

УДК 533.6.011:519.6

© 2000 г. Ю.П. ГОЛОВАЧЕВ, Н.В. ЛЕОНТЬЕВА

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ

Представлены результаты численного моделирования сверхзвукового пространственного обтекания острых конусов с круговой и эллиптической формами поперечного сечения при турбулентном режиме течения в ударном слое. Расчеты выполнены в локально-коническом приближении с использованием системы уравнений Рейнольдса и дифференциальной однопараметрической модели турбулентности. Численные решения получены с помощью неявной конечно-разностной схемы постоянного направления. Основное внимание уделено исследованию поперечного отрыва потока и особенностей обтекания, обусловленных турбулентным характером течения.

В связи с широким применением различных форм острого конуса для элементов сверхзвуковых летательных аппаратов их обтеканию посвящены многочисленные экспериментальные и теоретические исследования [1–9]. Большинство полученных результатов относится к круговым конусам. Значительный интерес представляют также конические тела с эллиптической формой поперечного сечения, обладающие по сравнению с круговыми конусами более высоким аэродинамическим качеством.

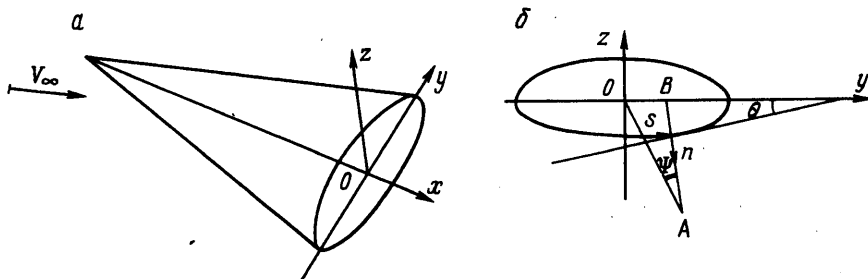
Важной особенностью пространственного обтекания острых конусов является отрыв поперечного течения, который приводит к возникновению весьма сложной вихревой структуры в подветренной области ударного слоя. Численное моделирование отрывных течений около гладких тел требует привлечения уравнений Навье – Стокса (см., например, [8]). С использованием этих уравнений ламинарные сверхзвуковые пространственные течения около конических тел рассмотрены в [3, 5, 7–9]. Турбулентное обтекание кругового конуса с поперечным отрывом потока исследовано в [6] с применением уравнений Рейнольдса и алгебраической модели турбулентности [10].

В настоящей работе для замыкания системы осредненных по времени уравнений Навье – Стокса (уравнений Рейнольдса) используется дифференциальная однопараметрическая модель [11], применявшаяся ранее в расчетах дозвуковых и трансзвуковых отрывных течений [12]. Рассматривается обтекание круговых конусов и конусов с эллиптической формой поперечного сечения. Результаты расчетов сравниваются с имеющимися экспериментальными данными и численными решениями.

**1. Постановка задачи.** При обычно используемых допущениях система уравнений Рейнольдса для осредненных характеристик турбулентного течения имеет вид системы уравнений Навье – Стокса с эффективными коэффициентами переноса

$$\mu^* = \mu + \rho \nu_t, \quad \lambda^* = \lambda + \rho \nu_t c_p / Pr_t \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu$ ,  $\lambda$  – коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности,  $\nu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости,  $\rho$  – плотность,  $c_p$  – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении,  $Pr_t$  – турбулентное число Прандтля. Формулы (1.1) записаны без учета перемежаемости.



Фиг. 1. Схема течения (а) и системы координат (б) в плоскости  $x = \text{const}$

Схема течения и используемые системы координат представлены на фиг. 1. Исходные уравнения записываются вначале в ортогональной квазицилиндрической системе координат  $(x, n, s)$ , в которой ось  $x$  совпадает с продольной осью тела, а  $n, s$  представляют собой криволинейные координаты, связанные с контуром поперечного сечения тела. Далее используется предположение о локально-коническом характере исследуемого течения. При этом значения газодинамических функций принимаются неизменными вдоль лучей, проведенных из вершины конуса, что дает

$$\frac{\partial}{\partial x} = -N \frac{\partial}{\partial n} - S \frac{\partial}{\partial s} \quad (1.2)$$

