

УДК 532.582.33

© 2000 г. М.В. НОРКИН

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ТОНКОГО ТОРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ И НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

При помощи метода граничных интегральных уравнений строится логарифмически-степенная асимптотика для случая тонкого тора. Найдены асимптотики основных ударных характеристик, в частности, присоединенной массы и присоединенного момента инерции.

Рассматривается твердый тор, плавающий на горизонтальной поверхности идеальной, несжимаемой и неограниченной жидкости. Предполагается, что тор погружен в жидкость наполовину. В результате удара тело начинает двигаться в вертикальном направлении и вращаться вокруг горизонтальной оси (вертикальный удар). Задача имеет два существенных параметра: $\epsilon = a/b$, $\delta = c/a$, где a и c – соответственно горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса поперечного сечения тора, b – расстояние от оси вращения z до центра этого эллипса, $0 < \epsilon < 1$, $0 < \delta < \infty$ (см. фигуру).

После нечетного продолжения потенциала скоростей сквозь свободную поверхность в верхнее полупространство задача разбивается на две. Первая соответствует поступательному движению тора в неограниченной жидкости вдоль оси симметрии, вторая – его вращению [1].

С применением метода граничных интегральных уравнений, осисимметричная задача сводится к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью в ядре. В случае тонкого тора (ϵ мало, δ фиксировано) строится асимптотика решения интегрального уравнения. На ее основе определяются потенциал скоростей на смоченной поверхности тора и присоединенная масса. Аналогично исследуется неосесимметричный случай. Приводятся асимптотики потенциала вращательного движения и присоединенного момента инерции.

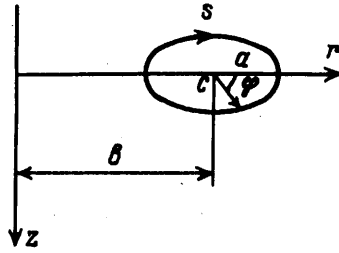
Аналогичные асимптотики для тора с круговым сечением ($\delta = 1$) рассматривались в [2–3]. Эффективность главного члена асимптотики тонкого кольца ($\delta = 0$) обсуждалась в [4]. Близкая задача вибрации тонкого тора в жидкости ($\delta = 1$) изучена в [5].

1. Сведение задачи к интегральному уравнению. Согласно классической теории удара, потенциал скоростей Φ , приобретенных частицами жидкости в результате удара, определяется решением смешанной задачи в области, занятой жидкостью [1]

$$\Delta\Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = v_0 n_z + \omega(zn_x - xn_z), \quad \Phi|_{S_2} = 0, \quad \Phi|_{\infty} = 0$$

где S_1 и S_2 – смоченная поверхность твердого тела и свободная поверхность жидкости; v_0 и ω – поступательная и угловая скорости, приобретенные тором в результате удара; n_x , n_z – проекции вектора внешней нормали к поверхности S_1 на оси декартовых координат x и z ; ось вращения z направлена в глубь жидкости.

Потенциал скоростей Φ представляется в виде [1] $\Phi = v_0\Phi_1 + \omega\Phi_2$, где функция Φ_1 соответствует поступательному движению тора в неограниченной жидкости вдоль оси симметрии с единичной скоростью, а Φ_2 – вращательному вокруг оси z с постоянной угловой скоростью, равной единице.



Постановка задачи

Функцию Φ_1 ищем в виде потенциала простого слоя с неизвестным значением плотности $f(p)$ на границе тора, которая удовлетворяет граничному интегральному уравнению [6]

$$\Phi_1 = \iint_S \frac{f(p) ds}{R} \quad (1.1)$$

$$-2\pi f(p_0) + \iint_S \frac{\cos \psi}{R^2} f(p) ds = \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_{p_0} \quad (1.2)$$

Здесь S – поверхность тора, $R = |P - P_0|$, ψ – угол между направлениями n и P_0P , где n – вектор внешней нормали к поверхности S в точке P_0 . Рассмотрим параметризацию поверхности тора

$$x = r(s) \cos \theta, \quad y = r(s) \sin \theta, \quad z = z(s), \quad -l \leq s \leq l, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (1.3)$$

