

УДК 533.6.011.7+534.2

© 2000 г. С.В. СУХИНИН

ЗОЛОВЫ ТОНА РЕШЕТКИ ПЛАСТИН

Предложена модель аэроакустических резонансных явлений (эоловых тонов) около решетки пластин в потоке газа. Разработаны методы вычисления частот собственных акустических колебаний около решеток пластин. Исследовано влияние геометрических характеристик решеток и числа Маха основного потока газа на частоты, количество и вид собственных колебаний. Обнаружены и исследованы аномальные акустические колебания около циклической решетки пластин. Показано, что всегда существует не менее двух частот собственных колебаний газа около любой нетривиальной циклической решетки пластин. Обнаружено, что частоты собственных колебаний могут быть объединены в пучки, для большого числа пластин в периоде частоты каждого пучка сколь угодно плотно заполняют некоторый интервал. Проведена классификация собственных колебаний по виду собственных функций, основанная на теории представлений групп локально-плоских симметрий циклической решетки пластин в пространстве решений. Корректность предложенной модели аэроакустических резонансных явлений (эоловых тонов) около решетки пластин в потоке газа подтверждена сравнением с известными экспериментальными и теоретическими исследованиями. На основании проведенных исследований предсказаны физические явления, неизвестные ранее: доказано существование зон частот или интервалов изменения числа Маха основного потока газа, для которых существуют аэроакустические резонансные явления около циклической решетки с большим числом пластин в периоде; показано, что для некоторых частот собственных колебаний около циклической решетки пластин возможна локализация резонансных колебаний в окрестности источника; доказано существование узкополосных волновых пакетов, медленно распространяющихся вдоль решетки.

В первых исследованиях аэроакустических резонансных явлений около решетки пластин в потоке газа в прямоугольном канале [1, 2] показано, что колебания газа могут быть чисто акустическими, они не связаны с колебаниями пластин и обусловлены упорядоченными структурами в следах за пластинами. В этих же работах проведена классификация мод резонансных колебаний, экспериментально и численно исследована зависимость резонансных частот от геометрических параметров решетки. Обычно такие колебания называются вихревым звуком или эоловыми тонами [3]. Аэроакустические резонансные явления около пластины в прямоугольном канале в двумерной постановке экспериментально и теоретически исследованы в [4], там же содержится дальнейшая библиография. При помощи математической модели эоловых тонов около пластины в канале, предложенный в [4], в [5] проведены исследования зависимости частот собственных колебаний от геометрических параметров.

Экспериментальные и теоретические исследования аэроакустических и резонансных колебаний газа около решеток пластин можно подразделить на два направления.

1. Изучение акустических резонансных свойств неограниченного объема газа.

С математической точки зрения исследование затруднено тем, что частоты, соответствующие собственным акустическим колебаниям неограниченного объема газа, как правило, погружены в непрерывный спектр частот, соответствующих обобщенным собственным колебаниям.

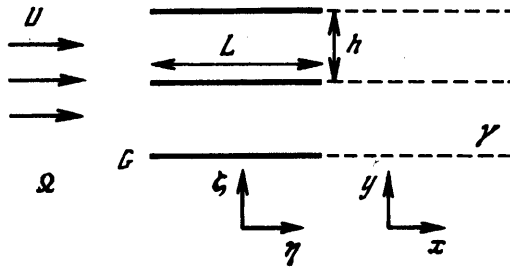
2. *Исследование природы источника колебаний.* Объектом исследования являются образование и развитие когерентных структур в следах за пластинами решетки, влияющие упорядоченных структур на акустические колебания и влияние этих колебаний на упорядоченные структуры.

Понятие резонансных частот колебаний потока газа около решетки пластин зависит от выбора их источника. Например, в [6–9] считается, что источники колебаний являются внешними по отношению к решетке пластин и вихревые следы, сходящие с кромок пластин решетки, поглощают энергию акустических колебаний. В этом случае частоты акустических колебаний (неэоловых тонов) являются реальной частью комплексного числа – квазисобственной частоты, а соответствующие квазисобственные функции возрастают как экспонента при удалении от решетки. Поэтому использованная в [6–9] математическая модель не описывает эоловы тона (аэроакустические резонансные явления) решетки пластин. Формулировка и обоснование математической модели, описывающей неэоловы акустические резонансные явления около решетки пластин, содержится в [10].

В настоящей работе считается, что источником колебаний газа около решетки является цепочка вихрей (когерентные структуры), сходящих с кромок пластин. Явление аэроакустического резонанса – повышение амплитуды и интенсивности акустических колебаний около решетки пластин – служит примером реализации таких условий течения, при которых наличие когерентных структур и акустические резонансные свойства неограниченной области основного потока газа имеют определяющее значение для течения в целом. В рамках линейного приближения акустическая и вихревая моды потока газа взаимодействуют только на элементах решетки и стенках каналов, поэтому акустические колебания газа около решетки пластин вынужденные, вихревая мода определяет источник колебаний, а эоловы тона являются резонансными акустическими колебаниями.

После преобразований Прандтля – Глауэрта акустические колебания около решетки, обусловленные вихревыми структурами, описываются неоднородной краевой задачей Неймана для уравнения Гельмгольца [11] и исследование эоловых тонов сводится к изучению резонансных явлений или собственных колебаний в неограниченной области. Эта задача является одной из фундаментальных в теории электродинамики решеток и на физическом уровне строгости исследована в [12, 13]. Более полное исследование распространения волн около одномерно-периодической ножевой решетки, а также дальнейшая библиография содержатся в [14, 15]. Распространение волн около одномерно-периодических цепочек произвольных препятствий изучены в [16]. В настоящей работе, основываясь на [12–16], исследованы аэроакустические колебания потока газа (эоловы тона) около циклических решеток пластин.

До конца не выясненным вопросом остается условие Кутта – Жуковского на кромках схода с пластин слабо нестационарного потока [17]. В рамках линейной теории ответа на этот вопрос скорее всего не существует, так как взаимодействие вихревых и акустических колебаний в окрестности кромки схода существенно нелинейное. В самом деле, известно [18], что поле скоростей возмущения основного потока v , которое описывается решением линеаризованных на постоянном основном потоке уравнений движения невязкого газа, можно разложить на сумму акустической и вихревой мод $v = v_a + v_v$, которые взаимодействуют между собой только на твердых границах области колебаний, на которых выполнено условие непротекания для суммы мод. Однако прямым вычислением можно проверить, что это разложение нарушается в точках (кромках) схода, так как в этих точках, согласно линейной модели, находятся точечные источники акустических колебаний – точки рождения когерентных вихревых структур. Поэтому можно считать, что разложение на вихревую и акустическую моды справедливо во всей области течения, за исключением кромок схода, а описание неизвестной особенности решения в этих кромках содержится в вихревой моде (это согласуется с точкой зрения [19]).



