МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 2000

УДК 532.582.81.032

© 2000 г. С.И. МАРТЫНОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ В ТЕЧЕНИИ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

Рассматривается гидродинамическое взаимодействие двух твердых сферических частиц в вязкой несжимаемой жидкости, скорость которой на бесконечности представляется в виде полинома второй степени по координатам. Предложено аналитическое решение задачи. Вычислены силы и моменты, действующие на частицы, а также их линейные и угловые скорости. Проведено сравнение с ранее полученными теоретическими и экспериментальными результатами.

В [1, 2] предложен метод аналитического решения задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц в потоке со скоростью на бесконечности, представляемой в виде многочлена произвольной целой степени. Задача о взаимодействии частиц в течении с параболическим профилем скорости интересна тем, что, как отмечалось в [2], поведение частиц в течениях, скорость которых представляется полиномами четной степени, например, в течениях с параболическим профилем скорости, должно существенным образом отличаться от поведения частиц в течениях, скорость которых представляется полиномами нечетной степени, например в течениях с линейным профилем скорости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гидродинамическое взаимодействие двух твердых сферических частиц A и B одинакового радиуса a, которые помещены в неограниченную несжимаемую жидкость с вязкостью η. Считается, что на частицы не действуют внешние силы и моменты и размеры частиц достаточно малы, так что число Рейнольдса Re < 1. Скорость жидкости на бесконечности $\mathbf{U}$ есть квадратичная функция координат

$$U_i = E_{ij}x_j + \Omega_{ij}x_j + C_{ijk}x_jx_k \qquad E_{ii} = \Omega_{ii} = C_{iik} = C_{iki} = 0$$

Положение центров сфер A, B относительно потока обозначим векторами $\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{r}_b$ соответственно. Уравнения для скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и давления $p(\mathbf{x})$ в жидкости записываются в приближении Стокса

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p \tag{1.2}$$

На поверхности частиц имеем условия прилипания

$$|\mathbf{X}_a| = a: u_i + U_i(A) + E_{ij}X_{aj} + EE_{ij}(A)X_{aj} + \Omega_{ij}X_{aj} + W_{ij}(A)X_{aj} + C_{ijk}X_{aj}X_{ak} =$$
$$= V_i^a + \Gamma_{ij}^a X_{aj} \tag{1.3}$$

$$|\mathbf{X}_b| = b: u_i + U_i(B) + E_{ij}X_{bj} + EE_{ij}(B)X_{bj} + \Omega_{ij}X_{bj} + W_{ij}(B)X_{bj} + C_{ijk}X_{bj}X_{bk} =$$
$$= V_i^b + \Gamma_{ij}^b X_{bj} \tag{1.4}$$

На бесконечности

$$|\mathbf{X}| \to \infty : u_i \to 0 \tag{1.5}$$

Здесь введены следующие сокращения:

$$EE_{ij}(A) = (C_{ijk} r_{ak} + C_{jik} r_{ak}), \quad W_{ij}(A) = (C_{ijk} r_{ak} - C_{jik} r_{ak})$$

$$EE_{ij}(B) = (C_{ijk} r_{bk} + C_{jik} r_{bk}), \quad W_{ij}(B) = (C_{ijk} r_{bk} - C_{jik} r_{bk})$$

Векторами $\mathbf{V}^a$, $\mathbf{V}^b$, $\mathbf{\Gamma}^a$, $\mathbf{\Gamma}^b$ обозначены асболютные линейные и угловые скорости сфер A и B, а векторами $\mathbf{U}(A)$, $\mathbf{U}(B)$ – скорость невозмущенного потока жидкости в точках, занимаемых центрами сфер A и B соответственно. Линейные и угловые скорости сфер есть неизвестные функции вектора $\mathbf{r}$ и параметра a/r.

