

УДК 532.5.013.4:536.25:534.23

© 2000 г. Д.В. ЛЮБИМОВ

О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрена тепловая вибрационная конвекция в случае, когда длина звуковой волны на частоте вибраций сравнима с размерами полости. Получены уравнения пульсационного и усредненного движения среды, обобщающие известные уравнения термовибрационной конвекции. Сформулированы эффективные граничные условия для средних полей на твердых границах. Решена задача об устойчивости квазиравновесия подогреваемого снизу плоского горизонтального слоя жидкости, совершающего высокочастотные вибрации. Показано, что эффекты сжимаемости могут оказывать существенное влияние, даже когда длина звуковой волны значительно превосходит длину слоя. Обнаружено дестабилизирующее влияние сжимаемости, которое может приводить к неустойчивости слоя даже в условиях невесомости.

Вибрационные воздействия могут генерировать средние течения в неоднородно нагретой жидкости. Исследования в этой области начались с работы [1], в которой на основе приближения Буссинеска методом осреднения были получены уравнения вибрационной конвекции для высокочастотных, но неакустических вибраций. Начиная с работы [2], был осуществлен цикл исследований по вибрационной конвекции в условиях невесомости и при различных осложняющих факторах. Обзор исследований в этом направлении приведен в книге [3]. В [4] было обращено внимание на то обстоятельство, что при неоднородных вибрациях (например, при качательных вибрациях или при наличии деформируемой свободной поверхности) уже нельзя пользоваться приближением Буссинеска при построении осредненного описания. Было показано, что добавочные слагаемые в уравнении движения, имеющие вибрационное происхождение, имеют первый порядок по параметру Буссинеска, в то время как при однородных вибрациях термовибрационный эффект является эффектом второго порядка. В [3, 4] были получены осредненные уравнения для различных случаев неоднородных вибраций и сформулированы эффективные граничные условия, учитывающие генерацию средней завихренности в вязких скин-слоях. Разработанный подход позволил решить целый ряд конкретных задач [5–8]. Однако во всех этих исследованиях рассмотрение было ограничено неакустическими вибрациями, т.е. такими, при которых длина звуковой волны на частоте вибраций много больше размеров полости. В настоящей работе рассматривается случай, когда длина акустической волны сравнима с размерами задачи.

1. Исходные уравнения. При описании поведения жидкости будем исходить из уравнений Навье – Стокса, общего уравнения переноса тепла и уравнения баланса массы, записанных в виде [9]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \text{Div } \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\text{Tr} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S \right) = \text{div}(\boldsymbol{\kappa} \nabla T) + D_v$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0$$

Здесь κ – коэффициент теплопроводности, T – абсолютная температура, ϵ – тензор вязких напряжений, D_v – диссипативная функция, S – удельная энтропия, остальные обозначения – обычные.

Будем считать, что состояние системы мало отличается от некоторого равновесного с плотностью ρ_0 , температурой T_0 , удельной энтропией S_0 , и запишем линеаризованное уравнение состояния

$$\rho - \rho_0 = \frac{p - p_0}{c^2} + \sigma \quad (1.2)$$

$$\sigma = -(\gamma - 1) \frac{\rho_0}{\beta c^2} (S - S_0) = -\rho_0 \beta (T - T_0) + (\gamma - 1) \frac{p - p_0}{c^2} \quad (1.3)$$

Здесь $\gamma = C_p/C_v$ – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, c – адиабатическая скорость звука, β – изобарический коэффициент объемного расширения.

Уравнения (1.1) – (1.3) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения полей скорости, температуры, давления, плотности и энтропии. Однако система (1.1) – (1.3) содержит в некотором смысле слишком много информации. Для практических применений важно знать поведение конвективной системы на больших временах, заведомо больших периода вибраций.

Использование осредненного описания, основанного на существенном различии в характерных акустических и диссипативных временах, позволяет значительно упростить рассмотрение и корректно учесть как тепловые, так и акустические эффекты.