Фиг. 1. Область акустических колебаний

Влияние акустических волн на источник звука необходимо учитывать только при появлении акустических резонансных явлений в рамках нелинейной постановки задачи. Поэтому выполнения условия Кутта – Жуковского для акустической моды эоловых колебаний не требуется, дополнительным условием для этой моды, определяемым физическим содержанием исследуемого явления, будет условие конечности энергии акустических колебаний в периоде цикличности. Вихревая мода основного потока входит в описание акустических колебаний в виде источников акустических колебаний (неоднородные граничные условия и уравнения, описывающие акустическую моду).

Если считать, что условие Кутта – Жуковского справедливо для нестационарного потока, то оно должно быть выполнено для вихревой моды либо для вихревой моды и источников акустических колебаний, находящихся в кромках схода основного потока с пластин решетки. Исследование этого вопроса выходит за рамки настоящей публикации. Обзор и библиография, посвященная условию Кутта – Жуковского нестационарного потока, содержатся в [17].

1. Формулировка и свойства симметрии задачи. Предполагается, что колебания описываются двумерными задачами, газ невязкий, пластины решетки расположены параллельно основному постоянному потоку газа.

Терминология и обозначения. Геометрия течения и область акустических колебаний представлены на фиг. 1. Здесь U – скорость основного потока, Ω – область колебаний, G – решетка пластин, L – хорда пластин решетки, γ – вихревые следы, η, ζ – размерные, x, y – безразмерные декартовы пространственные переменные, начало координат во всех случаях совпадает с серединой профиля одной из пластин решетки, e_x, e_y – единичные векторы в направлении соответствующих осей координат. Решетка пластин является периодической по пространству с минимальным периодом, равным h – расстоянию между соседними пластинами.

Уравнения и граничные условия. Акустические и вихревые колебания можно считать установившимися по времени. Потенциал акустического возмущения скорости основного потока имеет вид $u(\eta, \zeta; t) = u(\eta, \zeta) \exp(i\omega t)$, здесь ω – круговая частота колебаний, i – мнимая единица, направление оси η – вдоль потока (фиг. 1). В области колебаний Ω справедливо уравнение [11]

$$(1 - M^2)u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 2i\omega \frac{M}{c} u_{\eta} + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \quad (1.1)$$

где M – число Маха основного потока; c – скорость звука. На G должны быть выполнены условия непротекания, справедливые для суммы акустической и вихревой мод, последняя считается известной функцией: $\mathbf{v}_v = v_{v\eta} \mathbf{e}_\eta + v_{v\zeta} \mathbf{e}_\zeta$ [18]

$$u_{\zeta}(\eta, \zeta) = -v_{v\zeta}(\eta, \zeta) |_{(\eta, \zeta) \in G} \quad (1.2)$$

Вид (1.1) можно упростить, если сделать преобразование Прандтля – Глауэрта [11] – искать решение в виде $u(\eta, \zeta) = u'(\eta, \zeta) \exp\{M\omega\eta[c(1 - M^2)]^{-1}\}$ и ввести переменные

$x = \eta(h\sqrt{1-M^2})^{-1}$, $y = \zeta/h$. Далее, если не оговорено иное, будут использованы безразмерные переменные. В переменных x, y (1.1) имеет вид (штрих над $u(x, y)$ опущен)

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0 \quad (1.3)$$

$$\lambda = h\omega(c\sqrt{1-M^2})^{-1} = 2\pi fh(c\sqrt{1-M^2})^{-1}$$

Здесь λ – безразмерная циклическая частота, $f = \omega/2\pi$ – частота колебаний, измеряемая в герцах. В безразмерных переменных шаг решетки равен единице, хорде пластин L соответствует безразмерная величина $L' = L(h\sqrt{1-M^2})^{-1}$, далее штрих опущен. Условие (1.2) принимает вид

$$u_x(x, y) = -v_1(x, y)|_{(x, y) \in G} \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3) и (1.4) описывают установившиеся вынужденные акустические колебания около решетки, источником которых является вихревая мода. Решение (1.3), (1.4) можно искать в виде $u(x, y) = u^0(x, y) + w(x, y)$, где $w(x, y)$ – частное решение (1.3), которое удовлетворяет неоднородным граничным условиям (1.4), а $u^0(x, y)$ – решение (1.3), которое удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u_x(x, y)|_{(x, y) \in G} = 0 \quad (1.5)$$

Для описания эоловых тонов решетки пластин в канале или лопаток турбомашин допустимые решения должны удовлетворять условию периодичности (циклическости) по соответствующей пространственной переменной.

Определение 1. Если существует такое натуральное N (период циклическости), что $G = G + Ne_y$, то решетка пластин G называется циклической, колебания около циклической решетки пластин называются циклическими и удовлетворяют условию

$$u(x, y + N) \equiv u(x, y) \quad (1.6)$$

Область изменения пространственных переменных можно сузить на период циклическости $\Omega' = \Omega \cap \{(x, y) : 0 \leq y \leq N\}$, далее штрих опущен. Из физического содержания исследуемого явления следует, что решение (1.3), (1.5) в периоде циклическости должно удовлетворять условию конечности энергии

$$\int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) d\Omega < \infty \quad (1.7)$$

которое эквивалентно локализации колебаний в окрестности решетки пластин.

Далее (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) – называется задачей A (aeolian tones); (1.3), (1.5), (1.6), (1.7) – называется задачей E (eigen oscillations).

Свойства симметрии. Так как оператор Лапласа инвариантен относительно любых локально-плоских симметрий, то допускаемая группа симметрий задачи A определена группой симметрий вихревой моды и решетки. Для задачи E группа допускаемых симметрий полностью определена симметрией решетки. Представление группы симметрий в пространстве решений позволяет сузить пространство допускаемых решений задачи на инвариантные относительно преобразований симметрии подпространства. Это упрощает исследование.

По определению G , ее группа симметрий S_G содержит подгруппу трансляций $\{T_1\}$, порожденную $T_1\langle(x, y)\rangle = (x, y + 1)$, $T_n = (T_1)^n$; если N – период циклическости, то $T_N = (T_1)^N = I$ – тождественное преобразование. Возможны следующие подгруппы группы допустимых симметрий [20]: D_1 – группа диэдра с одной осью зеркальной симметрии; D_2 – группа диэдра с двумя осями зеркальной симметрии. Возможны два типа зеркальных симметрий: D_1^x – ось зеркальной симметрии параллельна оси x , например,

$D_1^x \langle (x, y) \rangle = (x, -y)$; D_1^y – ось зеркальной симметрии параллельна оси y , например, $D_1^y \langle (x, y) \rangle = (-x, y)$. Подгруппа трансляций $\{T_1\}$ группы S_G позволяет сузить область изменения независимых переменных на любую полосу (ленту) Ω^F шириной, равной единице вдоль направления периодичности.

