МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 2000

УДК 532.513.031

© 2000 г. Г.Я. ДЫННИКОВА

АНАЛОГ ИНТЕГРАЛОВ БЕРНУЛЛИ И КОШИ – ЛАГРАНЖА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Для нестационарного течения идеальной несжимаемой жидкости с завихренностью, не всюду равной нулю, выведено выражение, имеющее постоянное во всем пространстве значение (в том числе и в неодносвязных областях), связывающее функцию давления с квадратом скорости и характеристиками движущихся вихрей. В случае наличия в течение обтекаемых тел последние также должны быть представлены в виде движущихся вихрей. При стационарном течении полученная формула переходит в интеграл Бернулли, а при нестационарном безвихревом – в интеграл Коши – Лагранжа.

В данной работе путем интегрирования уравнений Эйлера получено выражение, связывающее давление, плотность, квадрат скорости и потенциал объемных сил с некоторой функцией, представляющей собой определенный интеграл по областям с ненулевой завихренностью, включая поверхности разрыва и области локализации вихрей, моделирующих тела. Использование формулы целесообразно для вычисления давления при решении задач вихревыми методами, когда в основе лежит расчет эволюции завихренности и моделирующих тело вихрей, а затем по ним определяется скорость [1, 2]. В этом случае задача нахождения давления сводится к представлению тела в виде движущихся вихрей и вычислению определенного интеграла по всем вихревым областям. Вихри, моделирующие обтекаемые тела, помимо условия непротекания на поверхности должны удовлетворять следующим условиям.

1. В совокупности со свободными вихрями они образуют соленоидальное поле, при этом вихревые трубки, оканчивающиеся на поверхности тел, переходят в вихревые трубки той же интенсивности моделирующих вихрей. В случае поверхностных моделирующих вихрей это означает, что дивергенция поверхностного вихревого поля $\boldsymbol{\gamma}_s$ равна сумме потоков вектора объемной завихренности $\boldsymbol{\Omega}$ по обе стороны поверхности $\boldsymbol{\Omega}_+ \cdot \mathbf{n}_+ + \boldsymbol{\Omega}_- \cdot \mathbf{n}_- = \operatorname{div} \boldsymbol{\gamma}_s$, где $\mathbf{n}_\pm$ – нормаль к поверхности, внешняя по отношению к соответствующей области.

2. Изменение во времени поля моделирующих вихрей представляется как результат их движения, приводящего к соответствующему перераспределению, при этом в процессе движения все вихревые трубки остаются непрерывными.

3. Вихри нигде не исчезают иначе, чем при аннигиляции, и не рождаются иначе, чем в процессе, обратном аннигиляции.

Практические способы такого представления тел обсуждаются в соответствующем разделе работы.

1. Формулировка теоремы. Прежде чем сформулировать теорему, введем необходимые обозначения и условие, достаточное для ее доказательства.

Известно, что вектор скорости $\mathbf{V}$ в несжимаемой жидкости может быть выражен как интеграл скоростей, индуцированных всеми вихрями

$$\mathbf{V}(R) = \int \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\tau + \mathbf{V}_\infty$$

где $\mathrm{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ – скорость, индуцированная в точке $\mathbf{R}$ вихревым элементом, расположенным в точке $\mathbf{r}$. Интегрирование ведется по всем областям, содержащим ненулевую завихренность, включая области локализации моделирующих вихрей и поверхности тангенциального разрыва. При этом для объемного распределения завихренности

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{R})d\tau = \mathbf{v}_1(\mathbf{r},\mathbf{R})d^2\mathbf{r} = \mathbf{K}\times \mathbf{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{K} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3}$$