2. Пульсационные поля. Представим все поля в виде сумм пульсационных и осредненных частей: $F = \langle F \rangle + F'$, где $\langle F \rangle$ – осредненная по периоду акустических колебаний часть F , которая, однако, может медленно эволюционировать, а F' – пульсационная добавка.

Предположим, что амплитуда a смещения частиц в акустической волне мала: $a \ll l$, где $l = \min(\lambda, L)$, λ – длина звуковой волны, L – характерный размер задачи. В дозвуковой области это совпадает с обычным для вибрационной конвекции условием малости амплитуд вибраций по сравнению с размерами полости, в акустической области это условие означает малость чисел Маха пульсационного течения. Будем считать, что толщина δ вязкого скин-слоя мала: $\delta = \sqrt{\nu/\omega} \ll l$, где ν – кинематическая вязкость. Это условие с учетом определения l приводит к двустороннему неравенству для частоты: $\nu/L^2 \ll \omega \ll c^2/\nu$.

Для большинства практически важных ситуаций оба эти неравенства выполняются с большим запасом. Будем считать также, что средние скорости u не слишком велики: $u \ll l\omega$. В акустической области последнее неравенство означает малость чисел Маха среднего течения. Изменения плотности, возникающие из-за гидростатического перепада давлений, и изменения температуры предполагаются малыми: $gh \ll c^2$, $\beta\theta \ll 1$, где θ – характерная разность температур.

Таким образом, проблема характеризуется наличием шести малых параметров

$$\frac{a}{l}, \frac{\delta}{l}, \frac{g}{l\omega}, \frac{u}{l\omega}, \frac{gh}{c^2}, \beta\theta$$

Задачей асимптотической теории является получение уравнений, не содержащих малых параметров, кроме, может быть, их отношений.

Оставляя в уравнениях для пульсаций главные слагаемые, с учетом перечисленных условий получим из (1.1) – (1.3)

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{w} \times \langle \Omega \rangle) - \frac{1}{\rho_0^2} \nabla p' \times \nabla \langle \sigma \rangle$$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\mathbf{w} \nabla \langle \sigma \rangle, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v}', \quad \mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle$$

Первые два уравнения (2.4) являются обычными уравнениями линейной акустики. Из (2.4) следует, что в главном порядке поле пульсационной скорости является потенциальным. Действительно, применив операцию rot к первому уравнению (2.4), получаем, что $\text{rot } \mathbf{w}$ не зависит от (быстрого) времени, а поскольку среднее значение $\mathbf{w} = 0$, то $\text{rot } \mathbf{w} = 0$. Это приближение, однако, является недостаточным для получения уравнений среднего движения. Дело в том, что осреднение рейнольдсовых напряжений при постоянной плотности и потенциальном течении приводит к градиентным слагаемым, роль которых сводится к перенормировке среднего давления, что в отсутствие свободных границ несущественно. Для корректного учета влияния вибраций на среднее течение наряду с переменной плотностью необходимо учесть непотенциальную составляющую пульсационного течения. Это удобно сделать, вычисляя пульсационную завихренность с помощью третьего уравнения (2.4).

Решение (2.4) удобно выразить через потенциал пульсационной скорости, удовлетворяющий волновому уравнению

$$\mathbf{w} = \nabla \Phi, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$$

Для пульсаций завихренности и температуры из (2.4) будем иметь

$$\Omega' = \text{rot}(\mathbf{f} \times \langle \Omega \rangle) + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{w} \times \nabla \langle \sigma \rangle, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \quad \langle \mathbf{f} \rangle = 0, \quad \sigma' = -\mathbf{f} \nabla \langle \sigma \rangle \quad (2.5)$$

где вектор \mathbf{f} имеет смысл пульсационного смещения частицы жидкости.