Инвариантность задачи E относительно зеркальной симметрии позволяет разложить пространство допускаемых решений на четные и нечетные относительно оси симметрии решения. Так как исследуемые решетки пластин допускают группу $\{T_1\}$, то пространство допускаемых решений можно разложить на инвариантные относительно этой группы одномерные подпространства [21]. Для функций, которые принадлежат такому подпространству, для некоторого ξ , $-\pi \leq \xi \leq \pi$, выполняется

$$u(x, y+1) \equiv \exp(i\xi)u(x, y) \quad (1.8)$$

В силу (1.6) ξ принимает значения $\pi n/N$ ($-N/2 \leq n \leq N/2, n$ – целое) и является сдвигом фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций. Далее считается, что $\xi > 0$. В свободном пространстве (1.8) имеет вид

$$u(x, y) \equiv \exp(i\xi y)v(x, y), v(x, y+1) = v(x, y) \quad (1.9)$$

Задачу E с условием (1.8) назовем задачей $E(\xi)$. В настоящей работе рассматривается самосопряженное расширение оператора Лапласа в пространстве $L_2(\Omega)$ или соответствующие сужения этого расширения [22]. Задачу $E(\xi)$ в силу трансляционной симметрии достаточно исследовать в фундаментальной области группы трансляций $\Omega' = \Omega \cap \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1\}$. Далее штрих опущен. Пусть S_G содержит подгруппу зеркальных симметрий D_1^x относительно некоторой оси, параллельной x . Если $\xi \neq \pm \pi$ и $\xi \neq 0$, то в некотором базисе операторы, соответствующие представлению группы $\{T_1, D_1^x\}$ в пространстве решений, имеют вид

$$\tau(T_1) = \begin{pmatrix} \exp(i\xi) & 0 \\ 0 & \exp(-i\xi) \end{pmatrix}, \quad \tau(D_1^x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Если $\xi = 0$ или π , то возможны четыре одномерных представления группы $\{T_1, D_1^x\}$

$$\{\tau_1(T_1) = -1, \tau_1(D_1^x) = +1\}, \quad \{\tau_2(T_1) = -1, \tau_2(D_1^x) = -1\} \quad (1.11)$$

$$\{\tau_3(T_1) = +1, \tau_3(D_1^x) = +1\}, \quad \{\tau_4(T_1) = +1, \tau_4(D_1^x) = -1\}$$

Представление группы трансляций (1.8) справедливо для всех типов одномерно-периодических препятствий. Одномерные представления (1.11) группы $\{T_1, D_1^x\}$ справедливы для всех простых решеток.

2. Классификация, существование и вид собственных колебаний. Колебания около решетки пластин удобно классифицировать по допускаемым симметриям. Пусть $K = [N/2]$ – целая часть $N/2$. В силу цикличности и инвариантности задачи относительно $\{T_1\}$ общее решение $u_g(x, y)$ задачи E имеет вид

$$u_g(x, y) = \sum_{k=-K}^{k=K} u_k(x, y) \quad (2.1)$$

а функции $u_k(x, y)$ удовлетворяют (1.8)

$$u_k(x, y+1) \equiv \exp(i2\pi k/N)u_k(x, y), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm K \quad (2.2)$$

Исследование задачи E сводится к изучению $E(0)$ и $E(2\pi k/N)$, $k = \pm 1, \dots, \pm K$.

Классификация собственных колебаний. Классификацию колебаний можно уточнить согласно их физическому содержанию и свойствам симметрии.

Определение 2. Циклические колебания около решетки пластин называются волноводными, если они описываются задачами $E(2\pi k/N)$, $k = \pm 1, \dots, \pm K$. Собственные частоты (функции) этих задач называются волноводными частотами (функциями).

С физической точки зрения волноводные собственные функции описывают бегущие вдоль решетки волны, для которых $\xi = 2\pi k/N$ – волновое число, а $v = v(x, y)$ из (1.9) – амплитуда колебаний. В силу (1.10) и принципа суперпозиции существуют стоячие волны, соответствующие бегущим.

Определение 3. Если волноводная функция $u^*(x, y)$ четная (или нечетная) по оси абсцисс $u^*(x, y) = u^*(-x, y)$ (или $u^*(x, y) = -u^*(-x, y)$), то соответствующая мода собственных колебаний называется α -модой (или β -модой).

Понятие волноводных циклических колебаний справедливо только для $\xi \neq 0$.

Определение 4. Колебания около решетки пластин называются аномальными, если они описываются задачей $E(0)$. Соответствующие собственные функции и частоты называются аномальными. Четные (нечетные) по оси абсцисс аномальные собственные колебания называются γ -модой (δ -модой) собственных циклических колебаний.

С физической точки зрения аномальные функции описывают синфазные колебания во всех фундаментальных областях группы трансляций, волноводные собственные функции описывают циклические колебания, соответствующие бегущим вдоль решетки пластин волнам. В общем случае циклические колебания представляют собой линейную комбинацию волноводных и аномальных колебаний (2.1).

Вид собственных функций. Общее решение (1.3), (1.6) в свободном пространстве имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[iy(2\pi n + \xi)] [b_n^{(+)} \exp(-x\beta_n) + b_n^{(-)} \exp(x\beta_n)] \quad (2.3)$$

$$\beta_n = \sqrt{(2\pi n + \xi)^2 - \lambda^2}$$

Собственная функция $u(x, y)$ удовлетворяет условию (1.7). В силу (2.3) это возможно тогда и только тогда, когда в свободном пространстве

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} b_n^{(+)} \\ b_n^{(-)} \end{matrix} \right\} \exp[iy(2\pi n + \xi)] \exp(-|x|\beta_n) \quad (2.4)$$

где $\text{Re}(\beta_n) > 0$ для всех слагаемых, $b_n^{(+)}$ (или $b_n^{(-)}$) выбираются для $x \geq 0$ (или $x \leq 0$). Это означает, что собственные функции экспоненциально затухают при удалении от решетки. Можно заметить, что условия (2.4) являются по сути условиями излучения.

Для задачи $E(0)$ возможны два представления $\{T_1, D_1^x\}$ в пространстве допустимых решений: τ_3, τ_4 из (1.11), для τ_3 – четные, τ_4 – нечетные по оси ординат функции.

Лемма 1. Нетривиальных аномальных функций, четных относительно оси, проходящей через элемент решетки, не существует.

Доказательство. От противного. Пусть $u^c(x, y)$ – аномальная функция задачи $E(0)$, четная относительно оси абсцисс, $u^c(x, y) = u^c(x, -y)$. Поскольку функция $u^c(x, y)$ периодична по y с периодом 1, то она четна относительно любой оси, содержащей некоторый элемент решетки. Это означает, что функция $u^c(x, y)$ непрерывна во всем пространстве и является слабым решением уравнения (1.3), а в силу теории эллиптических уравнений – гладким решением [22]. Лемма доказана.

Лемма 2. Аномальные функции нечетны относительно каждой оси, параллельной элементам решетки и проходящей через точки симметрии группы диэдра G .

Доказательство. Пусть $u^a(x, y)$ – аномальная функция, нечетная относительно оси абсцисс, $u^a(x, y) = -u^a(x, -y)$. Так как $u^a(x, y)$ периодична по y с периодом 1, то справед-

$$u^a(x, y+1) = u^a(x, y) = -u^a(x, -y-1) \quad (2.5)$$

где $u^a(x, -y-1)$ есть зеркальное отражение функции $u^a(x, y)$ относительно $y = 1/2$, поэтому (2.5) означает, что она будет нечетной относительно этой оси. Лемма доказана.