где s – длина дуги эллипса, отсчитываемая в направлении хода часовой стрелки от точки $z = 0$, $r = b + a$, $2l$ – длина всего эллипса; θ – угловая координата. После перехода к координатам s, θ в граничном интегральном уравнении (1.2), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на отрезке $[-l, l]$

$$f(s_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l r(s) K(s_0, s) f(s) ds = \frac{r'(s_0)}{2\pi} \quad (1.4)$$

$$K(s_0, s) = 4([r + r_0]^2 + [z - z_0]^2)^{-3/2} \left(z_0'[r + r_0] + r_0'[z - z_0] \frac{E(k)}{1-k^2} - \frac{2z_0'r}{k^2} \left(\frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right) \right)$$

$$k^2 = 4r_0([r + r_0]^2 + [z - z_0]^2)^{-1}, \quad r = r(s), \quad r_0 = r(s_0), \quad z = z(s), \quad z_0 = z(s_0)$$

Здесь через $K(k)$ и $E(k)$ обозначены полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода. Следующей заменой переменных в (1.4)

$$r = b + a \cos \varphi, \quad z = c \sin \varphi, \quad s = s(\varphi) = \int_0^\varphi (a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} d\varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

задача приводится к интегральному уравнению второго рода на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$(I - K)g = h, \quad h(\varphi_0) = \sin \varphi_0 (1 + \varepsilon \cos \varphi_0) \quad (1.5)$$

$$(Kg)(\varphi_0) = \int_{-\pi}^{\pi} K(\varphi_0, \varphi) g(\varphi) d\varphi \quad (1.6)$$

$$K(\varphi_0, \varphi) = -\frac{\delta}{2\pi} k [(1 + \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi_0)]^{-1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{1 + \varepsilon(1 - \delta^2) \cos \varphi_0 \cos^2((\varphi_0 + \varphi)/2)}{1 - (1 - \delta^2) \cos^2((\varphi_0 + \varphi)/2)} E(k) + \varepsilon \cos \varphi_0 K(k) \right)$$

$$k^2 = \frac{(1 + \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi_0)}{[1 + 1/2\varepsilon(\cos \varphi + \cos \varphi_0)]^2 + 1/4\varepsilon^2 \delta^2 [\sin \varphi - \sin \varphi_0]^2}$$

$$-2\pi(1 + \varepsilon \cos \varphi)(\sin^2 \varphi + \delta^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} f(\varphi) = g(\varphi)$$

Полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ имеет логарифмическую особенность при $k = 1$ и, следовательно, интегральные уравнения (1.4) и (1.5) имеют логарифмические особенности в ядрах соответственно при $r = r_0$, $z = z_0$ и $\varphi = \varphi_0$. Отметим следующее свойство четности ядра: $K(-\varphi_0, -\varphi) = K(\varphi_0, \varphi)$. Также обратим внимание на то, что для тора с круговым сечением ($\delta = 1$) ядро $K(\varphi_0, \varphi)$ упрощается, поскольку в этом случае множитель перед $E(k)$ равен единице.

2. Асимптотика тонких торов. Введем пространство непрерывных нечетных функций C_0

$$C_0 = \{y(\varphi) \in C[-\pi, \pi]: y(-\varphi) = -y(\varphi)\}, \quad \|y\| = \max_{\varphi} |y(\varphi)|$$

Нетрудно проверить, что оператор K оставляет инвариантным это пространство: $(Ky)(-\varphi) = -(Ky)(\varphi)$, $\forall y \in C_0$, и функция $g(\varphi) \in C_0$.

Рассмотрим асимптотику решения интегрального уравнения (1.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ (δ фиксировано). Известные примеры позволяют предположить, что в главном приближении течение жидкости будет таким же, как и в плоской задаче о поступательном движении в жидкости эллипса (см., например, [2-4]).