3. Средние поля. Подставляя решения (2.5) в уравнения (1.1) – (1.3) и производя усреднение, получим следующие уравнения термоакустической конвекции для осредненных полей:

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Omega \times (\mathbf{u} + \mathbf{S}) \right] + \frac{1}{2} \langle \mathbf{w}^2 \rangle \nabla \sigma = \nabla \Pi + \eta \Delta \mathbf{u} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{S}) \nabla \sigma = -\rho_0 \beta \chi \Delta T - \frac{\beta}{C_p} \langle D_w \rangle$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \sigma = -\rho_0 \beta T - \frac{\gamma - 1}{2c^2} \rho_0 \langle \mathbf{w}^2 \rangle$$

Здесь Π – перенормированное давление, $\eta = \nu \rho_0$ – коэффициент динамической вязкости, D_w – диссипативная функция, вычисленная по пульсационному полю скорости.

В (3.1) введен вектор пульсационного транспорта, определенный следующим образом:

$$\mathbf{S} = \langle (\mathbf{f} \nabla) \mathbf{w} \rangle \quad (3.2)$$

Вектор \mathbf{S} , называемый иногда переносом Стокса, был введен впервые в осредненные уравнения гидродинамики Лонге-Хиггинсом [10] в форме

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u} + \langle \int \mathbf{v}' dt \mathbf{v}' \rangle$$

совпадающей по существу с (3.2). Вектор \mathbf{S} имеет простой смысл: он определяет

разницу между средней скоростью жидкости в данной точке и средней скоростью жидкой частицы [15, 16]. Иными словами, сумма $\mathbf{u} + \mathbf{S}$ дает среднюю лагранжеву скорость переноса.

В различных конкретных ситуациях система (3.1) допускает дальнейшее упрощение. Удобнее это сделать, записав предварительно систему в безразмерных переменных. Выберем в качестве масштаба средней скорости v/L , времени – L^2/ν , пульсационной скорости – $a\omega$, температуры – характерную разность температур Θ , величины $\sigma - \rho_0\beta\Theta$, где L – характерный размер задачи, a и ω – амплитуда и частота вибраций.

Система уравнений (3.1) в безразмерной форме принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Omega \times (\mathbf{u} + \text{Re}_p \mathbf{S}) + \frac{1}{2} G_v \langle \mathbf{w}^2 \rangle \nabla \sigma = \nabla \Pi + \Delta \mathbf{u} - \text{Gr} \sigma \boldsymbol{\gamma} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{u} + \text{Re}_p \mathbf{S}) \nabla \sigma = -\frac{1}{\text{Pr}} \Delta T - \frac{Q}{B} \langle D_w \rangle$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \sigma = -T - \frac{1}{2} Q \langle \mathbf{w}^2 \rangle$$

$$\mathbf{w} = \nabla \Phi, \quad \Delta \Phi + A_c \Phi = 0$$

$$\text{Re}_p = \frac{a^2 \omega}{\nu}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta \Theta L^3}{\nu^2}, \quad G_v = \frac{a^2 \omega^2 \beta \Theta L^2}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

$$Q = (\gamma - 1) \frac{a^2 \omega^2}{c^2 \beta \Theta}, \quad B = \beta T, \quad A_c = \frac{\omega^2 L^2}{c^2}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Уравнения (3.3) содержат следующие безразмерные параметры: Re_p – пульсационное число Рейнольдса, Gr – обычное число Грасгофа, G_v – вибрационное число Грасгофа, Pr – число Прандтля, Q – адиабатический параметр.

Естественно, что в отсутствие вибрационного воздействия ($\text{Re}_p = 0$, $G_v = 0$, $Q = 0$, $A_c = 0$) эти уравнения переходят в обычные уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска [11].