где  $N = \text{tg } \varphi \cos \psi$ ,  $S = (1 + \kappa n)^{-1} \text{tg } \varphi \sin \psi$ ,  $\varphi = \text{arctg}[(y^2 + z^2)^{1/2} / x]$ ,  $\psi = \text{arccos}[-z(y^2 + z^2)^{-1/2}] - \theta$ ,  $\theta$  – угол между касательной к контуру сечения тела и осью  $y$ ,  $\kappa(s)$  – кривизна контура поперечного сечения тела. С использованием (1.2) расчет пространственного обтекания конуса сводится к решению двумерной задачи в плоскости  $x = \text{const}$ ; расстояние плоскости от вершины тела соответствует числу Рейнольдса  $\text{Re} = \rho_\infty V_\infty x / \mu_\infty$ . Применимость локально-конического приближения подтверждается имеющимися данными экспериментальных и теоретических исследований [6, 13, 14].

Граничные условия формулируются следующим образом. Внешняя граница расчетной области совмещается с головной ударной волной, где в качестве граничных условий используются соотношения Ренкина – Гюгонно. На поверхности тела задаются нулевые значения компонент скорости газа и либо температура, либо условие тепловой изоляции. В настоящей работе рассматриваются течения без угла скольжения и при умеренных углах атаки, когда течение остается стационарным и симметричным относительно плоскости  $xz$ . Соответственно расчетная область ограничивается полуплоскостью  $y \geq 0$  и на границах по окружной координате  $s$  используются условия симметрии.

**2. Модель турбулентности.** Коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$  вычисляется по модели [11]

$$\nu_t = \nu f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\rho v}{\mu}$$

Величина  $\nu$  для полностью турбулентного течения находится из уравнения

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i v}{\partial x_i} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\mu + \rho \nu) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] + C_{b2} \frac{\partial \rho v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} + C_{b1} f_{v1} \Omega \rho v - C_{w1} f_{w2} \rho \left( \frac{v}{d} \right)^2$$

$$\Omega = \omega f_{v3} + \nu f_{v2} (kd)^{-2}, \quad f_{v2} = (1 + \chi / C_{v2})^{-3}, \quad f_{v3} = (1 + \chi f_{v1}) (1 - f_{v2}) \chi^{-1}$$

$$f_w = g(1 + C_{w3}^6)^{1/6}(g^6 + C_{w3}^6)^{-1/6}, \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r = \nu\Omega^{-1}(kd)^{-2}$$

$$f_{r1} = 2R_1(1 + R_1)^{-1}[1 - C_{r3} \arctg(C_{r2}R_2)](1 + C_{r1}) - C_{r1}, \quad R_1 = S\omega^{-1}$$

$$R_2 = 2D^{-4} \left( \omega_{ij} S_{ij} \frac{DS_{ij}}{Dt} \right), \quad \frac{DS_{ij}}{Dt} = \frac{DS_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad S^2 = 2S_{ij}S_{ij}, \quad \omega^2 = 2\omega_{ij}\omega_{ij}, \quad D^2 = \frac{1}{2}(S^2 + \omega^2)$$

Здесь  $\omega$  – абсолютное значение завихренности,  $d$  – расстояние от поверхности тела. Эмпирические постоянные модели имеют значения

$$C_{b1} = 0,1355, \quad \sigma = 2/3, \quad C_{b2} = 0,622, \quad k = 0,41$$

$$C_{w1} = C_{b1}k^{-2} + (1 + C_{b2})\sigma^{-1}, \quad C_{w2} = 0,3, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{v1} = 7,1$$

$$C_{v2} = 5, \quad C_{r1} = 1, \quad C_{r2} = 12, \quad C_{r3} = 0,6$$

Граничные условия по окружной координате  $s$  для величины  $v$  задаются соотношениями симметрии; на поверхности тела  $v = 0$ ; на внешней границе расчетной области  $v = v_\infty$ . В большинстве случаев принималось  $v_\infty = 5\mu_\infty / \rho_\infty$ . Турбулентное число Прандтля  $Pr_t = 0,9$ .

