ м}$	2,15	12,12	34,28	57,65	68,14
$k_c, \text{ м}^{-1}$	2,69	0,48	0,17	0,1	0,085

Значения для модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν_0 льда приняты равными $5 \cdot 10^9 \text{ н}^2/\text{м}^2$ и $0,35$ соответственно.

Напомним, что резонансное волновое число q в (4.2) и (7.1) обозначает точку на дисперсионной кривой, где фазовая скорость равна групповой. Если при увеличении глубины жидкости H волновое число q проходит через q_c , то оно перестает быть фокусирующим и система не имеет локализованных волн-пакетов с длинами волн, близкими к $2\pi H q^{-1}$. Следовательно, если фокусирующая область и существует где-либо, то она не содержит волновых чисел, где фазовая скорость равна групповой. Из таблицы видно, что рассматриваемый эффект может наблюдаться как в лабораторных условиях, так и в природных бассейнах. Для толщин льда порядка 1 см критическая глубина, скорость и длина волны могут быть промоделированы в эксперименте. Если толщина льда порядка 1 м, то критические параметры достаточно велики, тем не менее их значения вполне достижимы для природных бассейнов: больших рек, озер и морей.

Жидкость в осциллирующих сосудах представляет собой пример диссипативной среды. Как и в диспергирующих средах, тип уединенной волны, существующей в рас-

смаатриваемой области параметров, оказывает влияние на характер нестационарных процессов в данной модели. Так, в области параметров, где существуют обобщенные уединенные волны, первые стадии распада локализованных возмущений сопровождаются излучением периодической волны.

Заключение. В настоящей работе изложены современные результаты, относящиеся к классификации типов уединенных волн в обратимых диспергирующих и диссипативных средах, условиям их существования, особенностям эволюции локализованных возмущений, связанным с наличием уединенных волн различных типов, а также вопросам существования нелинейных волн, локализованных по одному из направлений, при спонтанном нарушении размерности.

В качестве примеров уравнений, описывающих волновые процессы в обратимых средах, рассмотрены уравнение для длинных волн (0.1), уравнения холодной бесстолкновительной плазмы, идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под упругой пластиной и с поверхностным натяжением, а также уравнение, описывающее поверхностные волны в жидкости в быстроосциллирующих прямоугольных сосудах (резонанс Фарадея), и обобщенное уравнение Кадомцева – Петвиашвили.

Изложенные результаты о классификации и существовании разных типов уединенных волн указывают на существование ряда важных физических эффектов, присутствующих в волновом процессе в обратимых средах, которые не могут быть получены в рамках асимптотического описания. Этими эффектами являются излучение коротких периодических волн крупномасштабными локализованными возмущениями, а также различные виды модуляционной неустойчивости: самофокусировка в плоском случае и самоканализация в случае трехмерных волн.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01150).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akylas T. R. Envelope solutions with stationary crests // *Phys. Fluids A*. 1993. V. 5. № 4. P. 789–791.
2. Akylas T.R., Yang T.S. On short-scale oscillatory tails of long wave disturbances // *Stud. Appl. Math.* 1995. V. 94. № 1. P. 1–20.
3. Akylas T.R., Grimshaw R.H. Solitary internal waves with oscillatory tails // *J. Fluid. Mech.* 1992. V. 242. P. 279–298.
4. Amick C.J., Kirchgässner K. A theory of solitary water waves in the presence of surface tension // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1989. V. 105. № 1. P. 1–49.
5. Amick C.J., Toland J.F. On solitary water-waves of finite amplitude // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1981. V. 76. № 1. P. 9–95.
6. Amick C.J., Turner R.E.L. A global theory of internal solitary waves in two-fluid systems // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. V. 298. № 2. P. 431–484.
7. Amick C.J., Turner R.E.L. Small internal waves in two-fluid systems // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1989. V. 108. № 2. P. 111–139.
8. Bakholdin I., Il'ichev A. Radiation and modulational instability described by the fifth order Korteweg-de Vries equation // *Contemporary Mathematics*. Providence: Amer. Math. Soc., 1996. V. 200. P. 1–15.
9. Bakholdin I., Il'ichev A. Solitary-wave decay in a cold plasma // *J. Plasma Phys.* 1998. V. 60. № 3. P. 569–580.
10. Bakholdin I., Il'ichev A. Solitary wave decay in nonlinear Faraday resonance // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 1999. V. 18. № 1. P. 569–580.
11. Beale J.T. The existence of solitary water waves // *Comm. Pure Appl. Math.* 1977. V. 30. № 4. P. 373–389.
12. Benjamin T.B. The stability of solitary waves // *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*. 1972. V. 328. № 1573. P. 153–183.
13. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1 // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. P. 417–430.