Для бесконечно тонкой вихревой пелены $\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{R})d\tau = \mathbf{v}_2(\mathbf{r},\mathbf{R})ds = \mathbf{K}\times\boldsymbol{\gamma}ds$, где $\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-)\times \mathbf{n}_+$, $\mathbf{V}_+$ и $\mathbf{V}_-$ – скорости по обе стороны вихревой пелены, $\mathbf{n}_+$ – нормаль к поверхности, расположенная с той же стороны, что и $\mathbf{V}_-$. Аналогичные формулы имеют место для определения скорости $\mathbf{v}_3(\mathbf{r}, \mathbf{R})$, индуцированной моделирующими тело вихрями, при их поверхностном или объемном распределении. Скорость $\mathbf{V}_\infty$ может быть связана с наложением некоторого поля течения $\mathbf{V}_{\infty 1}$, а также с выбором системы отсчета, движущейся со скоростью $-\mathbf{V}_{\infty 2}$, и может зависеть от времени и от координат, например, в случае вращающейся неинерциальной системы отсчета.

Далее рассматриваются только системы отсчета, движущиеся поступательно, т.е. $\mathbf{V}_{\infty 2}$ может зависеть от t, но не зависит от координат. Обтекаемые тела при этом могут совершать и вращательные движения. Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие.

Условие. Среднее значение величины $|\mathbf{V}|\cdot|\boldsymbol{\Omega}|$ по сфере радиуса R_s стремится к нулю при $R_s \to \infty$, т.е.

$$\lim_{R_s\to\infty} \frac{1}{4\pi R_s^2}\iint_S |\mathbf{V}|\cdot|\boldsymbol{\Omega}|\,ds = 0$$

а также стремится к нулю аналог этой величины, имеющий место в случае наличия уходящих на бесконечность тангенциальных разрывов, а именно величина

$$\frac{1}{4\pi R_s^2}\int_C \left|\frac{\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-}{2}\right|\cdot|\gamma|\,dl$$

где C – линия пересечения поверхности разрыва со сферой радиуса R_s.

Это условие означает, что либо величина $|\mathbf{V}|\cdot|\boldsymbol{\Omega}|$ стремится к нулю на бесконечности, либо стремится к нулю телесный угол, в котором она конечна. Данное условие не ограничивает круг задач, рассматриваемых в аэродинамике, и практически всегда выполняется. В любом случае на достаточно большом расстоянии от обтекаемых объектов можно положить $\mathbf{rot}\ \mathbf{V} = 0$, замкнув вихревые линии. Это условие может быть выполнено также для течений с бесконечными вихревыми линиями, в частности для двумерных течений, если в плоскости течения вихревая область ограничена по крайней мере в одном измерении (например, лежит внутри полосы, ширина которой может быть много больше обтекаемых тел, но является конечной). Докажем, что при этом условии справедлива следующая теорема.

Теорема. При нестационарном вихревом течении идеальной несжимаемой жидкости в потенциальном поле объемных сил при стационарных условиях на бесконечности является постоянной во всем пространстве и не зависящей от времени величина

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2} - \int_\tau \mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{R})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r})d\tau = \text{const} \tag{1.1}$$

где p – давление, ρ – плотность, Π – отнесенный к единице массы потенциал объемных сил, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ – скорость, индуцированная в точке $\mathbf{R}$ вихревым элементом, расположенным в точке $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ – скорость движения этого элемента. Под интегрированием по τ подразумевается интегрирование по всем областям, содержащим ненулевую завихренность, включая свободные поверхности тангенциального разрыва и области локализации вихрей, моделирующих обтекаемые тела, а также поверхности стенок, если течение ими ограничено. При этом для объемного распределения завихренности $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r})$. Для бесконечно тонкой вихревой пелены скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 1/2(\mathbf{V}_+(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_-(\mathbf{r}))$, где $\mathbf{V}_+(\mathbf{r})$ и $\mathbf{V}_-(\mathbf{r})$ – скорости по обе стороны вихревой пелены. Для моделирующих тело вихрей $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{cf}(\mathbf{r})$ – некоторая эффективная скорость, приводящая к их перераспределению и обеспечивающая непрерывность потока завихренности, сходящей с поверхности в случае отрывных течений. Более подробно об этой скорости будет сказано ниже.

Подчеркнем, что константа в правой части (1.1) при наличии поверхностей тангенциального разрыва одна и та же для областей, разделенных этими поверхностями.