Существование и количество собственных циклических колебаний. Вопросы существования волноводных и аномальных частот колебаний около простой ножевой решетки исследованы в [15], циклические колебания являются частным случаем. Справедливо следующее утверждение, в котором $[a]$ – означает целую часть числа a .

Теорема. Около любой простой решетки всегда существуют волноводные и аномальные колебания. Количество собственных частот циклических колебаний не меньше, чем $[N/2] + 1$, где N – период цикличности. Количество волноводных мод циклических колебаний не меньше, чем $N - 1$, количество аномальных мод не меньше, чем 1. Каждой волноводной частоте соответствуют две моды, описывающие волны, бегущие в различных направлениях вдоль решетки.

Метод "вилка Дирихле – Неймана" [22] помогает оценить количество $K^A(L)$ частот аномальных колебаний как функцию от геометрического параметра.

Утверждение. Количество $K^A(L)$ частот аномальных мод колебаний на интервале $(\pi, 2\pi)$ удовлетворяет соотношениям $\max(1, [L\sqrt{3}]) \leq K^A(L) \leq [L\sqrt{3}] + 1$. Если $L\sqrt{3}$ – целое число, то $L\sqrt{3} - 1 \leq K^A(L) \leq L\sqrt{3}$.

3. Зависимость от геометрических параметров. Дисперсионные соотношения, полученные в [14, 15] для волн, локализованных в окрестности простой ножевой решетки, позволяют исследовать зависимость волноводных частот циклических колебаний от геометрических параметров решетки. Аномальные колебания не зависят от периода цикличности колебаний, поэтому исследования [14, 15] подходят для аномальных циклических колебаний.

Волноводные моды циклических колебаний. При помощи аналитических методов в [14, 15] получены дисперсионные соотношения для всех волноводных мод колебаний около простой ножевой решетки пластин

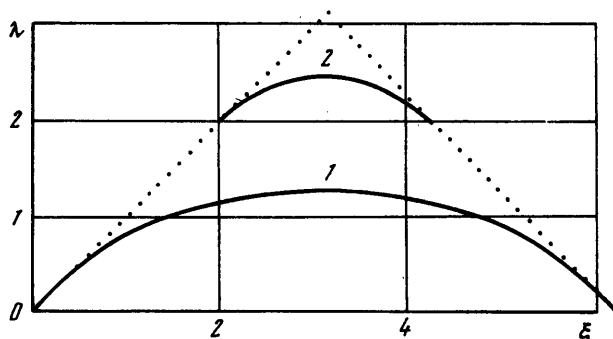
$$\sin [\Theta(\lambda, \xi)] = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda, \xi) = & \left\{ \lambda L - 2 \frac{\lambda \ln 2}{\pi} - \frac{\lambda}{\pi} \left[\Psi \left(Q + 1 + \frac{\xi}{2\pi} \right) + \Psi \left(Q + 1 - \frac{\xi}{2\pi} \right) - 2\Psi(2Q + 1) - \right. \right. \\ & - \Psi \left(1 + \frac{\xi}{2\pi} \right) - \Psi \left(1 - \frac{\xi}{2\pi} \right) + 2\Psi \left(\frac{\xi}{2\pi} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi}{2} \right) \left. \right] + 2 \arcsin \left(\frac{\lambda}{|\xi|} \right) + \\ & \left. + 2 \sum_{q=1}^Q \left[\arcsin \left(\frac{\lambda}{2q\pi + \xi} \right) + \arcsin \left(\frac{\lambda}{2q\pi - \xi} \right) \right] - 2 \sum_{q=1}^{2Q} \left[\arcsin \left(\frac{\lambda}{q\pi} \right) \right] - \frac{2\lambda}{\xi} \right\} \end{aligned}$$

где Q – некоторое натуральное число, повышающее точность вычислений; $\Psi(\dots)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Соотношения (3.1) позволяют по $\xi = 2\pi k/N$, $k = \pm 1, \dots, \pm K$, определять соответствующую безразмерную частоту волноводных колебаний как функцию L . Кроме этого, для фиксированного L можно определить частоты волноводных собственных колебаний как функции ξ . На фиг. 2 представлены графики этих функций для характерного в турбомашинах значения безразмерной хорды пластин $L = 2$. Точками показаны прямые линии $\lambda = \xi$ и $2\pi - \xi$. Для удобства интервал изменения ξ выбран от 0 до 2π . На $(-\pi, 0)$ графики получаются при помощи симметрии и периодичности по ξ .

Низкие частоты акустических собственных колебаний являются наиболее опасными для техники, так как они могут совпасть с собственными частотами механических колебаний и привести к возникновению аэроупругих или аэромеханических



Фиг. 2. Зависимость частоты волноводных собственных колебаний от сдвига фазы, $L = 2$ ($1 - \alpha_1$ -мода, $2 - \beta_1$ -мода)

резонансов. Для больших значений числа пластин в периоде ($N \gg 1$) и малых ξ ($|k| \ll N$) при условии, что $L > 1$, из (3.1) следует асимптотическое представление низких безразмерных волноводных частот λ_k циклических колебаний для α_1 -моды.

$$\lambda_k = \frac{2\pi k}{N} - [L\pi - 2 \ln 2]^2 \frac{8\pi k^3}{N^3}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для больших N низкочастотные волноводные собственные циклические колебания около решетки пластин всегда существуют и происходят на α_1 -моды.

Аномальные моды циклических колебаний. Пусть область колебаний Ω состоит из $\Omega_1 = \{(x, y): -L/2 \leq x \leq L/2, 0 < y < 1\}$, $\Omega_2 = \{(x, y): L/2 \leq x\}$, $\Omega_3 = \{(x, y): x \leq -L/2\}$, $u_k(x, y) = u(x, y)|_{(x, y) \in \Omega_k}$. В силу леммы 2 для аномальных мод циклических колебаний справедливо представление τ_4 из (1.11), поэтому приближенное решение $u(x, y)$ задачи $E(0)$ имеет вид соответственно для четных решений (γ -моды) и нечетных решений (δ -моды)

$$u_1(x, y) = \sum_{m=1}^{m_0+m_1} a_m \cos[(2m-1)\pi y] \begin{Bmatrix} \text{ch} \\ \text{sh} \end{Bmatrix} \left[x \sqrt{(2m-1)^2 \pi^2 - \lambda^2} \right]$$

$$u_2(x, y) = \sum_{m=1}^{m_0+m_1} b_m \sin(2\pi m y) \exp \left[-x \sqrt{(2\pi m)^2 - \lambda^2} \right] \quad (3.2)$$

$$u_3(x, y) = \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} u_2(-x, y)$$

Неизвестными являются $\{a_m\}_{m=1, \dots, m_0}$. Если $\lambda < 2\pi$, то из (1.7) следует, что

$$u_1(L/2, 0) = 0 \quad (3.3)$$

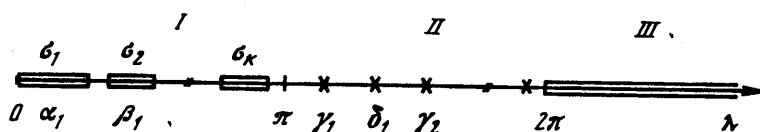
В силу симметрии задачи это условие выполняется во всех кромках пластин решетки. На общих границах областей Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 должны быть выполнены условия сшивания [13], которые по сути являются парциальными условиями излучения

$$\int_0^1 \left[u_1(x, y) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi k)^2 - \lambda^2}} \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \right] \sin(2\pi k y) dy = 0$$

$$x = L/2, \quad k = 1, \dots, (m_0 - 1) \quad (3.4)$$

Соотношения (3.3) и (3.4) – однородная линейная система уравнений относительно неизвестных $(a_m)_{m=1, \dots, m_0}$. Равенство нулю определителя этой системы представляет собой связь между λ и L , которая исследовалась численно.