14. Benilov E.S., Grimshaw R., Kuznetsova E.P. The generation of radiating waves in a singularly – perturbed Korteweg–de Vries equation // *Physica D*. 1993. V. 69. № 3–4. P. 270–278.
15. Bona J.L. On the stability theory of solitary waves // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1975. V. 344. № 1638. P. 363–374.
16. Bona J.L., Sachs R.L. The existence of internal solitary waves in a two-fluid system near the KdV limit // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. 1989. V. 48. № 1–3. P. 25–51.
17. Boyd J.P. Weakly non-local solitons for capillary-gravity waves: fifth degree Korteweg–de Vries equation // *Physica D*. 1991. V. 48. № 1. P. 129–146.
18. Buffoni B., Champneys A.R., Toland J.F. Bifurcation and coalescence of a plethora of homoclinic orbits for a Hamiltonian system // *J. Dynam. Different. Equat.* 1996. V. 8. № 2. P. 221–281.
19. Dias F., Il'ichev A. Ondes solitaires internes caracterisees par des oscillations à l'infini // *Proc. 6e journées de l'hydrodynamique, Nantes*. 1997. P. 429–438.
20. Dias F., Iooss G. Capillary-gravity solitary waves with damped oscillations // *Physica D*. 1993. V. 65. № 4. P. 399–423.
21. Dias F., Iooss G. Ondes solitaires "noires" à l'interface entre deux fluides en présence de tension superficielle // *C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1*. 1994. V. 319. P. 89–93.
22. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. P. 1. High order series solution // *J. Fluid Mech*. 1986. V. 169. P. 409–428.
23. Forbes L.K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. P. 2. Galerkin solutions // *J. Fluid. Mech*. 1988. V. 188. P. 491–508.
24. Friedrichs K.O., Hyers D.H. The existence of solitary waves // *Comm. Pure Appl. Math*. 1954. V. 7. № 3. P. 517–550.
25. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // *Phys. Rev. Lett*. 1967. V. 19. № 19. P. 1095–1097.
26. Grillakis M., Shatah J., Strauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I // *J. Funct. Anal*. 1987. V. 74. № 1. P. 160–197.
27. Grimshaw R., Joshi N. Weakly nonlocal solitary waves in a singularly perturbed Korteweg–de Vries equation // *SIAM J. Appl. Math*. 1995. V. 55. № 1. P. 124–135.
28. Grimshaw R., Malomed B., Benilov E. Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth-order Korteweg–de Vries equation // *Physica D*. 1994. V. 77. № 4. P. 473–485.
29. Haragus-Courcelle M., Il'ichev A. Three-dimensional solitary waves in the presence of additional surface effects // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 1998. V. 17. № 5. P. 739–768.
30. Hunter J.K., Scheurle J. Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves // *Physica D*. 1988. V. 32. № 5. P. 253–268.
31. Захаров В.Е., Мананков С.В., Новиков С.П., Пумаевский Л.П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980. 319 с.
32. Ильичев А.Т. К теории нелинейных волн, описываемых эволюционными уравнениями пятого порядка // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1990. № 2. С. 99–104.
33. Ильичев А.Т. О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией // *Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР*. 1989. V. 186. С. 222–226.
34. Ильичев А.Т. О существовании семейства солитоноподобных решений уравнения Кавахары // *Мат. заметки*. 1996. Т. 52. № 1. С. 42–50.
35. Ильичев А.Т. Уединенные волны в холодной плазме // *Мат. заметки*. 1996. Т. 59. № 5. С. 719–728.
36. Il'ichev A.T. The existence of solitary waves in dispersive media // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.: Suppl.: Phys. Vibr*. 1995. V. 59. № 2. P. 98–108.
37. Ильичев А.Т. Уединенные и обобщенные уединенные волны в диспергирующих средах // *ПММ*. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 606–620.
38. Il'ichev A. Steady waves in a cold plasma // *J. Plasma Phys*. 1996. V. 55. № 2. P. 181–194.
39. Ильичев А.Т. Уединенные волны-пакеты в холодной плазме // *Изв. РАН. МЖГ*. 1996. № 5. С. 154–161.
40. Il'ichev A. Faraday resonance: Asymptotic theory of surface waves // *Physica D*. 1998. V. 119. № 3–4. P. 327–351.
41. Il'ichev A. Self-channeling of surface water waves in the presence of an additional surface pressure // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 1999. V. 18. № 3. P. 501–510.
42. Il'ichev A., Kirchgässner K. Nonlinear water waves beneath an elastic ice-sheet // *Sonderforschungsbe-*