Асимптотика ядра строится с учетом известных разложений полных эллиптических интегралов в ряды при значениях аргумента, близких к единице [7] ($k'^2 = 1 - k^2$)

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) k'^2 + R_1, \quad E(k) = 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right) k'^2 + R_2 \quad (2.1)$$

где функции R_1 и R_2 представляются в виде абсолютно сходящихся рядов и, как можно доказать, допускают следующие оценки ($0 < k < 1$):

$$R_1 < \frac{9}{64} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{7}{6} \right) \frac{(k')^4}{1 - (k')^2}, \quad R_2 < \frac{3}{16} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{13}{12} \right) \frac{(k')^4}{1 - (k')^2}$$

С использованием (2.1) получим асимптотику ядра $K(\varphi_0, \varphi)$. При этом четные по переменной интегрирования φ слагаемые выброшены, поскольку они не влияют на интеграл (1.6). Обозначая новое ядро через $K_0(\varphi_0, \varphi)$, приведем его разложение

$$K_0(\varphi_0, \varphi) = -\frac{\delta}{2\pi} \left\{ B^{-1} - \frac{1}{2}(\cos \varphi_0 \ln B_1 + (\cos \varphi - \cos \varphi_0) B^{-1}) \varepsilon + \frac{1}{4} \sin \varphi \sin \varphi_0 \varepsilon^2 \ln \varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} ((3 - 4 \ln 2) \sin \varphi \sin \varphi_0 - 2(\sin^2((\varphi - \varphi_0)/2) - \cos \varphi_0 (\cos \varphi + \cos \varphi_0)) \ln B_1 + \right. \\ \left. + (\cos \varphi - \cos \varphi_0)(3 \cos \varphi + \cos \varphi_0) B^{-1} \right\} \varepsilon^2 + L(\varphi_0, \varphi, \varepsilon, \delta) \quad (2.2)$$

$$B = 1 - (1 - \delta^2) \cos^2((\varphi + \varphi_0)/2), \quad B_1 = B \sin^2((\varphi - \varphi_0)/2)$$

$$L(\varphi_0, \varphi, \varepsilon, \delta) = L_1(\varphi_0, \varphi, \varepsilon, \delta) + \ln \sin^2((\varphi - \varphi_0)/2) L_2(\varphi_0, \varphi, \varepsilon, \delta) \quad (2.3)$$

Для функций L_1 и L_2 выполняются равномерные по φ и φ_0 оценки

$$|L_1| \leq C_1 (\delta) \varepsilon^3 \ln \varepsilon^{-1}, \quad |L_2| \leq C_2 (\delta) \varepsilon^3 \ln \varepsilon^{-1} \quad (2.4)$$

Асимптотическое решение интегрального уравнения (1.5) ищем в виде ряда по функциям вида $\varepsilon^n [\ln \varepsilon]^m$, где n и m – натуральные числа. Подставляя его в уравнение (1.5) и учитывая формулу (2.2), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^n [\ln \varepsilon]^m$. В результате придем к следующему представлению решения интегрального уравнения:

$$g(\varphi) = g_0(\varphi, \delta) + g_1(\varphi, \delta) \varepsilon + g_2(\varphi, \delta) \varepsilon^2 \ln \varepsilon + g_3(\varphi, \delta) \varepsilon^2 + r(\varphi, \varepsilon, \delta) \quad (2.5)$$

Остаток $r(\varphi, \varepsilon, \delta)$ содержит члены порядка $\varepsilon^3 \ln \varepsilon$ и выше. Для последовательного определения функций $g_i(\varphi, \delta)$, $i = 0, 1, 2, 3$, получим систему интегральных уравнений

$$g_i(\varphi_0, \delta) + \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g_i(\varphi, \delta) d\varphi}{1 - (1 - \delta^2) \cos^2(\varphi + \varphi_0)/2} = Q_i, \quad \varphi_0 \in [-\pi, \pi] \quad (2.6)$$

где $Q_0 = \sin \varphi_0$, а правые части Q_i , $i = 1, 2, 3$, остальных уравнений выражаются через интегралы, содержащие предыдущие приближения: $Q_1 = Q_1(\varphi_0, \delta, g_0)$, $Q_2 = Q_2(\varphi_0, \delta, g_0)$, $Q_3 = Q_3(\varphi_0, \delta, g_0, g_1)$. Приведем их здесь в окончательном виде

$$Q_1 = \frac{(3 - \delta^2)}{4(1 + \delta)} \sin 2\varphi_0, \quad Q_2 = -\frac{1 + \delta}{16} \sin \varphi_0, \quad Q_3 = P_1 \sin \varphi_0 + P_2 \sin 3\varphi_0$$

$$P_1 = \frac{1 + \delta}{16} (\ln 16 - \ln(1 + \delta)) - \frac{7(1 + \delta)}{64}, \quad P_2 = \frac{9\delta^3 + 7\delta^2 + 3\delta - 3}{64(1 + \delta)^2}$$