**3. Численный метод.** Стационарные решения находятся методом установления. В безразмерных переменных уравнения Рейнольдса в локально-коническом приближении записываются в матричной форме

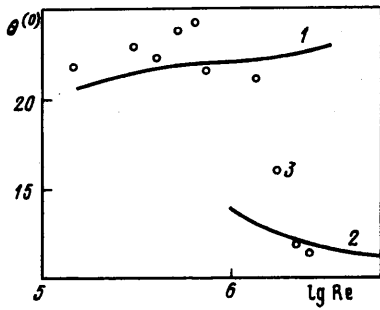
$$E \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} - \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial n} \left( A \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial n} \right) + B \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial n} + C \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} + D\mathbf{X} + \mathbf{G} = 0 \quad (3.1)$$

$$e \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + b \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial n} + c \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} + d\mathbf{X} + \mathbf{g} = 0 \quad (3.2)$$

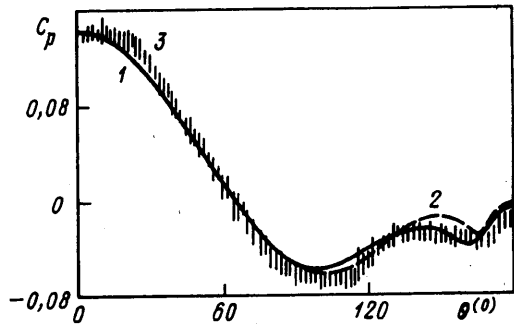
Здесь  $\mathbf{X} = \{T \text{ и } w \text{ и } v \rho\}^T$  – вектор-столбец искоемых функций;  $T, p, \rho$  – температура, давление и плотность газа;  $u, v, w$  – составляющие вектора скорости по направлениям  $x, n, s$  соответственно. Члены уравнений со смешанными и повторными производными по  $s$  входят в элементы векторов  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{g}$ . Матричное уравнение (3.1) содержит уравнение баланса энергии и уравнения баланса импульса в проекциях на  $x, s$ ; матричное уравнение (3.2) содержит уравнение баланса импульса в проекции на  $n$  и уравнение неразрывности.

Конечно-разностная аппроксимация уравнений осуществляется с помощью двухслойной неявной схемы постоянного направления [13]. На каждом луче  $s = s_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) производные по поперечной координате  $n$  в уравнениях (3.1) аппроксимируются в узлах  $n = n_j$  ( $j = 2, \dots, J-1$ ) с использованием симметричных трехточечных разностных формул, а в уравнениях (3.2) – в узлах  $n = n_{j-1/2}$  ( $j = 2, \dots, J$ ) с использованием двухточечных формул. В матричном уравнении (3.2) вектор  $\mathbf{g}$  содержит элемент с повторной производной по  $n$ , которая аппроксимируется во внутренних узлах сетки симметричной четырехточечной разностной формулой. В приграничных узлах используются несимметричные формулы. Указанные аппроксимации обеспечивают второй порядок точности схемы по поперечной координате.

Следует заметить, что указанная выше симметричная конечно-разностная аппроксимация конвективных членов уравнений (3.1) приводит к осцилляциям численного решения, если сеточное число Рейнольдса  $Re_h = \rho v \Delta n / \mu > 2$ . Это ограничение не является слишком жестким, поскольку соответствующее уменьшение шага сетки  $\Delta n$  требуется и по соображениям точности. Появляющиеся осцилляции устраняются путем перехода к односторонней



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость максимального отклонения  $\Theta$  предельных линий тока на круговом конусе от числа Рейнольдса  $Re$  при  $M_\infty = 7$ ,  $\theta_c = 9^\circ$ ,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $T_w = 0,3T^*$ : 1, 2 – уравнения Навье – Стокса и Рейнольдса, 3 – эксперимент [4]

Фиг. 3. Распределение коэффициента давления  $C_p$  по поверхности кругового конуса при  $M_\infty = 1,8$ ,  $Re = 6,5 \cdot 10^6$ ,  $\theta_c = 5^\circ$ ,  $\alpha = 11^\circ$ : 1 – настоящий расчет, 2 – расчет [6], 3 – эксперименты [6]

разностной аппроксимации конвективного переноса в поперечном направлении формулами первого порядка точности, учитывающими знаки собственных значений матрицы  $\mathbf{B}$ .

Конвективный перенос в окружном направлении рассчитывается по разностным формулам второго порядка точности. В тех участках расчетной области, где матрица коэффициентов имеет вещественный спектр собственных значений, применяются односторонние формулы, основанные на расщеплении этой матрицы [15]. В остальной части расчетной области используются симметричные формулы. Члены уравнений, описывающие молекулярный и турбулентный перенос импульса и энергии, вычисляются с помощью центральных разностных формул второго порядка точности.