4. Структура спектра частот. Прямым вычислением проверяется, что волноводные частоты циклических колебаний для задачи E принадлежат интервалу $(0, \pi)$, а частоты аномальных колебаний – интервалу $(\pi, 2\pi)$. В силу (3.1) волноводные частоты для каждой моды циклических колебаний непрерывно зависят от волнового числа ξ . Поэтому для фиксированной волноводной моды все волноводные частоты для любых периодов циклическости принадлежат некоторому фиксированному интервалу частот σ_k (полосе пропускания простой ножевой решетки [14, 15]).



Фиг. 3. Тонкая структура спектра частот собственных колебаний: I – пучки волноводных частот, II – аномальные частоты, III – неизвестный спектр

Определение 5. Множество волноводных частот циклических колебаний для фиксированной волноводной моды принадлежит полосе пропускания σ_k этой моды и называется σ_k -пучком волноводных частот собственных циклических колебаний.

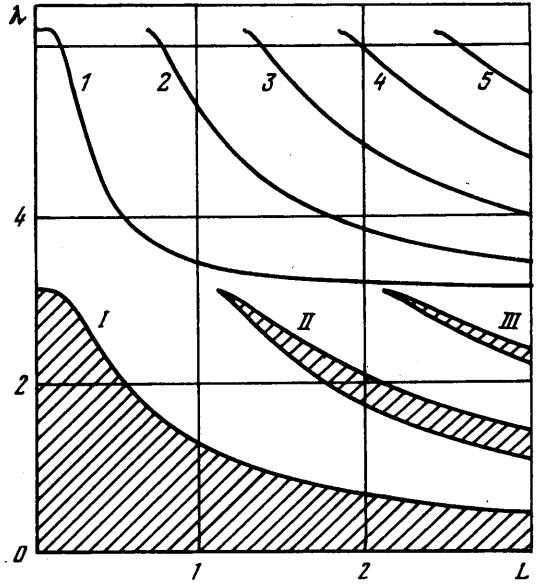
Пучки частот. Проведенные исследования позволяют описать тонкую структуру спектра частот циклических колебаний (фиг. 3). Волноводные частоты циклических колебаний, соответствующих α - и β -модам, сгруппированы в пучки $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Аномальные частоты обозначены $\gamma_1, \delta_1, \gamma_2$. Доказательства существования или несуществования частот собственных циклических колебаний около простой ножевой решетки (в рамках двумерной формулировки), которые принадлежат $\{\lambda: 2\pi \leq \lambda\}$, автору неизвестны.

Для больших значений периода циклическости N терминология – пучок частот волноводных циклических колебаний – особенно удобна, так как частоты плотно заполняют полуинтервалы $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ и механика всех колебаний в пучке одинакова. Моды колебаний чередуются, нечетным номерам пучков соответствуют α -моды, четным – β -моды. Пучки безразмерных волноводных частот циклических колебаний около простой ножевой решетки принадлежат $(0, \pi)$, безразмерные частоты аномальных колебаний принадлежат $(\pi, 2\pi)$, количество пучков и частот аномальных колебаний зависит от длины хорды пластин. Всегда существует хотя бы один пучок колебаний (α_1 -мода) и одна частота аномальных колебаний (γ_1 -мода).

При проектировании и отладке технических изделий, составляющим элементом которых является решетка лопаток, важно предсказание возможных аэроакустических резонансных явлений. Так как источник аэроакустических колебаний нелинейный и имеет некоторую полосу захвата частот, то необходимо указывать в пространстве управляющих параметров достаточно широкие области отсутствия частот циклических собственных колебаний, что позволит избежать аэроакустических резонансных явлений на стадии проектирования или предсказать результат конструктивных доработок. Как показывают проведенные исследования, вопрос становится важным для турбин с большим числом лопаток.

Для определения границ пучков циклических колебаний в пространстве управляющих параметров (λ, L) можно использовать (3.1). Так как для каждой моды волноводная частота монотонно зависит от волнового числа (сдвига фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций) на интервале $(0, \pi)$, то верхние

Фиг. 4. Зависимость пучков частот волноводных колебаний I–III (окрашены) и частот аномальных колебаний 1–5 от длины хорды пластин решетки. 1, 3, 5 – частоты аномальных колебаний γ_1 , γ_2 , γ_3 -мод соответственно; 2, 4 – частоты аномальных колебаний δ_1 , δ_2 -мод. I, III – пучки волноводных частот α_1 , α_2 -мод соответственно; II – пучок волноводных частот собственных циклических колебаний β_1 -моды



границы пучков циклических колебаний определяются (3.1) после подстановки $\xi = \pi$, а нижние границы колебаний $\xi = \lambda$ [14–16].

Зависимость пучков частот от геометрических параметров. На фиг. 4 показаны пучки волноводных частот циклических колебаний (окрашены) и частоты аномальных колебаний в пространстве (L, λ) . Как видно из фиг. 4, для наиболее характерной в технике безразмерной длины хорды пластин $L = 2$ существуют два пучка волноводных частот циклических колебаний: α_1 , β_1 , и три частоты аномальных колебаний: γ_1 , δ_1 , γ_2 . Для борьбы с акустическими резонансными явлениями наиболее целесообразно проводить конструктивные доработки, которые позволят изменить управляющие параметры L, λ таким образом, чтобы в рабочем режиме они не принадлежали пучкам волноводных частот и не находились вблизи (в полосе захвата) частот собственных аномальных колебаний.