Интегральное уравнение для определения старшего приближения ($i = 0$) возникает при решении методами теории потенциала плоской задачи о движении в жидкости эллипса (поступательного вдоль оси c). Существование единственного решения этого уравнения следует из альтернативы Фредгольма [6]. Поскольку интегральные уравнения для остальных приближений $g_i(\varphi, \delta)$, $i = 1-3$, отличаются от уравнения (2.6) ($i = 0$) только правой частью, то теорема существования и единственности справедлива и для них.

Функцию $g_0(\varphi, \delta)$ ищем в виде $g_0(\varphi, \delta) = A_0 \sin \varphi$, $A_0 = A_0(\delta)$. После подстановки ее в уравнение (2.6) ($i = 0$) интеграл в (2.6) оказывается пропорциональным функции $\sin \varphi_0$. Далее, приравняв коэффициенты при синусах, найдем $A_0 = (1 + \delta)/(2\delta)$. Остальные приближения ищутся по аналогии в соответствии с видом правых частей (2.6). Асимптотика решения интегрального уравнения (1.5) имеет вид

$$g(\varphi) = g_s(\varphi) + r(\varphi, \varepsilon, \delta) \quad (2.7)$$

$$g_s(\varphi) = \frac{1 + \delta}{2\delta} \sin \varphi + \frac{(3 - \delta^2)(1 + \delta)}{16\delta} \sin 2\varphi \varepsilon - \frac{(1 + \delta)^2}{32\delta} \sin \varphi \varepsilon^2 \ln \varepsilon + (P \sin \varphi + Q \sin 3\varphi) \varepsilon^2$$

$$P = \frac{(1 + \delta)^2}{32\delta} (\ln 16 - \ln(1 + \delta)) - \frac{7(1 + \delta)^2}{128\delta}, \quad Q = \frac{(1 + \delta)(9\delta^3 + 7\delta^2 + 3\delta - 3)}{128\delta(3 + \delta^2)}$$

Дадим оценку остаточного члена в формуле (2.7), из которой вытекает обоснование асимптотики.

Покажем, что при малых ε выполняется оценка

$$\|r\|_{C_0} \leq \beta(\delta) \varepsilon^3 \ln \varepsilon^{-1} \quad (2.8)$$

где $\beta(\delta)$ – постоянная, зависящая от δ , но не зависящая от ε .

Действительно, согласно (1.5) и (2.7), функция $r = r(\varphi, \varepsilon, \delta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$(I - K)r = h_1, \quad h_1 = h - (I - K)g_s \quad (2.9)$$

которое сводится к уравнению с оператором сжатия при помощи следующего стандартного приема. В соответствии с (2.2) представим ядро $K_0(\varphi_0, \varphi)$ в виде суммы двух слагаемых

$$K_0(\varphi_0, \varphi) = K_1(\varphi_0, \varphi) + K_2(\varphi_0, \varphi), \quad K_1(\varphi_0, \varphi) = -\frac{\delta}{2\pi} \frac{1}{B} \quad (2.10)$$

Тогда оператор $K: C_0 \rightarrow C_0$ (1.6) запишется как сумма $K = K_1 + K_2$.

Теперь уравнение (2.9) перепишем в виде

$$(I - K_1)r = K_2r + h_1 \quad (2.11)$$

Оператор $(I - K_1)$ имеет ограниченный обратный (это следует из теоремы Фредгольма об альтернативе [6]), а K_2 является при малых ϵ оператором с малой нормой. Из (2.2) и (2.10), используя определение нормы, выводим оценку, справедливую при малых ϵ : $\|K_2\| \leq \beta_1(\delta)\epsilon$. Из уравнения (2.11), обращая оператор $(I - K_1)$, приходим к равенству

$$r = Sr + (I - K_1)^{-1}h_1, \quad S = (I - K_1)^{-1}K_2 \quad (2.12)$$

Учитывая, что оператор K_1 от ϵ не зависит, при помощи оценки $\|S\| \leq \|(I - K_1)^{-1}\| \|K_2\|$ получим, что при малых ϵ S является оператором сжатия. Теперь из (2.12) следует оценка