Если поле на бесконечности нестационарно из-за наложения нестационарного поля $\mathbf{V}_{\infty 1}$, являющегося потенциальным ($\mathbf{V}_{\infty 1} = \mathbf{grad}\,\varphi$), то формула имеет вид

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2} + \frac{d\varphi}{dt} - \int_\tau \mathbf{v}(\tau, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau = f(t) \tag{1.2}$$

Если же поле на бесконечности нестационарно из-за выбора неинерциальной системы координат, движущейся поступательно относительно инерционной, то формула имеет вид

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{(\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\infty 2})^2}{2} - \int_\tau \mathbf{v}(\tau, \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{V}_{\infty 2}) d\tau = \text{const} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \Pi_\infty \tag{1.3}$$

При этом константа в правой части не зависит от t, если $p/\rho + \Pi$ на бесконечности не зависит от t.

Нетрудно видеть, что (1.1) – частный случай (1.3), так как $\mathbf{V}_{\infty 2} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\infty 2} \cdot \int_\tau \boldsymbol{\nu}(\tau, \mathbf{R}) d\tau + V_{\infty 2}^2$, и после подстановки этого выражения в (1.3) получаем

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2} - \int_\tau \mathbf{v}(\tau, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \Pi_\infty + \frac{V_{\infty 2}^2}{2}$$

2. Доказательство теоремы. Запишем уравнения Эйлера для движения идеальной несжимаемой жидкости в поле потенциальных объемных сил в форме Громека – Лэмба

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2}\right)$$

Как уже говорилось выше, скорость движения в любой точке выражается в виде интеграла

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \iiint \mathbf{v}_1 d^3\mathbf{r} + \iint_s \mathbf{v}_2 ds + \iint_\tau \mathbf{v}_3 d\tau + \mathbf{V}_\infty$$

Докажем, что если $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению Эйлера и выполнено условие, сформулированное выше, то для величины $\mathbf{V}_{\text{in}} = \mathbf{V}(\mathbf{R}) - \mathbf{V}_\infty$ справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{\text{in}}}{\partial t} = -\mathbf{grad}\left\{\iiint \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} d^3\mathbf{r} + \iint_s \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} ds + \iint_\tau \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u} d\tau\right\} + \mathbf{V} \times \mathbf{rot}\mathbf{V}_{\text{in}} \tag{2.1}$$

Очевидно, что если (2.1) будет доказано, то его подстановкой в уравнение Эйлера будут доказаны также равенства (1.1) и (1.2). Равенство (1.3) не требует отдельного доказательства, так как оно выводится из (1.1) переходим в другую систему координат.

Рассмотрим частную производную по t от скорости, индуцированной пространственной завихренностью $\partial/\partial t \iiint \mathbf{v}_1 d^3\mathbf{r}$. При дифференцировании необходимо учесть, что область интегрирования может включать движущиеся поверхности разрыва. Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \mathbf{v}_1 d^3\mathbf{r} = \iiint \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} d^3\mathbf{r} + \iint\limits_{s_{+-}} \mathbf{v}_1(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})ds \tag{2.2}$$

Индексы "+, –" означают, что интегрирование проводится для свободных поверхностей разрыва с двух сторон. Преобразуем первый интеграл в правой части (2.2)

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \mathbf{K}\times\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = -\mathbf{K}\times \mathbf{rot}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}) \tag{2.3}$$

Воспользуемся известной формулой векторного анализа [3]

$$\mathbf{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{rotb} + \mathbf{b}\times\mathbf{rota} \tag{2.4}$$

положив $\mathbf{a} = \mathbf{K}$, $\mathbf{b} = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}$, и выразим $\mathbf{K}\times\mathbf{rot}\,(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V})$, учитывая, что $\mathbf{rot}\,\mathbf{K} = 0$

$$\mathbf{K}\times\mathbf{rot}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}) = \mathbf{grad}_r(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]) - (\mathbf{K}\cdot\nabla_r)[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}] - ([\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]\cdot\nabla_r)\mathbf{K} \tag{2.5}$$