2. Решение. Аналогично случаю, рассмотренному в [1, 2], решение уравнений гидродинамики (1.1), (1.2) с граничными условиями (1.3)–(1.5) будем представлять в силу их линейности как сумму решений нескольких задач. Первая задача заключается в нахождении решения уравнений Стокса со следующими граничными условиями на поверхности двух сфер:

$$|\mathbf{X}_a| = a : u_i + E_{ij} X_{aj} + EE_{ij}(A) X_{aj} = 0$$

$$|\mathbf{X}_b| = a : u_i + E_{ij} X_{bj} + EE_{ij}(A) X_{bj} = 0$$

На бесконечности по-прежнему требуем выполнения условия затухания возмущений. Фактически эти граничные условия означают, что частицы движутся с локальными линейными и угловыми скоростями некоторого невозмущенного потока жидкости с линейной скоростью на бесконечности (задача α в [2]).

Во второй задаче решаются уравнения Стокса со следующими граничными условиями на поверхности двух сфер:

$$|\mathbf{X}_a| = a: \ u_i + C_{ijk} X_{aj} X_{ak} = 0$$

$$|\mathbf{X}_b| = a: \ u_i + C_{ijk} X_{bj} X_{bk} = 0$$

Эти условия означают движение вмороженных частиц в течении с параболическим профилем скоростей.

Третья задача заключается в нахождении решения уравнений гидродинамики со следующими граничными условиями:

$$|\mathbf{X}_a| = a: \ u_i = 0$$

$$|\mathbf{X}_b| = a: \ u_i + \Delta EE_{ij} X_{bj} = 0$$

$$\Delta EE_{ij}(B) = (C_{ijk} r_k + C_{jik} r_k)$$

Четвертая – задача о движении частиц с линейными и угловыми скоростями в покоящейся на бесконечности жидкости со следующими граничными условиями:

$$|\mathbf{X}_a| = a: \ u_i = U_i^a + \omega_{ij}^a X_{aj}$$

$$|\mathbf{X}_b| = a: \ u_i = U_i^b + \omega_{ij}^b X_{bj}$$

Здесь введены относительные линейные и угловые скорости сфер следующим образом:

$$U_i^a = V_i^a - U_i(A), \quad \omega_{ij}^a = \Gamma_{ij}^a - \Omega_{ij}^a - W_{ij}(A)$$

$$U_i^b = V_i^b - U_i(B), \quad \omega_{ij}^b = \Gamma_{ij}^b - \Omega_{ij}^b - W_{ij}(B)$$

Решение первой и четвертой задач найдено в [2] (задачи α и β). Для нахождения решения третьей задачи также могут быть использованы результаты, полученные в

[1, 2]. Выражения для скорости и давления жидкости во второй задаче ищутся в таком же виде, как и в задаче α, с той только разницей, что функция скорости должна удовлетворять симметричному преобразованию, приведенному в [2]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(-\mathbf{x}+\mathbf{r}) \tag{2.1}$$

Поэтому имеем

$$p = H_i(L_i^a + L_i^b) + F_{ij}(L_{ij}^a - L_{ij}^b) + G_{ijk}(L_{ijk}^a + L_{ijk}^b) + \ldots$$

$$\eta u_i = -\frac{2}{3}H_i(L_0^a + L_0^b) - \frac{3}{5}F_{ij}(L_j^a - L_j^b) - \frac{4}{7}G_{ijk}(L_{jk}^a + L_{jk}^b) -$$

$$-\frac{5}{9}D_{ijkl}(L_{jkl}^a - L_{jkl}^b) - \frac{6}{11}T_{ijk\ln}(L_{jk\ln}^a + L_{jk\ln}^b) -$$

$$-\frac{7}{13}P_{ijk\ln s}(L_{jk\ln s}^a - L_{jk\ln s}^b) - \frac{1}{6}H_j(L_{ij}^a X_a^2 + L_{ij}^b X_b^2) -$$

$$-\frac{1}{10}F_{jk}(L_{ijk}^a X_a^2 - L_{ijk}^b X_b^2) - \frac{1}{14}G_{jkl}(L_{ijkl}^a X_a^2 + L_{ijkl}^b X_b^2) -$$