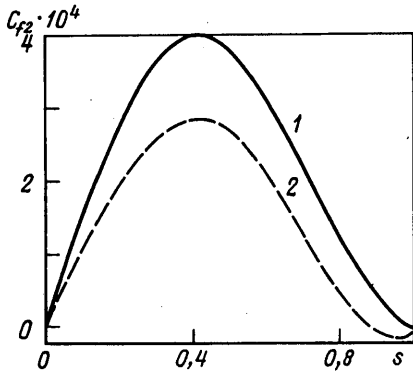
Расчет каждого шага по времени выполняется с использованием последовательных приближений. В каждом приближении вся система разностных уравнений распадается на независимые линейные подсистемы на лучах  $s = \text{const}$ . Эти подсистемы имеют блочные трехдиагональные матрицы коэффициентов и решаются векторной прогонкой.

Уравнение для турбулентной вязкости решается на каждом шаге по времени отдельно от уравнений Рейнольдса с использованием разностной схемы, аналогичной применяемой для решения уравнений (3.1).

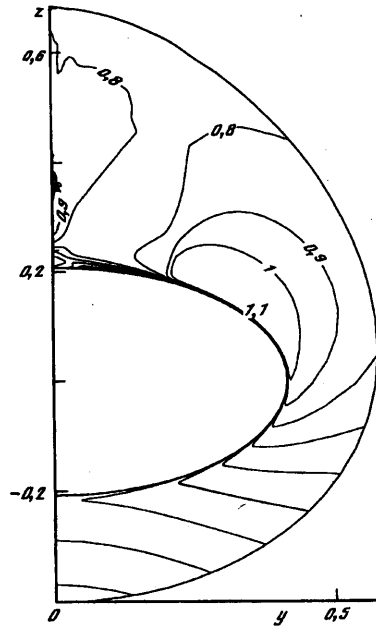
Большая часть расчетов выполнена на сетке, содержащей 31 луч по  $s$  и 101 узел на каждом луче. Узлы сетки сгущаются в окрестностях больших градиентов газодинамических функций с использованием преобразований координат [13]. При этом сгущение узлов происходит либо к границе, либо к заданной внутренней точке рассматриваемого интервала изменения соответствующей координаты.

**4. Результаты расчетов.** В расчетах использовалась физическая модель однородного совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей  $\gamma = 1,4$ . Коэффициент молекулярной вязкости вычислялся по формуле Сазерленда для воздуха, число Прандтля  $Pr = 0,72$ . На фигурах и в подписях к ним приняты следующие обозначения:  $M_\infty$  – число Маха набегающего потока,  $\theta_c$  – угол полураствора кругового конуса,  $\alpha$  – угол атаки,  $T^*$  – температура торможения,  $C_{f1}$ ,  $C_{f2}$  – коэффициенты трения на поверхности тела в продольном и окружном направлениях,  $C_p$  – коэффициент давления; давление и напряжение трения на поверхности тела отнесены к  $\rho_\infty V_\infty^2$ .

Рассмотрим результаты, относящиеся к обтеканию круговых конусов. На фиг. 2 представлена зависимость максимального угла отклонения предельных линий тока на поверхности кругового конуса  $\Theta = [\arctg(C_{f2} / C_{f1})]_{\text{max}}$  от числа Рейнольдса при безотрывном режиме обтекания. Результаты расчетов по уравнениям Навье – Стокса и Рейнольдса сравниваются с экспериментальными данными [4]. В рассматриваемых