Простейший случай акустического воздействия – распространение плоской волны. Пусть потенциал акустического поля имеет вид (в размерной форме)

$$\Phi = a \cos(\omega t - kx), \quad k = \omega/c$$

В этом случае все средние величины, определяемые акустическим полем, пространственно однородны. В частности, это относится к энергии пульсаций $\langle \mathbf{w}^2 \rangle$ и к вектору Стокса \mathbf{S} . Это означает, что σ лишь на несущественную константу отличается от T . Пренебрегая тепловыделением от акустической волны, приходим в результате снова к уравнениям тепловой конвекции в приближении Буссинеска [11], где, однако, под скоростью следует понимать среднюю лагранжеву скорость. Это отличие следует иметь в виду при формулировке граничных условий.

Ограничимся обсуждением граничных условий в случае твердых границ. Поскольку толщина вязкого пограничного слоя предполагается малой по сравнению с размером полости, то распространение акустической волны рассматривается невязким во всем объеме, т.е. для пульсационной скорости на твердых границах необходимо поставить лишь условие непротекания. Однако внутри пограничного слоя генерируется осредненная завихренность, переносимая затем по всему объему жидкости [12]. Эту генерацию можно учесть, поставив для осредненной компоненты скорости эффективные граничные условия на внешней границе пульсационного скин-слоя. Например, если пульсационное поле скорости одномерно и имеет вид $W_x = \text{Re}(A e^{i\varphi})$ с некоторыми зависящими от x амплитудой A и фазой φ , то на твердой границе генерируется осред-

ненная скорость, которая в пренебрежении сжимаемостью может быть записана в виде [15]

$$u_x = \frac{3}{8\omega} \left(\frac{d}{dx} A^2 + 2A^2 \frac{d\phi}{dx} \right)$$

Обобщение результатов Шлихтинга [12] на случай сжимаемых жидкостей и трехмерных течений было сделано в [13], однако анализ [13] ограничен пульсационными полями с однородной фазой. Применяя те же методы, что и в [13], восходящие к более ранней работе Лонге-Хиггинса [10] и основанные в конечном счете на теории нестационарного пограничного слоя, приходим к следующему эффективному граничному условию:

$$\mathbf{u}|_{\infty} = -\frac{1}{4\omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \nabla \bar{V} + \left(1 - \frac{3}{2} i \right) \bar{V} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) - \frac{1}{4\rho_0 c^2} P \bar{V} + \text{к.с.}$$

где P, \mathbf{V} – амплитуды пульсационного давления и скорости, к.с. означает комплексно-сопряженные слагаемые.

Отметим, что в случае, когда возможно использование неакустического приближения, т.е. когда $A_c \ll 1$, система уравнений (3.3) переходит в уравнения вибрационной конвекции [4]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{u} + \operatorname{Re}_p \mathbf{S}) - \frac{1}{2} G_v \langle \mathbf{w}^2 \rangle \nabla T = \nabla \Pi + \Delta \mathbf{u} + \operatorname{Gr} T \gamma$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} + \operatorname{Re}_p \mathbf{S}) \nabla T = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{w} = \nabla \Phi, \quad \Delta \Phi = 0$$

Эта система отличается от уравнений [1] учетом пульсационного транспорта, независимостью пульсационного поля скорости от нагрева и, как следствие, иным характером зависимости вибрационного числа Грасгофа от параметра неизотермичности: G_v пропорционально первой степени $\beta\theta$, а не второй, как в [1].

4. Однородные вибрации, слабые акустические эффекты. Когда акустические эффекты малы и главная часть пульсационного поля пространственно однородна, главная часть вибрационной силы в уравнении движения становится потенциальной и, следовательно, не оказывает влияния на движение жидкости в замкнутой полости с твердыми стенками. В этом случае необходимо вычислить пульсационную энергию более точно с учетом старших слагаемых в разложении пульсационных полей, т.е. учесть вихревую составляющую пульсационного поля не только при вычислении пульсационного переноса, но и при вычислении вибрационной силы. В пренебрежении акустическими эффектами при однородных вибрациях пульсационное поле скорости возникает (в системе отсчета сосуда) лишь при наличии температурных неоднородностей, в результате термовибрационный эффект оказывается эффектом второго порядка по параметру Буссинеска. Именно этот случай исследовался в [1, 2]. Если вибрации слабо неоднородны, то наряду с эффектами первого порядка по $\beta\theta$, обусловленными неоднородностью вибраций, необходимо учитывать и эффекты второго порядка по $\beta\theta$. На этом пути изучались термовибрационные эффекты при качательных вибрациях с большим плечом качаний в [14].