$$\|r\| \leq (1 - \|S\|)^{-1} \|(I - K_1)^{-1}\| \|h_1\|$$

Из последнего неравенства вытекает, что при малых ϵ

$$\|r\| \leq \beta_2(\delta) \|h_1\| \quad (2.13)$$

где $\beta_2(\delta)$ – постоянная, зависящая от δ , но не зависящая от ϵ . По построению асимптотики невязка $h_1 = h - (I - K)g_s$ имеет порядок $O(\epsilon^3 \ln \epsilon^{-1})$ при $\epsilon \rightarrow 0$ и при малых ϵ выполняется оценка

$$\|h_1\| \leq \beta_3(\delta) \epsilon^3 \ln \epsilon^{-1} \quad (2.14)$$

Теперь (2.8) следует из (2.13) и (2.14).

Замены (1.3) дают для потенциала Φ_1 на смоченной поверхности тора выражение

$$\Phi_1 = -\frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\varphi_0, \varphi) g(\varphi) d\varphi, \quad G(\varphi_0, \varphi) = \frac{kK(k)}{[(1 + \epsilon \cos \varphi)(1 + \epsilon \cos \varphi_0)]^{1/2}}$$

Асимптотика функции $G(\varphi_0, \varphi)$ строится по аналогии с асимптотикой ядра $K(\varphi_0, \varphi)$ и после выбрасывания из нее четных по переменной интегрирования φ слагаемых принимает вид (новое ядро обозначим через $G_0(\varphi_0, \varphi)$)

$$G_0(\varphi_0, \varphi) = -\frac{1}{2} \ln B_1 + \frac{1}{4} (\cos \varphi + \cos \varphi_0) \ln B_1 \epsilon - \delta^2 / 8 \sin \varphi \sin \varphi_0 \epsilon^2 \ln \epsilon + \\ + \frac{1}{8} (\delta^2 (2 \ln 2 - 1) \sin \varphi \sin \varphi_0 + (B_1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{4} (\cos 2\varphi + \cos 2\varphi_0) - \cos \varphi \cos \varphi_0) \ln B_1) \epsilon^2 + L_1(\varphi_0, \varphi, \epsilon, \delta) \quad (2.15)$$

где функция $L_1(\varphi_0, \varphi, \epsilon, \delta)$ представима в таком же виде, что и функция $L(\varphi_0, \varphi, \epsilon, \delta)$ (2.2). Учитывая (2.7), (2.8), (2.15), найдем асимптотику потенциала Φ_1 на смоченной поверхности тора

$$\Phi_1 = -a \left\{ \sin \varphi_0 - \frac{(1 + \delta)}{8} \sin 2\varphi_0 \epsilon - \frac{(1 + \delta)^2}{16} \sin \varphi_0 \epsilon^2 \ln \epsilon + \right. \\ \left. + \left(\left[\frac{(1 + \delta)^2}{16} (\ln 16 - \ln(1 + \delta)) - \frac{(1 + \delta)(3 + 7\delta)}{64} \right] \sin \varphi_0 + \frac{(1 + \delta)(3 + \delta)}{64} \sin 3\varphi_0 \right) \epsilon^2 + r_1(\varphi_0, \epsilon, \delta) \right\} \quad (2.16)$$

и при малых ϵ выполняется оценка $\|r_1\| \leq \beta_1(\delta) \epsilon^3 \ln \epsilon^{-1}$.

С учетом (2.16) получим асимптотику присоединенной массы m при ударе (ρ – плотность жидкости)

$$m = \rho a^3 \pi^2 \left(\epsilon^{-1} + \frac{(1 + \delta)^2}{16} \epsilon \ln \epsilon^{-1} + \frac{(1 + \delta)^2}{16} (\ln 16 - \ln(1 + \delta) - 7/4) \epsilon + O(\epsilon^2 \ln \epsilon^{-1}) \right), \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

Если $\rho = 1$, то главный член m равен половине объема кругового тора радиуса a .