$$-\frac{1}{18}D_{jk\ln}(L_{ijk\ln}^a X_a^2 - L_{ijk\ln}^b X_b^2) - \ldots$$

Здесь $L_{ij\ldots k}^a$ и $L_{ij\ldots k}^b$ – мультиполи, содержащие частные производные от функций $1/X_a$ и $1/X_b$ соответственно. Тензорные величины в этих выражениях представляются в виде комбинаций тензоров третьего C_{ijk} и первого r_j порядков и должны быть линейными по C_{ijk}. Соответствующие выражения для тензорных величин H_i, F_{ij}, G_{ijk}, D_{ijkl} легко выписываются и содержат неизвестные скалярные функции от параметра a/r. Например

$$H_i = C_{ikk}HA + C_{ijk}r_j r_k HB + C_{jik}r_j r_k HC + C_{jkk}r_j r_i HE + C_{jkl}r_j r_k r_l r_i HD$$

$$F_{ij} = C_{kij}r_k F + C_{ijk}r_k FA + C_{ikk}r_j FB + C_{jkk}r_i FH + C_{k\ln}r_k r_l r_n \delta_{ij} FC + C_{kss}r_k \delta_{ij} FK$$

$$G_{ijk} = C_{ijk}G + C_{k\ln}r_l r_n \delta_{ij} GE + C_{lkn}r_l r_n \delta_{ij} GD + (C_{ill}\delta_{kj} + C_{jll}\delta_{ik} + C_{kll}\delta_{ij})GA + C_{ill}r_j r_k GG +$$

$$+C_{jll}r_i r_k GH + C_{tss}r_t(r_k\delta_{ij} + r_j\delta_{ik})GM + C_{\ln m}r_l r_n r_m(r_i\delta_{kj} + r_k\delta_{ij} + r_j\delta_{ik})GU$$

$$D_{ijkl} = C_{jkn}r_n \delta_{il} DE$$

$$T_{ijk\ln} = (C_{k\ln}\delta_{ij} + \ldots)T + C_{tss}r_t(r_k r_l r_n \delta_{ij} + \ldots)TB + (C_{lss}r_j r_k \delta_{in} + \ldots)TC$$

Алгебраические уравнения для нахождения скалярных функций в тензорных величинах получаются после подстановки выражений для скорости и давления в граничные условия на поверхности одной сферы. Граничные условия на поверхности второй сферы будут выполняться автоматически в силу того, что они удовлетворяют тому же преобразованию (2.1), что и скорость. Для неизвестных скалярных функций получаем бесконечную систему алгебраических уравнений, которая в общем случае должна решаться численными методами. В настоящей работе решение ищется в виде разложения по малому параметру $\varepsilon = a/r$. С точностью до ε^4 получаем следующие выражения для скалярных функций в приведенных выше тензорных величинах:

$$HA = \frac{a^3}{2} - \frac{3a^3}{8}\varepsilon + \frac{9a^3}{32}\varepsilon^2 - \frac{19a^3}{128}\varepsilon^3, \quad G = \frac{7a^5}{12}$$

$$T = -\frac{11a^7}{1428}, \quad GA = -\frac{7a^5}{96} + \frac{7a^5}{128}\varepsilon - \frac{21a^5}{512}\varepsilon^2 + \frac{105a^5}{2048}\varepsilon^3$$

$$HE = -\frac{a}{2}\varepsilon^3 + \frac{33a}{32}\varepsilon^4 - \frac{9a}{128}\varepsilon^5, \quad FB = \frac{5a^3}{12}\varepsilon^3 - \frac{5a^3}{16}\varepsilon^4 \frac{63a^3}{64}\varepsilon^5$$

$$FH=-\frac{5a^3}{12}\varepsilon^3+\frac{5a^3}{16}\varepsilon^4-\frac{31a^3}{64}\varepsilon^5,\quad DE=-\frac{3a^3}{40}\varepsilon^5-\frac{21a^3}{160}\varepsilon^6$$

$$FG=\frac{5a}{4}\varepsilon^5-\frac{35a}{16}\varepsilon^6 FK=-\frac{a^3}{4}\varepsilon^3+\frac{35a^3}{48}\varepsilon^4$$

$$GM=-\frac{77a^3}{512}\varepsilon^4+\frac{469a^3}{2048}\varepsilon^5,\quad GH=\frac{7a^3}{16}\varepsilon^5,\quad GG=-\frac{7a^3}{32}\varepsilon^5$$