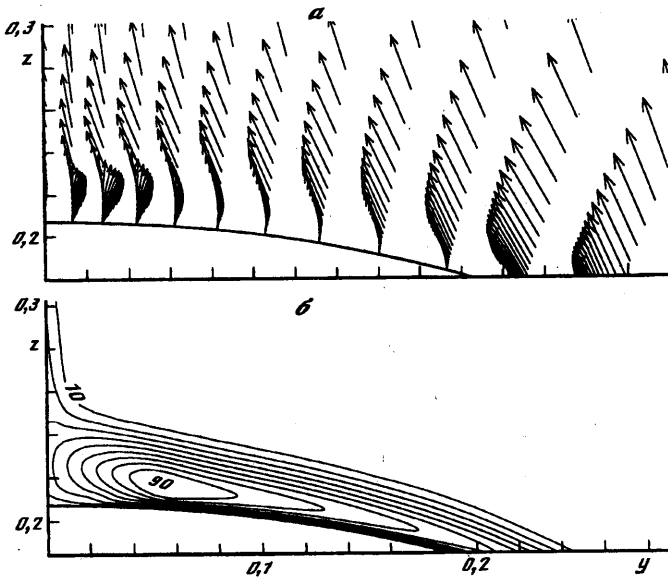
Фиг. 4



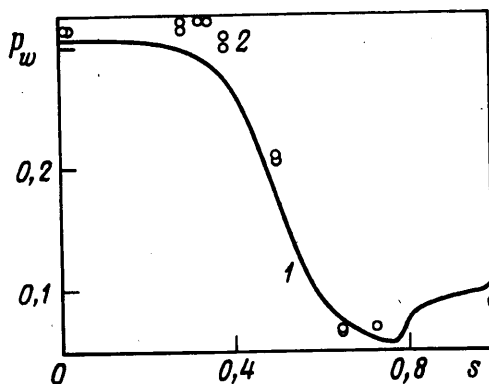
Фиг. 5

Фиг. 4. Распределения окружной составляющей коэффициента трения  $C_{f2}$  по поверхности кругового конуса при  $M_\infty = 2$ ,  $Re = 2,5 \cdot 10^6$ ,  $\theta_c = 10^\circ$ ,  $\alpha = 8^\circ$ : 1, 2 – турбулентный и ламинарный режимы

Фиг. 5. Изолинии числа Маха поперечного течения в ударном слое около эллиптического конуса при  $M_\infty = 3$ ,  $Re = 2,3 \cdot 10^6$ ,  $\delta = 2$ ,  $\alpha_m = 22,5^\circ$ ;  $\alpha = 15^\circ$



Фиг. 6. Векторные линии поля скорости поперечного течения (а) и изолинии коэффициента турбулентной вязкости (б) в ударном слое около эллиптического конуса при значениях параметров обтекания, как на фиг. 5



Фиг. 7 Распределение давления  $p_w$  по поверхности эллиптического конуса при значениях параметров обтекания, как на фиг. 5: 1 – расчет, 2 – эксперимент [1]

условиях ламинарно-турбулентный переход происходит при  $Re \approx 1,5 \cdot 10^6$ , причем его линия пересекает образующие конуса с минимальным удалением точки перехода от вершины в подветренной части плоскости симметрии течения и максимальным удалением в наветренной части. Переход сопровождается резким уменьшением угла отклонения предельных линий тока. Кривые 1 и 2 относятся к численным результатам расчетов по уравнениям Навье – Стокса и Рейнольдса. Они неплохо согласуются с данными измерений для ламинарного ( $Re < 10^6$ ) и полностью турбулентного ( $Re > 2,5 \cdot 10^6$ ) режимов. В то же время численное моделирование не воспроизводит наблюдаемого в экспериментах поведения величины  $\Theta$  в переходной области, что можно объяснить, во-первых, непригодностью для этой области локально-конического приближения и, во-вторых, тем, что в модели турбулентности опущены члены, учитывающие ламинарно-турбулентный переход.

Результаты расчетов турбулентного обтекания кругового конуса при наличии поперечного отрыва показаны на фиг. 3. Они сравниваются с данными трубных экспериментов и расчетов [6]. Численное решение [6] получено с использованием алгебраической модели турбулентности [10]. При этом для согласования получаемой в расчете структуры течения с данными экспериментов значение коэффициента турбулентной вязкости в области отрывного течения уменьшалось в несколько раз путем изменения соответствующей константы модели турбулентности в этой области. Результаты настоящей работы (кривая 1) получены без какой-либо модификации модели турбулентности [11] со значениями констант, использовавшимися и для других типов отрывных течений.

При рассматриваемых условиях на подветренной стороне конуса возникают основной и вторичный отрывы поперечного течения. В расчетах координаты их точек, определенные по изменению знака окружной составляющей коэффициента трения  $C_{f2}$ , имели значения:  $s^{(1)} = 133^\circ$ ,  $s^{(2)} = 154^\circ$ . Первое из них заметно отличается от данных [6]:  $s^{(1)} = 142^\circ$ ,  $s^{(2)} = 157^\circ$ .