- reich 404. Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik. Stuttgart: Uni-Stuttgart, 1998. Bericht 98/19. P. 1–28.
43. Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88–95.
 44. Il'ichev A.T., Semenov A.Yu. Stability of subcritical solitary wave solutions to fifth order evolution equation: Preprint № 28. General Physics Institute USSR Acad. Sci. Moscow. 1991. 44 p.
 45. Ильичев А.Т., Семенов А.Ю. Орбитальная устойчивость граничных состояний в теории длинных волн с дополнительным давлением // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 3. С. 505–508.
 46. Il'ichev A.T., Semenov A.Yu. Stability of solitary waves in dispersive media described by a fifth-order evolution equation // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1992. V. 3. № 6. P. 307–326.
 47. Iooss G., Adelmeyer M. Topics in bifurcation theory and applications. Singapore: World Scientific. 1992. 160 p.
 48. Iooss G., Kirchgässner K. Bifurcation d'ondes solitaires en présence d'une faible tension superficielle // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1990. V. 311. № 5. P. 265–268.
 49. Iooss G., Kirchgässner K. Water waves for small surface tension: an approach via normal form // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. 1992. V. 122 A. № 3/4. P. 267–299.
 50. Iooss G., Perouème M.C. Perturbed homoclinic solutions in reversible 1:1 resonance vector fields // J. Diff. Eqns. 1993. V. 102. № 1. P. 62–88.
 51. Kakutani K., Kawahara T., Taniuti T. Nonlinear hydromagnetic solitary waves in a collision-free plasma with isothermal electron pressure // J. Phys. Soc. Japan. 1967. V. 23. № 5. P. 1138–1149.
 52. Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. № 5. P. 1305–1318.
 53. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. № 1. P. 260–264.
 54. Kirchgässner K. Wave solutions of reversible systems and applications // J. Diff. Eqns. 1982. V. 45. № 1. P. 113–127.
 55. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and a new type of long stationary waves // Phil. Mag. (5). 1895. V. 39. P. 422–443.
 56. Лаврентьев М.А. До теории довших хвиль // Збірн. праць Ін-ту матем. АН УРСР. 1947. № 8. 13–69.
 57. Lombardi E. Orbits homoclinic to exponentially small periodic orbits for a class of reversible systems. Application to water waves // Arch. Rat. Mech. Anal. 1997. V. 137. № 3. P. 227–304.
 58. Longuet-Higgins M.S. Capillary-gravity waves of solitary type and envelope solitons on deep water // J. Fluid Mech. 1993. V. 252. P. 703–711.
 59. Марченко А.В. О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПИММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230–235.
 60. Mielke A. Reduction of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications // Math. Meth. Appl. Sci. 1988. V. 10. № 1. P. 501–566.
 61. Mielke A. Homoclinic and heteroclinic solutions in two-phase flow // Adv. Series Nonl. Dynamics: Structure and Dynamics of Nonlinear Waves in Fluids. Singapore: World. Scient., 1995. V. 7. P. 353–362.
 62. Miles J.W. Parametrically exited solitary waves // J. Fluid Mech. V. 148. P. 451–460.
 63. Pomeau Y., Ramani A., Grammaticos B. Structural stability of the Korteweg-de Vries solitons under a singular perturbation / Physica D. 1988. V. 31. № 1. P. 127–134.
 64. Sachs R.L. On the existence of small amplitude solitary waves with strong surface tension // J. Diff. Eqns. 1991. V. 90. № 1. P. 31–51.
 65. Sun S.M., Shen M.C. Exact theory of generalized solitary waves in a twolayer liquid in the absence of surface tension // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 180. № 1. P. 245–274.
 66. Yamamoto Y., Takizawa E. On a solution of nonlinear time evolution equation of fifth order // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 5. P. 1421–1422.
 67. Vanderbauwhede A., Iooss G. Center manifold theory in infinite dimensions // Dynamics Reported. Berlin: Springer. 1992. V. 1. P. 125–163.
 69. Zufiria J. Symmetry breaking in periodic and solitary gravity-capillary waves on water of finite depth // J. Fluid. Mech. 1987. V. 184. P. 183–206.