$$TC=-\frac{11a^5}{384}\varepsilon^5,\quad GE=\frac{21a^3}{128}\varepsilon^5,\quad HB=-\frac{9a}{16}\varepsilon^5$$

$$GD=\frac{35a^3}{64}\varepsilon^5,\quad GU=-\frac{245a}{128}\varepsilon^7,\quad HD=-\frac{105}{16a}\varepsilon^7,\quad DF_3=0$$

$$HC=-\frac{15a}{4}\varepsilon^5,\quad GN=-\frac{35a}{32}\varepsilon^7,\quad GM=\frac{469a^3}{2048}\varepsilon^5,\quad TB=\frac{55a^3}{1536}\varepsilon^7$$

Вычисления скалярных функций могут быть продолжены до членов порядка большего, чем ε^4. Это требует новых членов в выражениях для скорости и давления, которые могут быть легко записаны по алгоритму, указанному выше.

3. Силы и моменты, действующие на две сферы. Найденные выше выражения скалярных функций используются для вычисления сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости в параболическом потоке. Получаем, что на частицы A и B действуют силы

$$F_i^a=4\pi\eta a\{[E_{jk}+EE_{jk}]\frac{r_jr_kr_i}{r^2}f_1+\Delta EE_{jk}\frac{r_jr_kr_i}{r^2}f_2+[E_{ij}+EE_{ij}]r_jf_3+\Delta EE_{ij}r_j4\varepsilon^5\}+F_i-$$
$$-6\pi\eta a\left[U_i^{a\parallel}\left(1+\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)-U_i^{b\parallel}\left(\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{19}{8}\varepsilon^3\right)+U_i^{a\perp}\left(1+\frac{9}{16}\varepsilon^2\right)-U_i^{b\perp}\left(\frac{3}{4}\varepsilon+\frac{59}{64}\varepsilon^3\right)+\omega_{ij}^b r_j\varepsilon^3\right]$$

$$F_i^b=-4\pi\eta a\left\{[E_{jk}+EE_{jk}]\frac{r_jr_kr_i}{r^2}f_1+\Delta EE_{jk}\frac{r_jr_kr_i}{r^2}[f_1-f_2]\right.$$
$$\left.+[E_{ij}+EE_{ij}]r_jf_3+\Delta EE_{ij}r_j\frac{27}{4}\varepsilon^5\right\}+F_i-6\pi\eta a\left[U_i^{b\parallel}\left(1+\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)-\right.$$
$$\left.-U_i^{a\parallel}\left(\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{19}{8}\varepsilon^3\right)+U_i^{b\perp}\left(1+\frac{9}{16}\varepsilon^2\right)-U_i^{a\perp}\left(\frac{3}{4}\varepsilon+\frac{59}{64}\varepsilon^3\right)+\omega_{ij}^a r_j\varepsilon^3\right]$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$f_1=\frac{15}{4}\varepsilon^3+\frac{45}{8}\varepsilon^4-\frac{25}{16}\varepsilon^5+\frac{381}{32}\varepsilon^6$$

$$f_2=\frac{15}{4}\varepsilon^3-\frac{25}{16}\varepsilon^5,\quad f_3=4\varepsilon^5+\frac{27}{4}\varepsilon^6$$

$$F_i=4\pi\eta a\left[C_{ikk}\frac{a^2}{4}\left[2-\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{9}{8}\varepsilon^2-\frac{19}{32}\varepsilon^3\right]+C_{jkk}\frac{a^2r_jr_i}{r^2}\left[-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{33}{32}\varepsilon^2-\frac{9}{128}\varepsilon^3\right]-\right.$$
$$\left.-C_{ijk}\frac{a^2r_kr_j}{r^2}\frac{9\varepsilon^3}{16}-C_{jik}\frac{a^2r_jr_k}{r^2}\varepsilon^3-C_{jkl}\frac{a^2r_ir_jr_kr_l}{r^4}\frac{105}{16}\varepsilon^3\right]$$

Аналогичным образом вычисляются и моменты, действующие на сферы A и B.