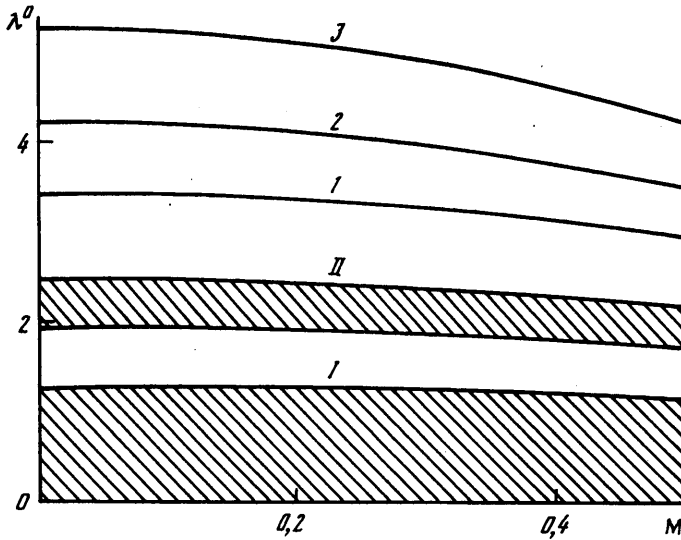
Зависимость собственных частот циклических колебаний от числа Маха. Влияние основного потока на вид собственных циклических колебаний состоит в том, что собственные функции деформированы согласно преобразованию Прандтля–Глауэрта. Кроме этого необходимо учитывать влияние потока (эффект Доплера) на частоту колебаний, которое учитывается при помощи соотношений

$$\lambda = \lambda(M) = \frac{\omega h}{c\sqrt{1-M^2}} = \frac{\lambda^0}{\sqrt{1-M^2}}$$

$$L = L(M) = \frac{L_d}{h\sqrt{1-M^2}} = \frac{L^0}{\sqrt{1-M^2}} \quad (4.1)$$

Здесь L_d – размерная длина хорды пластин в лабораторной системе координат; λ^0 – безразмерная частота, а L^0 – безразмерная длина хорды пластин, если скорость основного потока газа равна нулю. Подстановка (4.1) в систему уравнений (3.2), (3.4) и в (3.1) или в соотношения для вычисления верхней и нижней границ пучков колебаний и (4.1) позволяет определить для фиксированной хорды пластин зависимость аномальных частот, волноводных частот и зависимость верхней и нижней границ пучков собственных циклических колебаний около решетки пластин от числа Маха.

На фиг. 5 приведены зависимости аномальных частот собственных колебаний γ_1 , δ_1 , γ_2 и полос пропускания α_1 и β_1 (окрашены) для решетки пластин с фиксированной



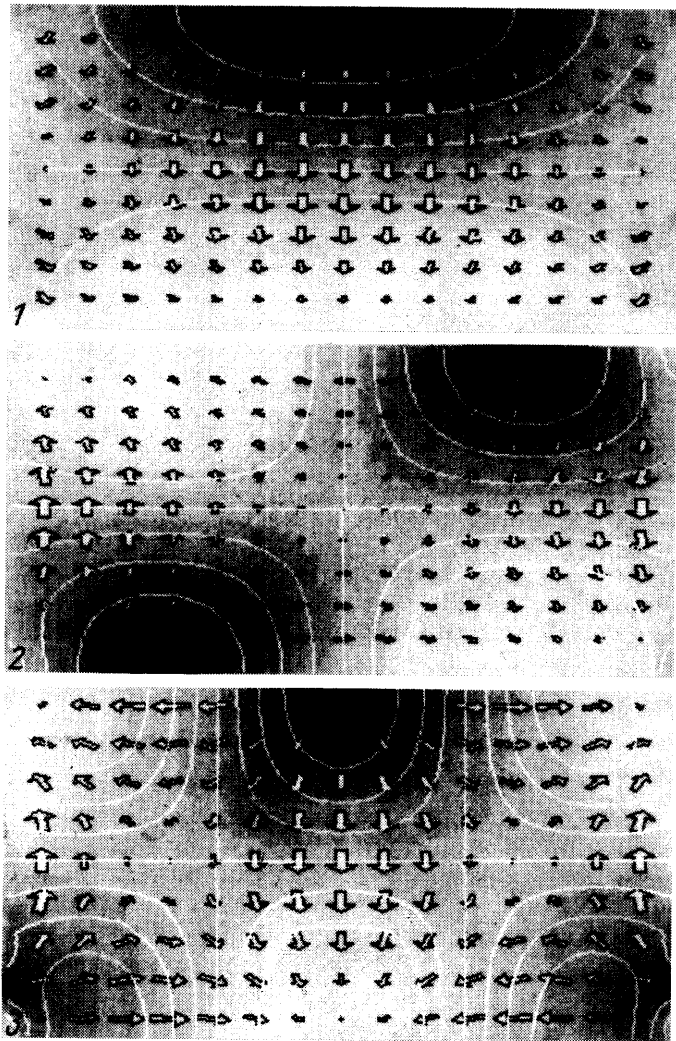
Фиг. 5. Зависимость пучков частот волноводных колебаний и частот аномальных колебаний от числа Маха, $L = 2$. Волноводные пучки частот моды $\alpha_1 - I$, $\beta_1 - II$. Аномальные моды $1 - \gamma_1$, $2 - \delta_1$, $3 - \gamma_2$

безразмерной длиной хорды $L^0 = 2$ от числа Маха основного потока газа. Можно заметить, что частоты собственных колебаний понижаются, а пучки частот сужаются с увеличением скорости основного потока газа.

5. Механика колебаний и резонансные явления. Механика волноводных колебаний около одномерно-периодической решетки пластин согласуется с аналогом – дискретной цепочкой связанных осцилляторов – и исследована в [12].

Механика аномальных колебаний. Для того чтобы была ясна механика аномальных колебаний, необходимо исследовать вид аномальных функций. На фиг. 6 для $L = 2$ представлены поле скоростей, линии уровня и поле давления в канале между соседними пластинами решетки для всех мод (γ_1 , δ_1 , γ_2) аномальных акустических колебаний. Пространственная ориентация фиг. 1 и 6 одинакова. Более темным цветом окрашены зоны повышенного давления, светлым – пониженного, перетекания газа из одного канала в другой нет. Расчет проведен при помощи (3.3), (3.4) для $m_0 = 5$. Вид аномальных мод колебаний в других межпрофильных каналах определяется (1.6), колебания во всех фундаментальных областях группы трансляций происходят синфазно.

Механика волноводных колебаний. Пусть λ_n – волноводная частота задачи $E(\xi_n)$, $\xi_n = \xi_n(\lambda_n) = 2\pi n/N$, соответствующие волноводные функции имеют вид $u_n(x, y) \equiv \exp(i\xi_n y) v_n(x, y)$. Здесь $\xi_n = 2\pi n/N$ можно рассматривать как волновое число, а функцию $v_n(x, y) = v_n(x, y + 1)$ как комплексную амплитуду бегущих акустических волн, потенциалы скоростей которых описываются функциями $u_n^{(\pm)}(x, y, t) = \text{Re}\{\exp[i(\xi_n y \pm \lambda_n t)] v_n(x, y)\}$. Фазовые скорости $C_p^{(n)}$ этих волн определяются соотношением $C_p^{(n)} = N \lambda_n / (2\pi n)$. Нетрудно заметить, что бегущим волнам соответствуют стоячие. Известно, что периодические решетки пластин обладают замедляющими свойствами [12]. Из фиг. 2 видно, что фазовая скорость волноводных колебаний уменьшается с увеличением волнового числа. Исследования фазовых скоростей волноводных колебаний можно провести при помощи (3.1). Например, если $L = 2$ и $\xi \approx \pi$,



Фиг. 6. Поле скоростей, линии уровня и поле давлений для всех мод аномальных колебаний, $L = 2$. 1-3: γ_1 -, δ_1 -, γ_2 -моды

то фазовая скорость волноводной моды циклических колебаний примерно в два раза меньше скорости звука в газе.