По аналогии решается задача о вращении тора с эллиптическим сечением в идеальной несжимаемой жидкости. Приведем формулы для потенциала Φ_2 на смоченной поверхности тора и присоединенного момента инерции J при ударе

$$\Phi_2 = a^2 \epsilon^{-1} \cos \theta_0 \left(\sin \varphi_0 - \frac{(2\delta - 1)(1 + \delta)}{8} \sin 2\varphi_0 \epsilon + \frac{3(1 + \delta)^2}{16} \sin \varphi_0 \epsilon^2 \ln \epsilon + r_2(\varphi_0, \epsilon, \delta) \right) \quad (2.18)$$

где при малых ϵ справедлива оценка $\|r_2\| \leq \beta_2(\delta)\epsilon^2$

$$J = \rho a^5 \frac{\pi^2}{2} \epsilon^{-3} \left(1 - \frac{3(1+\delta)^2}{16} \epsilon^2 \ln \epsilon^{-1} + O(\epsilon^2) \right), \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.19)$$

Найденные для потенциала Φ_1 приближения соответствуют решениям различных плоских задач Неймана для уравнения Лапласа во внешности эллипса. Так, например, первый член этой асимптотики в точности равен потенциалу поступательного движения эллипса вдоль оси s , второй с точностью до константы определяет потенциал вращательного движения эллипса, третий отличается от первого только постоянным множителем. Аналогичный вывод можно сделать и для потенциала Φ_2 , если предварительно отделить в нем $\cos \theta_0$. Таким образом, трехмерная задача для тора с эллиптическим сечением приближается плоскими задачами для эллипса.

Полученное решение применимо только в том случае, когда импульсивное давление $P_t = -\rho \Phi$ неотрицательно всюду на смоченной поверхности тора. Используя результаты работы [11], можно показать, что для эллиптических торов, расположенных между кольцом и круговым тором ($0 \leq \delta \leq 1$), задача сводится к проверке неотрицательности функции P_t только на правой дальней от точки приложения импульса дуге, полученной в результате пересечения смоченной поверхности тела с меридиональной полуплоскостью $\theta = 0$ (предполагается, что тор мгновенно приведен в движение при помощи внешней ударной силы, приложенной в точке $M(x_0, 0, 0)$, где $x_0 < 0$).

Представляется очевидным, что для этих торов отрыв начинается в окрестности самой дальней от точки приложения импульса точке границы смоченной поверхности тела ($x = b + a$) (дело сводится к проверке неотрицательности функции P_t только в окрестности точки $x = b + a$). Если такое предположение сделать (строго оно не доказано), то дальше, рассуждая так же, как и в [3, 10] получим необходимое и достаточное условие безотрывности удара в виде ($0 < \delta < 1$, массой и моментом инерции тора пренебрегаем)

$$|x_0| \leq R \quad R = \frac{1}{2} a \epsilon^{-1} (1 - \frac{1}{2} (1 - \delta^2) \epsilon + O(\epsilon^2)), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

где R – радиус круга на плоскости переменных x и y , ограничивающий область безотрывного удара.

Обратим внимание на то, что при вертикальном ударе тора горизонтальная компонента импульса внешней ударной силы может быть отлична от нуля. Поясним это подробнее. Предположим, что удар по тору нанесен силой, приложенной в точке $(x_0, 0, 0)$ и ее импульс P имеет координаты (P_x, P_y, P_z) . Будем считать, что главные оси инерции плавающего тела совпадают с осями координат. Тогда, уравнения изменения импульса и момента импульса тора приводят к соотношениям:

$$\mu \omega = P_x, \quad P_y = 0, \quad (m_T + m) \nu_0 = P_z, \quad (I + J) \omega = -x_0 P_z$$

$$\mu = -\rho \iint_{S_1} \Phi_2 n_x ds$$

Здесь m_T и I – масса и момент инерции твердого тела, m и J – присоединенные масса и момент инерции.

Из приведенных соотношений следует, что при вертикальном ударе твердого тора импульс P должен иметь координаты $(\zeta P_z, 0, P_z)$, $\zeta = -x_0 \mu / (I + J)$. За исключением предельного случая кольца постоянная μ будет отлична от нуля. Однако для тонкого тора горизонтальная компонента импульса P пренебрежимо мала по сравнению с его вертикальной компонентой. Пусть, например, $m_T = 0$, $I = 0$ и $0 \leq \delta \leq 1$. Тогда, с учетом условия безотрывности удара и формулы (2.18), выводим асимптотическую оценку: $|\zeta| \leq q(\delta) \epsilon + O(\epsilon^2)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, где $q(\delta) = (5 - \delta - 2\delta^2) / 6\pi \leq 0,124$.