Вычисления дают следующий результат:

$$T_i^a = \varepsilon_{ijk}\pi\eta a^3\left[\left(E_{kl} + EE_{kl} + \Delta EE_{kl}\right)\frac{r_l r_j}{r^2}20\varepsilon^3 - \left(C_{jss}r_k - C_{kss}r_j\right)\left(\varepsilon^3 - \frac{3}{4}\varepsilon^4\right)\right] +$$

$$+8\pi\eta\varepsilon_{ijk}a^3\left[U_k^{a\perp}\frac{r_j}{r^2}\left(\frac{3}{4}\varepsilon + \frac{27}{64}\varepsilon^3\right) - U_j^{b\perp}\frac{r_k}{r^2}\left(\frac{9}{16}\varepsilon^3 + \frac{273}{256}\varepsilon^4\right)\right] +$$

$$+4a^3\pi\eta\varepsilon_{ijk}\left[\omega_{kj}^a + \omega_{ks}^b\frac{r_s r_j}{r^2}3\varepsilon^3\right]$$

$$T_i^b = \varepsilon_{ijk}\pi\eta a^3\left[\left(E_{kl} + EE_{kl}\right)\frac{r_l r_j}{r^2}20\varepsilon^3 + (C_{jss}r_k - C_{kss}r_j)\left(\varepsilon^3 - \frac{3}{4}\varepsilon^4\right)\right] +$$

$$+8\pi\eta\varepsilon_{ijk}a^3\left[U_k^{b\perp}\frac{r_j}{r^2}\left(\frac{3}{4}\varepsilon + \frac{27}{64}\varepsilon^3\right) -\right.$$

$$\left.-U_j^{a\perp}\frac{r_k}{r^2}\left(\frac{9}{16}\varepsilon^2 + \frac{273}{256}\varepsilon^4\right)\right] + 4a^3\pi\eta\varepsilon_{ijk}\left[\omega_{kj}^b + \omega_{ks}^a\frac{r_s r_j}{r^2}3\varepsilon^3\right]$$

Как видно из выражений, силы и моменты, действующие на две сферические частицы в линейном потоке и потоке параболического типа, существенно различаются по структуре. Это различие связано с тем, что, во-первых, для частицы в течении с линейным профилем скоростей сила и момент со стороны жидкости обусловлены присутствием вблизи другой частицы, в то время как для частицы в потоке с параболическим профилем скоростей имеется составляющая силы, не связанная с гидродинамическим взаимодействием частиц, а определяемая только скоростью основного потока; во-вторых, для частиц в потоке с параболическим профилем скоростей имеется составляющая силы, связанная с различными значениями градиента скорости жидкости в точках, занимаемых центрами частиц (слагаемые с ΔEE_{ij}). Причем эта составляющая силы линейно зависит от координат центра сферы A. Как будет показано ниже, это приводит к различному относительному движению частиц в течениях с линейным и параболическим профилями скоростей, что весьма существенно при определении величин, характеризующих коллективные свойства жидкости с твердыми частицами.

4. Линейные и угловые скорости взаимодействующих сфер. В безынерционном приближении силы и моменты, действующие со стороны жидкости на частицы, должны равняться нулю (при отсутствии внешних сил). Используя эти условия, находим относительные линейные и угловые скорости частиц. Для двух взаимодействующих сфер в течении с квадратичным профилем скоростей вычисления дают следующие выражения для относительных линейных и угловых скоростей:

$$V_i = U_i^b - U_i^a = \Omega_{ij}r_j + E_{ij}r_j(1-B) + E_{jl}\frac{r_j r_l r_i}{r^2}(B-A) + \tag{4.1}$$

$$+[2C_{ijk}r_j^a r_k + C_{ijk}r_j r_k] + \left[EE_{ij} + \frac{1}{2}\Delta EE_{ij}\right]r_j(1-B) +$$

$$+\left[EE_{jk} + \frac{1}{2}\Delta EE_{jk}\right]\frac{r_j r_k r_i}{r^2}(B-A)$$

$$\omega_{ij}^a = [E_{jl} + EE_{jl} + \Delta EE_{jl}]\frac{r_l r_i}{r^2}5\varepsilon^3 - [C_{ikk}r_j - C_{jkk}r_i]\left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 - \frac{3}{16}\varepsilon^4\right)$$

$$\omega_{ij}^b = [E_{jl} + EE_{jl}]\frac{r_l r_i}{r^2}5\varepsilon^3 + [C_{ikk}r_j - C_{jkk}r_i]\left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 - \frac{3}{16}\varepsilon^4\right)$$

Здесь коэффициенты A и B такие же, как и в задаче о двух взаимодействующих сферах в линейном поле скоростей [2]: $A = 5\varepsilon^3 - 8\varepsilon^5 + 25\varepsilon^6$, $B = 16\varepsilon^5/3$.