Слабо неоднородными следует считать и вибрации акустического типа, если длина звуковой волны значительно превосходит размеры области с жидкостью. Получим уравнения для пульсационной скорости в этом случае. Пусть сосуд совершает колебания с частотой ω и амплитудой a вдоль направления, задаваемого единичным вектором \mathbf{j} . Удобно перейти в систему отсчета, связанную с сосудом, тогда пульсационная скорость в лабораторной системе отсчета \mathbf{w} , входящая в осредненные урав-

нения, запишется в виде

$$w = a\omega j \sin \omega t + v'$$

Линеаризованные уравнения для пульсаций скорости v' , давления p' , плотности ρ' и температуры ϑ' примут вид

$$\rho \frac{\partial v'}{\partial t} = -\nabla p' - \rho a \omega^2 j \cos \omega t \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v' = 0, \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + v' \nabla \langle \sigma \rangle = 0$$

$$\rho' = \frac{1}{c^2} p' + \sigma', \quad \sigma' = -\rho_0 \beta \vartheta' + \frac{\gamma - 1}{c^2} p'$$

Выделяя явно зависимость от быстрого времени и переходя к безразмерным переменным, получаем из (4.1) уравнения для амплитуд пульсационных полей

$$\rho \omega V = -\nabla p' - \rho a \omega^2 j \quad (4.2)$$

$$\rho' = \xi \operatorname{div} \rho V = \xi A_c p' + \sigma'$$

$$\sigma' = \xi v' \nabla \langle \sigma \rangle = -\varepsilon \vartheta' + (\gamma - 1) \xi A_c p'$$

$$\rho = 1 + \alpha p + \langle \sigma \rangle, \quad \langle \sigma \rangle = -\varepsilon T + (\gamma - 1) \alpha p$$

$$\xi = \frac{a}{L}, \quad \varepsilon = \beta \theta, \quad \alpha = \frac{v^2}{L^2 c^2}, \quad A_c = \frac{\omega^2 L^2}{c^2}$$

Здесь $\xi, \varepsilon, \alpha, A_c$ – малые параметры.

Будем считать ξ, ε, A_c имеющими первый порядок малости, а параметр α – второй порядок. Тогда в главном и следующем порядке разложения из (4.2) имеем

$$\rho'_0 = 0, \quad \sigma'_0 = 0, \quad \langle \sigma_0 \rangle = 0, \quad V_0 = -\nabla p'_0 - j \quad (4.3)$$

$$V_1 + \rho_1 V_0 = -\nabla p'_1 - \rho_1 j$$

$$\rho'_1 = \xi \operatorname{div} V_0 = \sigma'_1 = \xi V_0 \nabla \langle \sigma_0 \rangle = -\varepsilon \vartheta'_0$$

$$\rho_1 = \langle \sigma_1 \rangle = -\varepsilon T_0 \quad (4.4)$$

Отсюда следует, что

$$\rho'_1 = 0, \quad \sigma'_1 = 0, \quad \vartheta'_0 = 0, \quad V_0 = 0$$

$$V_1 = -\nabla p'_1 - \rho_1 j \quad (4.5)$$

В следующем порядке имеем

$$\rho'_2 = \xi \operatorname{div} V_1 = \xi A_c p'_0 \quad (4.6)$$

Из (4.5), (4.6) получаем уравнения для главной части пульсационного поля

$$\operatorname{rot} V_1 = j \times \nabla \rho_1, \quad \operatorname{div} V_1 = A_c p'_0 \quad (4.7)$$