Таким образом, практически можно считать, что удар по тонкому тору нанесен вертикальной силой.

3. Обсуждение результатов. Чтобы оценить точность формулы (2.17), рассмотрим ее предельный ($\delta = 0$) и частный ($\delta = 1$) случаи. Присоединенная масса кольца была рассчитана

численно на основе решения интегрального уравнения второго рода с непрерывным ядром (см., например, [8], где исследована эквивалентная по математической постановке смешанная задача теплопроводности). В дальнейшем используем следующие обозначения: $\lambda = r_0/r$, где r_0 и r – внутренний и внешний радиусы кольца, связанные с параметрами a и b соотношениями $r_0 = b - a$, $r = b + a$.

Сравнение значений присоединенной массы кольца, вычисленных по формуле (2.17) ($\delta = 0$), с полученными численными результатами показывает, что погрешность в определении присоединенной массы m по формуле (2.17) ($\delta = 0$) для любых колец ($0 < \lambda < 1$) не превышает 1,6%. В случае круглого диска радиуса r ($\delta = 0$, $\epsilon = 1$), где погрешность вычислений наибольшая, $m \approx 1,31255r^3$, тогда как точное значение $m = 4/3r^3$. В диапазоне $0,08 < \lambda < 1$ асимптотические результаты отличаются от точных менее чем на 1%. Попутно отметим, что при $0 \leq \lambda \leq 0,1$ присоединенную массу кольца можно вычислить с помощью следующей асимптотической формулы:

$$m = \rho r^3 \left(\frac{4}{3} - (16/\pi^2)\lambda + O(\lambda^2) \right), \quad \lambda \rightarrow 0$$

которая с ошибкой менее 0,5% аппроксимирует в указанном диапазоне точное решение. Эта формула легко находится при помощи метода итераций, примененного к уже упомянутому интегральному уравнению [8].

Эффективность главного члена асимптотики тонкого кольца обсуждалась в [4], где получено численное решение задачи и проведено сравнение с экспериментом. В этой же работе предложена простая линейная аппроксимация коэффициента присоединенной массы, эффективная в области $\lambda < 0,6$. В остальном диапазоне ($0,6 \leq \lambda < 1$) расчеты рекомендовалось проводить с помощью главного члена асимптотики тонкого кольца.

Для тора с круговым сечением ($\delta = 1$) формула (2.17) дает ответ с погрешностью не выше чем 5,2%. Здесь проведено сравнение с численными результатами в [3, 9–10]. В работе [3] найдены следующие члены асимптотики, что позволяет производить расчет присоединенной массы кругового тора с погрешностью не более 1%.

На основании проведенных сравнений можно рекомендовать использовать формулу (2.17) с погрешностью не выше чем 5,2% для любого тора с эллиптическим сечением, расположенного между кольцом и круговым тором ($0 < \delta < 1$). Причем в диапазоне $0 < \epsilon < 0,6$ при любом фиксированном δ из отрезка $[0, 1]$ асимптотические результаты отличаются от точных не более чем на 1–2%. При $\delta > 1$ формула (2.17) уже не будет давать хороших результатов сразу для всех ϵ .

Численные значения относительного коэффициента присоединенной массы $m/\rho V$ ($V = a^3\pi^2\epsilon^{-1}$), полученные при помощи формулы (2.17), в диапазоне $0 < \epsilon < 0,6$; $0 < \delta < 1$ приведены в таблице.

ϵ	$\delta = 0,1$	0,3	0,5	0,7	0,9
0	1	1	1	1	1
0,1	1,002	1,003	1,004	1,005	1,006
0,2	1,008	1,010	1,013	1,015	1,018
0,3	1,015	1,019	1,023	1,028	1,032
0,4	1,022	1,028	1,035	1,041	1,047
0,5	1,031	1,038	1,046	1,054	1,061
0,6	1,039	1,048	1,057	1,065	1,072

Как показывают вычисления, при расчете присоединенной массы во многих случаях можно ограничиться лишь главным членом асимптотики.