Таким образом, асимптотические представления для коэффициентов в линейном и параболическом течениях одинаковые. Однако поведение частиц в параболическом течении ($E_{ij} = 0$) существенным образом отличается от поведения частиц в линейном течении ($C_{ijk} = 0$). Так, легко видеть, что для положений сферы B, при которых $2C_{ijk} r_j^a r_k + C_{ijk} r_j r_k = 0$, относительная скорость сфер $V_i = 0$. Это означает, что частицы, находящиеся в плоскости, проходящей через ось параболического профиля скоростей, и на одинаковом расстоянии от этой оси, имеют одинаковые скорости. Причем это положение частиц устойчивое. Нетрудно убедиться из (4.1), что выполняются следующие условия:

$V_r > 0,\ h^a > h^b;\ V_r < 0,\ h^a < h^b$

Здесь V_r – составляющая скорости $\mathbf{V}$ вдоль вектора $\mathbf{r}$, а h^a и h^b – расстояния от точек A и B до оси параболоида соответственно. Другими словами, если частица B находится ближе к оси, чем частица A, то она взаимодействует с A с силами отталкивания и, наоборот, частица B притягивается к A, если она находится дальше от оси. Аналогичные неравенства получаются и для азимутальной составляющей относительной скорости частиц. Рассмотрев движение частицы A относительно B, получим такие же условия и для относительной скорости частицы A. Таким образом, две частицы в параболическом потоке стремятся расположиться в плоскости, проходящей через ось симметрии течения, и на одинаковом расстоянии от этой оси. При этом одна из них приближается к оси, а другая удаляется от нее. В этом случае центр масс двух частиц будет находиться на оси симметрии течения. В линейном поле скоростей такое поведение частиц отсутствует. Как было сказано выше, такое различие в поведении частиц обусловлено различными свойствами решений для течений со скоростями, представляемыми на бесконечности в виде полиномов четной и нечетной степеней.

5. Сравнение с экспериментом. Проведенный выше анализ движения двух сфер в параболическом профиле скоростей можно использовать для объяснения поведения сферических частиц с нейтральной плавучестью в пуазейлевском течении, наблюдаемого в эксперименте [3]. Как следует из эксперимента, сферические частицы, несмотря на их первоначальное положение относительно оси трубы, стремятся расположиться на одинаковом расстоянии от этой оси, причем это расстояние примерно равно 0,6 радиуса R трубы. Такое поведение частиц попытались объяснить действием поперечной течению силы, действующей на частицы со стороны жидкости. Как известно, приближение Стокса не дает такой силы, действующей на одну частицу. Введение инерционных слагаемых в уравнения движения жидкости позволило получить выражение для поперечной силы, действующей на одиночную сферу [4,5]. Однако, согласно полученным выражениям, эта поперечная сила стремится сдвинуть частицу к оси трубы, что не согласуется с результатами эксперимента. Высказывались гипотезы, что такое поведение может быть обусловлено неньютоновским поведением жидкости [5].

В [6] вычислялась сила, действующая на частицу в параболическом потоке жидкости между двумя плоскостями, обусловленная как инерционными эффектами движения, так и взаимодействием частицы со стенками. Было получено, что сила равна нулю в положении, равном 0,6 расстояния частицы от оси движения. Фактически это означает, что эффект влияния стенки противоположен эффекту, связанному с инерцией движения, т.е. при течении Пуазейля сила, обусловленная инерцией движения, направлена к стенкам трубы. Результаты эксперимента [3] и по сей день служат примером действия поперечных миграционных сил, связанных с инерцией движения [7].