Используя (4.3), (4.4) и опуская индексы, приводим эти уравнения к виду

$$\operatorname{rot} V = \varepsilon \nabla T \times j, \quad \operatorname{div} V = -A_c z \quad (4.8)$$

Здесь z – координата вдоль направления оси вибраций. При записи (4.8) начало координат предполагается выбранным в геометрическом центре области, т.е. в точке, совпадающей с центром масс однородной среды, заполняющей область. Такой выбор обусловлен тем, что, как следует из (5.7), p'_0 должно удовлетворять условию разре-

шимости

$$\int_V p'_0 dV = 0$$

Нетрудно видеть, что для рассматриваемого типа вибраций вектор пульсационного транспорта обращается в нуль. Необходимо также теперь отбросить слагаемое с вязким тепловыделением в уравнении теплопроводности. В результате получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{jV}) \nabla T = \nabla \Pi + \Delta \mathbf{u} + \text{Gr } T \gamma \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla T = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{V} = G_{\text{gr}} \nabla \vartheta \times \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{V} = -G_{\text{gr}} z$$

$$G_{\text{gr}} = G_v \varepsilon = \frac{a^2 \omega^2 \beta^2 \theta^2 L^2}{\nu^2}, \quad G_{\text{gr}} = G_v A_c = \frac{a^2 \omega^2 \beta \theta L^4}{\nu^2 c^2}$$

Таким образом, в приближении слабой акустики эффекты влияния температурной неоднородности и сжимаемости на пульсационное поле скорости оказываются аддитивными. При $G_{\text{gr}} \rightarrow 0$ система уравнений (5.9) переходит в уравнения [1]. Отметим также, что эффективная вибрационная сила в уравнении движения с точностью до несущественных градиентных слагаемых может быть записана в виде: $1/2 T \nabla (\mathbf{jV})$, что позволяет интерпретировать вибрационную силу как действие некоторого эффективного, вообще говоря неоднородного гравитационного поля.

5. Устойчивость квазиравновесия жидкости в горизонтальном слое при вертикальных вибрациях. В качестве примера применения полученных уравнений термоакустической конвекции рассмотрим задачу о неустойчивости квазиравновесия в горизонтальном подогреваемом снизу слое, подвергнутому вертикальным высокочастотным вибрациям.

Рассмотрим поведение жидкости в горизонтальном слое, ограниченном плоскостями $z = 0$ и h , находящимися при температурах $T = \Theta$ и $T = 0$ соответственно. Слой подвергается вертикальным вибрациям с амплитудой a и частотой ω . В этих условиях возможно состояние квазиравновесия, в котором жидкость совершает лишь колебательное одномерное движение вдоль оси вибраций, в то время как осредненное движение отсутствует. Исследуем устойчивость этого состояния.

В случае неакустических вибраций ($\omega \gg c/h$) при полном пренебрежении сжимаемостью находимся в условиях применимости уравнений работы [1], где данная задача обсуждалась для случая модельных граничных условий. Подробные результаты для случая твердых границ можно найти в [3].

При $A_c \ll 1$, но при больших G_v , как показано выше, нельзя, вообще говоря, пренебрегать сжимаемостью и необходимо использовать уравнения (4.9).