Групповая скорость $C_g(\xi)$ (скорость переноса энергии) волноводных мод циклических колебаний вычисляется при помощи (3.1). Наиболее существенным является то, что $C_g(\pi) = 0$, это следствие симметрии по ξ и видно из фиг. 2.

Зоны золотых тонов, резонансные явления, вращающийся срыв. Существенным отличием колебаний около решетки пластин от колебаний в ограниченной области является то, что в исследуемом случае существуют обобщенные собственные волны, которым соответствует непрерывный спектр частот.

1. Зоны резонанса. Известно, что источник золотых тонов нелинейный и имеет некоторую полосу захвата частот [4]. Пусть в безразмерных переменных $\lambda = \omega h(c\sqrt{1-M^2})^{-1}$, наименьшая ширина полосы захвата частот, принадлежащих некоторому пучку σ , равна ϵ . Если количество пластин в периоде N (период циклическости), такое, что $N > \pi/\epsilon$, то все полосы захвата волноводных частот собственных циклических колебаний из пучка σ волноводных частот пересекаются и образуют

зону резонансных частот колебаний около решетки пластин. Это означает, что для большого периода цикличности эоловы тона (аэроакустические резонансные явления) решетки пластин существуют для некоторых достаточно широких интервалов изменения числа Маха.

2. *Локализация резонансных явлений.* Так как групповая скорость равна нулю, если $\xi = \pi$, то скорость распространения энергии колебаний вдоль решетки пластин от источника с волноводной циклической частотой $\lambda^*(\pi)$ также равна нулю. Это означает, что возможны резонансные явления, обусловленные локализацией энергии в окрестности источника колебаний. Например, если частоты Струхала пластин решетки не совпадают и частота Струхала одной из пластин совпадает с волноводной частотой циклических колебаний, соответствующей $\xi = \pi$, то возможно явление резонанса, такое, что основная энергия колебаний для каждого фиксированного отрезка времени будет локализована в окрестности этой пластины.

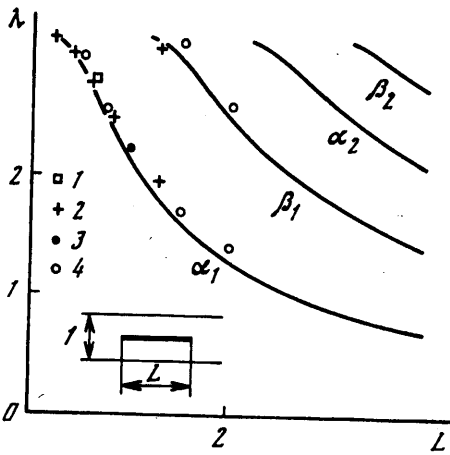
3. *Вращающийся срыв.* Для больших значений периода цикличности (числа пластин в периоде) волновой пакет, образованный из близких волноводных колебаний (близкие волноводные частоты), распространяется с групповой скоростью $C_g(\xi)$. В безразмерных переменных для этой скорости справедливо неравенство $0 \leq C_g(\xi) \leq 1$, это означает, что волновой пакет может как угодно медленно распространяться вдоль решетки пластин. Возможно, что этим объясняется явление вращающегося срыва [23].

6. *Сравнение с экспериментальными и численными исследованиями.* Необходимо отметить, что впервые зависимости волноводных частот от геометрических параметров ножевых решеток пластин исследованы в [12] и позднее в [13] применительно к электромагнитным волнам. Теоретические и экспериментальные исследования акустических резонансных и волноводных явлений около пластин в канале и циклических решеток пластин проводились независимо, но сравнение с полученными ранее в [12, 13] результатами не проводилось.

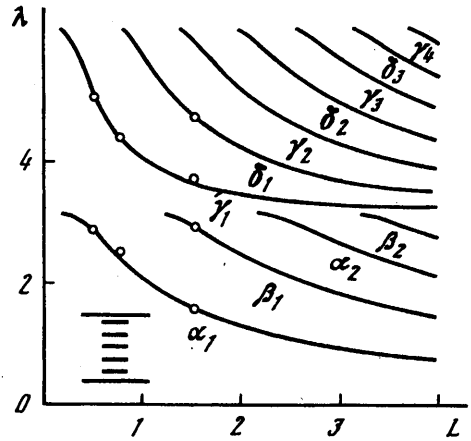
Пластина в канале. Колебания около пластины в канале моделируют колебания около решетки пластин со сдвигом фазы колебаний $\xi = \pi$. Это позволяет провести сравнение полученных результатов для решетки пластин с известными экспериментальными данными для акустических резонансных колебаний и эоловых тонов около пластины в канале. На фиг. 7 приведены экспериментальные данные [4, 24–27] и результаты численного расчета зависимости частот собственных колебаний около пластины в канале от хорды пластины, сделанного при помощи неявных формул (3.1) при $\xi = \pi$. Экспериментальные данные обозначены точками. Более полное исследование эоловых тонов пластины в канале и дальнейшая библиография содержатся в [4].

Решетка пластин в канале. В [1] решетка пластин в канале моделирует циклическую решетку (применим эффект "зеркала"). Результаты экспериментов [1] приведены в табл. 1 из [2], на основании которой проведено сравнение экспериментальных данных с численными исследованиями неявных формул (дисперсионных соотношений) (3.1) для волноводных частот собственных циклических колебаний и определителя системы уравнений (3.3), (3.4) для частот аномальных собственных колебаний. На фиг. 8 приведены результаты расчетов при помощи задачи E и экспериментальные данные [1]. Можно отметить удовлетворительное совпадение результатов расчетов и эксперимента.

Циклическая решетка. В [28] изложены результаты экспериментальных исследований собственных акустических колебаний около циклической решетки пластин в кольцевом канале между двумя соосными цилиндрами с диаметрами внутреннего цилиндра 0,127 м и внешнего 0,254 м. Периодическая решетка состояла из восьми пластин с хордой 0,064 м. Результаты численных исследований при помощи неявных выражений (3.1) для среднего положения плоского сечения, диаметр которого равнялся 0,1905 – среднему арифметическому диаметров внешнего и внутреннего цилиндров [14], удовлетворительно совпадают с данными эксперимента [28].