Здесь индекс r указывает на то, что дифференцирование производится по r. С другой стороны, из (2.4) также следует

$$\mathbf{grad}_R(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]) = ([\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]\cdot\nabla_R)\mathbf{K}$$

так как от $\mathbf{R}$ зависит только вектор $\mathbf{K}$, причем он зависит от разности $\mathbf{R} - \mathbf{r}$, поэтому

$$([\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]\cdot\nabla_r)\mathbf{K} = -\mathbf{grad}_R(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}])$$

Кроме того, запишем, учитывая, что $\operatorname{div}\mathbf{K} = 0$

$$(\mathbf{K}\cdot\nabla_r)[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}] = (\nabla_r\cdot\mathbf{K})[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]$$

Подставляя два последних равенства в (2.5), получим

$$\mathbf{K}\times\mathbf{rot}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}) = \mathbf{grad}_r(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]) - (\nabla_r\cdot\mathbf{K})[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}] + \mathbf{grad}_R(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}])$$

Подставим это выражение в (2.3) и проинтегрируем по r

$$\iiint\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}d^3\mathbf{r} = -\iiint \mathbf{grad}_r(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}])d^3\mathbf{r} +$$

$$+\iiint(\nabla_r\cdot\mathbf{K})[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]d^3\mathbf{r} - \mathbf{grad}_R\{\iiint(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}])d^3\mathbf{r}\} \tag{2.6}$$

Обозначим последнее слагаемое в (2.6) как $\mathbf{G}_1$ и, используя известное из векторной алгебры равенство $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, перепишем его в виде

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{grad}\iiint[\mathbf{K}\times\mathbf{\Omega}]\cdot\mathbf{V}d^3\mathbf{r} = \mathbf{grad}\iiint(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{V})d^3\mathbf{r}$$

Два первых слагаемых в правой части (2.6) преобразуем, используя известную теорему векторного анализа о связи объемных и поверхностных интегралов [3]

$$\iiint\limits_{\tau} L(\nabla)d\tau = \iint\limits_{s} L(\mathbf{n})ds$$

где $L(\nabla)$ – линейная функция от оператора Гамильтона, причем слева от ∇ могут стоять только постоянные в области τ векторы или скалярные функции. Получим

$$\iiint \mathbf{grad}_r(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}])d^3\mathbf{r} = \iint\limits_{s_{+-\infty R}} \mathbf{n}(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}])ds \tag{2.7}$$

$$\iiint(\nabla_r\cdot\mathbf{K})[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]d^3\mathbf{r} = \iint\limits_{s_{+-\infty R}}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{K})[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]ds \tag{2.8}$$

Здесь интегрирование ведется по всем поверхностям разрыва, включая окрестность точки $\mathbf{R}$, а также бесконечно удаленную поверхность, что отражено в индексах под знаком интеграла. Нетрудно убедиться, что интегрирование по сфере бесконечно малого радиуса вокруг точки $\mathbf{R}$ дает нулевой вклад в (2.7) и слагаемое $\mathbf{V}\times\mathbf{\Omega}$ в (2.8). Интегрирование по бесконечно удаленной поверхности дает нулевой вклад при выполнении условия, оговоренного в начале работы. В результате имеем

$$\iiint \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} d^3\mathbf{r} = -\iint_{s_{+-}} \mathbf{n}(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}])ds + \iint_{s_{+-}} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{K})[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]ds + \mathbf{V}\times\mathbf{\Omega} - \mathbf{G}_1$$

Подставляя это выражение в (2.2), запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \mathbf{v}_1 d^3\mathbf{r} = -\mathbf{G}_1 + \mathbf{V}\times\mathbf{\Omega} - \iint_{s_{+-}} \mathbf{n}(\mathbf{K}\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}])ds +$$

$$+\iint_{s_{+-}} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{K})[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}]ds + \iint_{s_{+-}} [\mathbf{K}\times\mathbf{\Omega}](\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})ds$$

Используя известное соотношение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ac})$, можно из последнего равенства получить

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \mathbf{v}_1 d^3\mathbf{r} + \mathbf{grad}\iiint(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{V})d^3\mathbf{r} - \mathbf{V}\times\mathbf{\Omega} = \iint_{s_{+-}} [\mathbf{K}\times\mathbf{V}](\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n})ds \qquad (2.9)$$

Очевидно, что если рассматривается течение без поверхностей разрыва и обтекаемых тел, то утверждение (2.1), а с ним и основная теорема доказаны.