Выбрав толщину слоя h в качестве характерного размера и величину Θ в качестве единиц температуры, получим из (4.9) с учетом граничных условий непроницаемости для основного состояния

$$\mathbf{V} = (0, 0, V_0), \quad V_0 = -\frac{1}{2} G_{\text{gr}} z(1-z), \quad T = T_0 = -z, \quad \mathbf{u} = 0$$

Линеаризуя (4.9) около основного состояния, получим спектрально-амплитудную задачу для нормальных возмущений ($\sim \exp(\lambda t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, λ – инкремент, \mathbf{k} – волновой вектор)

$$\lambda D w = D^2 w - k^2 \left(\text{Ra } \vartheta + \frac{1}{2} R_{\text{gr}} \left(z - \frac{1}{z} \right) \vartheta - \frac{1}{2} R_{\text{gr}} w \right) \quad (5.1)$$

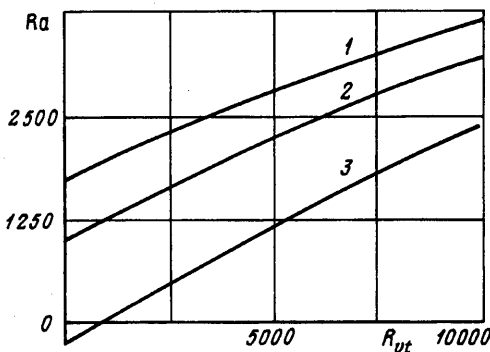
$$\lambda \text{Pr } \vartheta = D \vartheta + w, \quad D W = k^2 \vartheta, \quad D = \frac{d^2}{dt^2} - k^2$$

$$z = 0, 1: \quad w = \frac{dw}{dz} = \vartheta = W = 0$$

Здесь $R_{va} = G_{va} \text{Pr}$, $R_{vt} = G_{vt} \text{Pr}$, w, W – вертикальные компоненты осредненной и пульсационной скорости соответственно.

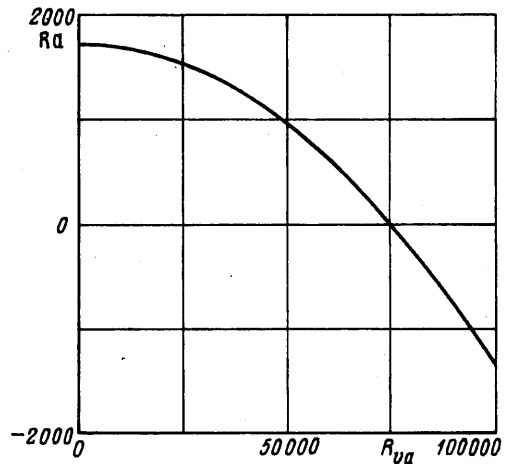
Задача (5.1) решалась численно с помощью метода дифференциальной прогонки. Оказалось, что в исследованной области параметров наиболее опасными являются монотонные возмущения. Зависимости критических чисел Рэля Ra , проминимизированных по волновому числу k , от вибрационного числа Рэля R_{vt} для различных R_{va} приведены на фиг. 1. Случаю $R_{va} = 0$ соответствует полное пренебрежение сжимаемостью, при этом кривая $Ra(R_{vt})$ совпадает с приведенной в [3]. При всех R_{va} значение Ra монотонно растет с увеличением R_{vt} . Учет сжимаемости приводит к уменьшению критического числа Рэля, вплоть до появления неустойчивости в условиях невесомости ($Ra = 0$) и при нагреве сверху ($Ra < 0$). Такое влияние сжимаемости легко понять. Как видно из (5.1), неоднородность пульсационного поля приводит к появлению эффективной, зависящей от вертикальной координаты силы тяжести, так что даже в условиях невесомости половина слоя имеет потенциально неустойчивую стратификацию. Как показывают расчеты, при $R_{vt} = 0$ для наиболее опасных возмущений движение оказывается сосредоточенным именно в этой половине слоя, а длина волны критических возмущений уменьшается с ростом R_{va} .