Фиг. 7



Фиг. 8

Фиг. 7. Зависимость частот собственных колебаний около пластины в канале от хорды пластины, теория и эксперимент. Результаты расчета по неявным формулам (3.1) – сплошные кривые, экспериментальные данные – точки 1 – [24], 2 – [25, 26], 3 – [27], 4 – [4]

Фиг. 8. Зависимость частот собственных колебаний около решетки пластин в канале от хорды пластин. Экспериментальные данные – точки (обозначения на фиг. 7), результат численных расчетов – сплошные кривые

Сравнение с численными исследованиями. Согласие с расчетами [12, 13] удовлетворительное в силу вариационных свойств волноводных частот. В [6–8] проведены численные исследования колебаний около решетки пластин в потоке газа при помощи метода шивания [13] для "неэоловых" тонов. Эта же задача исследована в [9] при помощи метода Винера – Хопфа. Существенной особенностью задачи, описывающей "неэоловы" тона, является то, что частоты резонансных колебаний – реальные части некоторых комплексных чисел. Так как в этом случае колебания затухают по времени, то соответствующие квазисобственные функции возрастают при удалении от решетки [29], квазисобственная (собственная) функция не локализована в окрестности решетки. Физический и математический смысл квазисобственных частот и функций (частот рассеяния и соответствующих функций рассеяния) описан в [30]. Необходимо отметить, что условия ограниченности решения при удалении от решетки (2.1) из [6], и (1.2) из [7] указаны в этих работах ошибочно. Для комплексных (квазисобственных) частот колебаний условия глобальной конечности энергии установившихся колебаний принципиально не могут быть выполнены, так как с этими условиями собственные (квазисобственные) колебаний не существует [29]. Несмотря на то что формулировки исследуемых в [6, 7] задач содержат ошибочное условие ограниченности решения, фактически это условие не использовано, в указанных работах на самом деле исследованы задачи, в которых вместо условий ограниченности решения использовано условие излучения, описанное в [5, 10, 15, 29].

В силу непрерывности по числу Маха волноводные частоты, описывающие "неэоловы тона", для малых чисел Маха должны быть близки к соответствующим частотам, исследованным в настоящей работе. Сравнение результатов численных исследований зависимости частот "неэоловых тонов" от сдвига фазы колебаний, проведенных в [8], с результатами, полученными при помощи (3.1), для различных длин хорды пластин ножевой решетки оказалось удовлетворительным [14]. Сравнение проводилось для малых чисел Маха $M = 0,05$.

Сравнение известных экспериментальных и численных данных с результатами проведенных исследований подтверждает, что (3.1), (3.3) и (3.4) удовлетворительно

описывают зависимость частот собственных акустических колебаний около циклических и решеток пластин в потоке газа от управляющих параметров задачи.

7. Замечания и возможные обобщения. Волноводные и аномальные частоты циклических колебаний являются примером чисто точечного спектра, погруженного в непрерывный. Так как реальные колебания трехмерны, то необходимо оценить возможные влияния третьего измерения. Пусть колебания около решетки пластин происходят в канале шириной b и пластины расположены перпендикулярно стенкам канала. Предполагается, что все переменные обезразмерены по отношению к наименьшему периоду решетки. Переменные разделяются и исследование волноводных и аномальных свойств трехмерной структуры сводится к решению описанных выше двумерных задач. Если λ_k^* – волноводная или аномальная собственная частота циклических колебаний 2-мерной задачи, то $\lambda_{(k,n)} = \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + (\pi n / b)^2}$,

$n = 0, 1, 2, \dots$, – соответственно волноводные или аномальные собственные частоты циклических колебаний 3-мерной задачи. Поэтому простая ножевая решетка в канале для любых линейных размеров обладает счетным множеством аномальных частот циклических колебаний, а для любых фиксированных значений сдвига фазы имеет счетное множество волноводных частот циклических колебаний. Точками сгущения этих множеств является бесконечность.

Заключение. Резонансные явления возникают в том случае, когда частоты Струхаля пластин в потоке совпадают с собственными частотами акустических колебаний газа около решеток. Для больших значений числа пластин в периоде циклическости пучки частот определяют зоны аэроакустического резонанса. Обнаружены и исследованы синфазные собственные колебания около периодических ножевых решеток. Собственные колебания могут быть классифицированы по виду собственных функций на основе теории представлений группы локально-плоских симметрий циклической решетки пластин в пространстве решений. Результаты, полученные при помощи предложенной модели, согласуются с известными экспериментальными и теоретическими исследованиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Parker R. Resonance effects in wake shedding from parallel planes: some experimental observation // J. Sound and Vibrat. 1966. V. 4. № 1. P. 62–72.
2. Parker R. Resonance effects in wake shedding from parallel plates: calculation of resonant frequencies // J. Sound and Vibrat. 1967. V. 5. № 2. P. 330–343.
3. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
4. Сухинин С.В., Бардаханов С.П. Эоловы тона пластины в канале // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 2. С. 69–77.
5. Сухинин С.В. Собственные колебания около пластины в канале // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 2. С. 78–90.
6. Курзин В.Б. О собственных колебаниях газа, обтекающего решетку пластин // ПМТФ. 1969. № 5. С. 68–75.
7. Курзин В.Б. О затухающих собственных колебаниях газа, обтекающего решетку пластин // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 5. С. 84–88.
8. Горелов Д.Н., Курзин В.Б., Сарен В.Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971. 272 с.
9. Koch W. Resonant acoustic frequencies of flat plate cascade // J. Sound and Vibrat. 1983. V. 88. № 2. P. 233–242.
10. Сухинин С.В. Обоснование модели колебаний газа, обтекающего решетку пластин // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1982. Вып. 56. С. 152–160.
11. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.

12. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 457 с.
13. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
14. Сухинин С.В. Волноводные, циклические и аномальные свойства колебаний около решетки пластин: Препринт № 2-98. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1998. 32 с.
15. Сухинин С.В. Волноводное и аномальное свойства периодической ножевой решетки // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 6. С. 46–56.
16. Сухинин С.В. Волноводное, аномальное и шепчущее свойства периодической цепочки препятствий // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1. № 2. С. 175–198.
17. Крайтон Д. Акустика как ветвь гидромеханики // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 359–412.
18. Голдстейн М.Е. Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
19. Howe M.S. A review of the theory of trailing edge noise // J. Sound and Vibrat. 1978. V. 61. № 3. P. 437–465.
20. Никулин В.В., Шафаревич И.Р. Геометрии и группы. М.: Наука, 1983. 239 с.
21. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958. 354 с.
22. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
23. Гостелову Дж. Аэродинамика решеток турбомашин. М.: Мир, 1987. 391 с.
24. Cumpsty N.A., Whitehead D.S. The excitation of acoustic resonances by vortex shedding // J. Sound and Vibrat. 1971. V. 18. № 3. P. 353–369.
25. Ильченко М.А., Руденко А.Н., Эпштейн В.Л. Исследование генерации вихревого звука при обтекании профиля в канале // Акуст. журн. 1980. Т. 26. Вып. 5. С. 708–717.
26. Ильченко М.А., Руденко А.Н., Селин Н.И. Исследование некоторых особенностей возбуждения колебаний при обтекании профиля в канале // Акуст. журн. 1982. Т. 28. Вып. 2. С. 224–227.
27. Archibald F.S. Self-excitation of an acoustic resonance by vortex shedding // J. Sound and Vibrat. 1975. V. 38. № 1. P. 81–103.
28. Parker R., Pryce D. Wake excited resonance's in an annular cascade: an experimental investigations // J. Sound and Vibrat. 1974. V. 37. № 2. P. 247–261.
29. Сухинин С.В. Эффект волновода // ПМТФ. 1989. № 2. С. 92–101.
30. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.

Новосибирск
E-mail: sukhinin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
3.XI.1998