4. Обобщение на случай тора произвольного сечения. Рассуждения, проведенные при выводе уравнения (1.4), носят общий характер и справедливы для тора произвольного поперечного сечения, где s – длина дуги сечения. После замены переменных в уравнении (1.4) $r \rightarrow r + b$, $r_0 \rightarrow r_0 + b$ асимптотика его решения при $b \rightarrow \infty$ находится в полной аналогии с асимптотикой решения уравнения (1.5) и имеет такой же (логарифмически-степенной) характер

$$f(s) = f_0(s) + f_1(s)b^{-1} + f_2(s)b^{-2} \ln b + O(b^{-2}), \quad b \rightarrow \infty$$

Для определения главного приближения приходим к интегральному уравнению вида

$$f_0(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{z'_0(r_0 - r) + r'_0(z - z_0)}{(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2} f_0(s) ds = \frac{r'_0}{2\pi} \quad (4.1)$$

Интегральные уравнения, возникающие для остальных приближений отличаются от уравнения (4.1) только правыми частями, которые представляют собой функционалы от предыдущих приближений.

Главный член асимптотики присоединенной массы при ударе в случае тора произвольного сечения всегда имеет порядок b при $b \rightarrow \infty$. Далее идет член порядка константы, который для тора с эллиптическим сечением равен нулю. А затем уже – первый малый член порядка $b^{-1} \ln b$. Приведем главные члены асимптотик потенциала скоростей Φ_1 на смоченной поверхности тора и присоединенной массы m при ударе

$$\Phi_1(s_0) \sim - \int_{-l}^l \ln[(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2] f_0(s) ds \quad (4.2)$$

$$m \sim -\rho\pi b \int_{-l}^l r'(s_0) ds_0 \int_{-l}^l \ln[(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2] f_0(s) ds$$

Как видно из (4.1) – (4.2), в главном приближении осесимметричная задача всегда сводится к плоской задаче об ударе по цилиндру, поперечное сечение которого совпадает с соответствующим сечением тора.

Заключение. Предлагаемый в работе метод построения асимптотики тонкого тора позволил для тора с эллиптическим сечением явно выписать асимптотики основных ударных характеристик и на их основе провести качественный и количественный анализ задачи.

Для тора с эллиптическим сечением главные члены асимптотик присоединенной массы и присоединенного момента инерции такие же, как и для тора с круговым сечением радиуса a (от c не зависят).

В случае вращения тора в жидкости асимптотика строится по той же схеме, что и в осесимметричной задаче. Принципиальных отличий здесь нет. Однако неосесимметричная задача технически сложнее осесимметричной и найденные в ней асимптотики не являются эффективными в таком широком диапазоне изменения параметров, как в осесимметричном случае.

Полученные в осесимметричном случае результаты можно использовать для решения гидродинамически эквивалентной задачи о кручении упругого полупространства жестким тороидальным штампом.

Автор выражает благодарность В.И. Юдовичу за внимание к данной работе. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-15-96081, 99-01023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 187. С. 1–27.
2. Wu T.Y., Yates G. Finite-amplitude unsteady slender-body flow theory // Proc. 11th Symp. on Naval Hydrodynamics, London. 1976. L.; N.Y., 1977. P. 517–526.
3. Норкин М.В. Удар тонкого тора о поверхность идеальной жидкости бесконечной глубины // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 10. С. 1263–1268.
4. Веклич Н.А. Удар круглого диска и шайбы по жидкости в цилиндрическом сосуде // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 103–111.
5. Newman J.N. The motions of a floating slender torus // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. Pt. 4. P. 721–735.
6. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
8. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства // Инж.-физ. журн. 1963. Т. 6. № 10. С. 67–71.

9. *Miloh T., Waisman G., Weihs D.* The added-mass coefficients of a torus // *J. Eng. Math.* 1978. V. 12. № 1. P. 1–13.
10. *Норкин М.В.* Удар вырожденного тора о жидкость бесконечной глубины // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 5. С. 161–165.
11. *Норкин М.В.* О начале отрыва при гидродинамическом ударе по плавающему телу // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 6. С. 99–104.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
25.I.1999