Отметим некоторые различия ламинарных и турбулентных режимов течения. В турбулентном течении поперечный отрыв возникает при больших значениях угла атаки, что видно из фиг. 4, где показаны распределения  $C_{f2}$ , рассчитанные по уравнениям Рейнольдса (кривая 1) и Навье – Стокса (кривая 2). При одних и тех же значениях параметров обтекания поперечный отрыв возникает в ламинарном течении и отсутствует в турбулентном.

Изложенный выше метод пригоден для расчета сверхзвукового пространственного обтекания острых конических тел с некруговым контуром поперечного сечения. Рас-

сма тривалось, в частности, обтекание эллиптических конусов. Форма таких тел определяется двумя геометрическими параметрами: отношением осей эллипса  $\delta$  и максимальным углом между образующей и продольной осью конуса  $\alpha_m$ . В качестве примера на фиг. 5–7 представлены результаты расчета обтекания эллиптического конуса с  $\delta = 2$ ,  $\alpha_m = 22,5^\circ$ . На фигурах можно видеть наличие развитого поперечного отрывного течения, а также возрастание турбулентной вязкости в пристеночной области и вблизи подветренной части плоскости симметрии.

**Заключение.** Численное исследование сверхзвуковых пространственных турбулентных течений газа около круговых и эллиптических конусов продемонстрировало существенные отличия от ламинарного режима обтекания как в структуре поперечного течения, так и в распределениях аэродинамических характеристик. Использование модели турбулентности [11] обеспечило удовлетворительное совпадение с имеющимися экспериментальными данными по направлению предельных линий тока для полностью турбулентного течения и распределению давления на поверхности конуса. При этом получено значительное расхождение в положении точки основного отрыва поперечного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00735).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Швец А.И. Исследование обтекания эллиптических конусов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 1. С. 130–137.
2. Авдеевский В.С., Медведев К.И. Исследование отрыва ламинарного пограничного слоя на конусе под углом атаки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 117–119.
3. Башкин В.А. Исследование теплообмена на острых эллиптических конусах в сверхзвуковом потоке при больших углах атаки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 1. С. 84–88.
4. Marcillat J., Roux B. Experimental and theoretical study of supersonic viscous flow over a yawed circular cone // AIAA Journal. 1972. V. 10. № 12. P. 1625–1630.
5. Lubard S.C., Helliwell W.S. Calculation of the flow on a cone at high angle of attack // AIAA Journal. 1974. V. 12. № 7. P. 965–974.
6. Peake D.J., Fisher D.F., McRae D.S. Flight, wind tunnel and numerical experiments with a slender cone at incidence // AIAA Journal. 1982. V. 20. № 10. P. 1338–1345.
7. Lin A., Rubin S.G. Three-dimensional supersonic viscous flow over a cone at incidence // AIAA Journal. 1982. V. 20. № 11. P. 1500–1507.
8. Newsome R.W. Euler and Navier–Stokes solutions for flow over a conical delta wing // AIAA Journal. 1986. V. 24. № 4. P. 552–561.
9. Головачев Ю.П., Леонтьева Н.В. Численное исследование поперечного отрыва в пространственных сверхзвуковых течениях около круговых конусов // Журн. техн. физики. 1998. Т. 68. № 10. С. 20–26.
10. Harris J.E., Morris D.L. Solution of the three-dimensional compressible, laminar and turbulent boundary layer equations with comparisons to experimental data // Proc. 4th Intern. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics. 1974. Berlin: Springer, 1975. P. 204–211.
11. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // Recherche Aerospat. 1994. № 1. P. 5–21.
12. Shur M., Strelets M., Zaikov L. et al. Comparative numerical testing of one- and two-equation turbulence models for flows with separation and reattachment // AIAA Paper. 1995. № 0863. 31 p.
13. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое // М.: Наука, 1996. 374 с.
14. Golovachov Yu.P. Numerical investigation of three-dimensional supersonic flows past pointed conical bodies // Proc. 6th Japan–Russian Joint Symp. on Comput. Fluid Dynamics. 1998. Nagoya, Japan. P. 11–14.
15. Chakravarthy S.R., Anderson D.A., Salas M.D. The split coefficient matrix method for hyperbolic systems of gas dynamic equations // AIAA Paper. 1980. № 268. 20 p.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
11.I.1999