Для того чтобы влияние сжимаемости стало существенным, необходимы достаточно большие значения R_{va} , что при малых A_c может затруднить экспериментальную реализацию. В этой связи представляет интерес рассмотрение устойчивости квазиравновесия при конечных A_c , когда необходимо пользоваться уравнениями (3.3). Хотя в этом случае не следует учитывать влияние температурной неоднородности на пульсационное поле, обсуждавшийся выше механизм дестабилизации по-прежнему должен иметь место. Расчеты, проводимые по схеме, аналогичной приведенной выше, подтвердили такое предположение. В качестве иллюстрации на фиг. 2 приведена зависимость критического значения числа Рэля Ra от $R_{vt} = G_{vt} \text{Pr}$ при $A_c = 1$. Как видно, имеет место монотонное уменьшение устойчивости с ростом R_{vt} вплоть до появления неустойчивости в условиях невесомости и при нагреве сверху.



Фиг. 1

Фиг. 1. Зависимость критических значений чисел Рэля Ra от параметра R_{vt} при $R_{va} = 0, 4 \cdot 10^4; 8 \cdot 10^4$ (кривые 1–3)



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость критических значений чисел Рэля Ra от параметра R_{va} при $A_c = 0$

Заключение. Учет сжимаемости существенно изменяет описание термовибрационной конвекции в жидкости, подверженной высокочастотным вибрациям. Обычно принимаемое предположение о большой длине акустической волны по сравнению с размерами области, занятой жидкостью, недостаточно для полного пренебрежения сжимаемостью. Отношение размеров области к длине звуковой волны играет роль, во многом аналогичную параметру Буссинеска $\beta\theta$: несмотря на малость этого параметра, он должен учитываться, так как входит в уравнение в произведении с большим параметром. Тем более сильными оказываются эффекты сжимаемости, когда длина звуковой волны сравнима или меньше размеров области. В этих случаях неоднородность пульсационного поля скорости, связанная со сжимаемостью, достаточна для появления термовибрационной силы даже без учета влияния температурной неоднородности на поле пульсационной скорости.

Анализ задачи об устойчивости квазиравновесия жидкости, заполняющей горизонтальный слой, совершающий высокочастотные вертикальные колебания, показывает, что наряду с известным стабилизирующим действием вибраций, параллельных градиенту температуры, имеет место дестабилизирующий эффект, связанный со сжимаемостью. Природа этого эффекта заключается в появлении эффективной термовибрационной силы, аналогичной силе тяжести, но неоднородной по пространству, что приводит к появлению области с потенциально неустойчивой стратификацией даже в условиях невесомости.

Работа выполнена при частичном финансировании из средств гранта Государственной программы поддержки ведущих научных школ (код проекта 96-015-96084).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1996. № 5. С. 51–55.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 580–584.
3. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal Vibrational Convection. N.Y. et al.: Wiley, 1998. 358 p.
4. Lyubimov D.V. Convective flows under the influence of high-frequency vibrations // Europ. J. Mech. B/Fluids. 1995. V. 14. № 4. P. 439–458.
5. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Ру Б., Черепанов А.А. Течение, индуцированное колеблющейся нагретой сферой // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 31–39.
6. Lyubimov D., Lyubimova T., Roux B. Mechanisms of vibrational control of heat transfer in a liquid bridge // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1997. V. 40. № 17. P. 4031–4042.
7. Lyubimov D.V., Lyubimova T., Roux B., Volfson D.N. Vibrational flows in the gap between two infinite cylinders // Europ. J. Mech. B/Fluids. 1997. V. 16. № 5. P. 705–724.
8. Lyubimov D., Lyubimova T.P., Meradji S., Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase // J. Crystal Growth. 1997. V. 180. P. 648–659.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Longuet-Higgins M.S. Mass transport in water waves // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 245. № 903. P. 535–581.
11. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
13. Ниборг В. Акустические течения // Физическая акустика. Свойства полимеров и нелинейная акустика. М.: Мир, 1969. Т. 2. Ч. Б. С. 302–377.
14. Козлов В.Г. О вибрационной тепловой конвекции в полости, совершающей высокочастотные вращательные качания // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 138–144.
15. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
16. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоздат, 1980. 319 с.