Решение задачи о гидродинамическом взаимодействии сферических частиц в течении с параболическим профилем скоростей, найденное выше, позволяет объяснить результат эксперимента действием иного механизма, не связанного с поперечными силами, действующими на одиночную частицу.

Как было показано выше, две частицы в результате их гидродинамического взаимодействия стремятся расположиться так, чтобы находиться на одинаковом расстоянии от оси трубы, при этом одна из них может находиться выше или ниже другой по течению. В случае бесконечной трубы с бльшим числом частиц парное взаимодействие частиц приведет к тому, что все они должны будут находиться на одинаковом расстоянии от оси трубы, образуя однородный цилиндрический слой, в котором парные взаимодействия, стремящиеся вытолкнуть частицу из слоя, компенсируют друг друга. Расстояние от оси, на котором образуется этот слой, можно оценить следующим образом. Как следует из сказанного, парное взаимодействие частицы A со всеми другими дает расстояние до оси, равное h^a, на котором относительные скорости частиц равны нулю. Так как в качестве частицы A может быть выбрана любая частица из данной конфигурации, то необходимо проинтегрировать полученный результат по всем частицам в единице объема. Это и будет среднее значение h^a. Для однородного распределения частиц после элементарных выкладок получаем $h^a = 2R/3$, что согласуется с экспериментом.

Для более точного определения среднего расстояния от оси, на котором образуется слой, необходимо решать задачу о стационарном распределении частиц в потоке в результате их парного взаимодействия с учетом взаимодействия частиц со стенками трубы. Для такого учета в полученное выше распределение скорости в результате взаимодействия двух сфер в параболическом течении необходимо добавить слагаемые, учитывающие граничные условия на трубе и равные нулю на поверхности частиц. Для этого, как и в задаче о движении одиночной частицы в пуазейлевском потоке, необходимо записать найденное выше решение в цилиндрической системе координат. Процедура такого перехода расписана в [8] и имеет чисто технические сложности, связанные с громоздкостью вычислений.

Заключение. Методом, предложенным в [2], найдено аналитическое решение задачи о гидродинамическом взаимодействии двух сферических частиц одинакового радиуса, помещенных в жидкость, скорость которой на бесконечности представляется в виде полинома четной степени по координатам. Граничные условия и, следовательно, решение задачи для скорости удовлетворяют симметричному преобразованию. Получены выражения для сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицы, и определены относительные линейные и угловые скорости сфер. Как и предполагалось в [2], поведение частиц в параболическом потоке существенно отличается от поведения частиц в линейном течении, что связано с различными свойствами решений: скорость жидкости удовлетворяет соответственно симметричному и антисимметричному преобразованию. Это приводит к тому, что частицы в параболическом потоке стремятся занять устойчивое положение в плоскости, проходящей через ось течения, и на одинаковом расстоянии от этой оси. Такое поведение частиц качественно согласуется с экспериментальными результатами по распределению частиц в течении Пуазейля в трубе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-03295).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Martynov S.I.* The hydrodynamic interaction of two spherical particles in viscous fluid // 7th Israeli-Norwegian Symposium "Fluid Mechanics of Heterogeneous Systems". Trondheim, Norway, 1994. P. 67–69.
2. *Мартынов С.И.* Гидродинамическое взаимодействие частиц // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. с. 112–119.
3. *Segre G., Silberberg A.* Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Pt 1, 2 // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt. 1. P. 115–157.
4. *Rubinov S.I., Keller J.B.* The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 1961. V. 11. Pt 3. P. 447–459.

5. *Saffman P.G.* The lift on a small sphere in a shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 385–400.
6. *Ho B.P., Leal L.G.* Inertial migration of rigid spheres in two dimentional unidirectional flows // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. Pt 2. P. 365–400.
7. *Koh C.J., Hookhan P., Leal L.G.* An experimental investigation of concentrated suspension flows in a rectangular channel // J. Fluid Mech. 1994. V. 266. P. 1–32.
8. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds Number Hydrodynamics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965. 553 p. = Хаппель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1971. 630 с.

Саранск

Поступила в редакцию
23.XII.1998