Очевидно, что интеграл, стоящий в правой части (2.9), обращается в нуль, если нет вихревых линий, оканчивающихся на поверхности, поскольку величина $d\Gamma = \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n}ds$ есть интенсивность вихревой трубки, оканчивающейся на элементе поверхности ds.

Рассмотрим изменение скорости, индуцированной отрезком (не обязательно прямолинейным) бесконечно тонкой вихревой трубки при ее произвольном движении. Докажем следующее утверждение: если вихревая нить с циркуляцией $d\Gamma$ движется в пространстве, то для скорости, индуцируемой отрезком этой нити, справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_L \mathbf{v}dl + \mathbf{grad}\int_L \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}dl = d\Gamma[\mathbf{K}\times\mathbf{u}]\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2} - d\Gamma[\mathbf{K}\times\mathbf{u}]\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} \qquad (2.10)$$

где $\mathbf{v}dl$ – скорость, индуцируемая элементом нити dl, а $\mathbf{u}$ – скорость движения этого элемента, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ – координаты концов отрезка.

Пусть форма отрезка нити описывается функцией $\mathbf{r}(\xi, t)$ в интервале $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$, тогда вектор завихренности элемента $d\xi$ равен $d\Gamma d\mathbf{l} = \boldsymbol{\omega}d\xi$, где $\boldsymbol{\omega} = d\Gamma\partial\mathbf{r}/\partial\xi$ и, следовательно

$$\mathbf{V} = \int_L \mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{R},t)dl = \int_{\xi_1}^{\xi_2}[\mathbf{K}\times\boldsymbol{\omega}]d\xi$$

Продифференцируем это равенство по t. Так как $\mathbf{K}$ является функцией только $(\mathbf{R}-\mathbf{r})$, а $\partial\mathbf{r}/\partial t = \mathbf{u}$, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{K} = (\mathbf{u}\cdot\nabla_r)\mathbf{K}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = d\Gamma\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\xi\partial t} = d\Gamma\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi}$$

Следовательно, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left\{-\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{u}\cdot\nabla_r)\mathbf{K} + d\Gamma\left[\mathbf{K}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi}\right]\right\}d\xi \qquad (2.11)$$

Теперь преобразуем второе слагаемое в левой части (2.10), раскрывая градиент от скалярного произведения и учитывая, что от **R** зависит только вектор **K**

$$\mathbf{grad}\int_L \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}dl = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\nabla_R(\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{R})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}))d\xi =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2}((\mathbf{u}\cdot\nabla_R)[\mathbf{K}\times\boldsymbol{\omega}]+\mathbf{u}\times\mathbf{rot}_R[\mathbf{K}\times\boldsymbol{\omega}])d\xi \tag{2.12}$$

Раскрывая ротор от векторного произведения по известной формуле [3] $\mathbf{rot}[\mathbf{c}\times\mathbf{d}] = (\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\mathbf{c} - (\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{d} + \mathbf{c}\mathrm{div}\mathbf{d} - \mathbf{d}\mathrm{div}\mathbf{c}$ с учетом того, что $\mathrm{div}\,\mathbf{K} = 0$, запишем

$$\mathbf{rot}_R[\mathbf{K}\times\boldsymbol{\omega}] = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_R)\mathbf{K}$$

Подставляя это выражение в (2.12) и учитывая, что $(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_R) = -(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_r)\mathbf{K} = -d\Gamma(\partial\mathbf{K}/\partial\xi)$, получим

$$\mathrm{grad}\int_L \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}dl = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left\{-\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{u}\cdot\nabla_R)\mathbf{K}+d\Gamma\left[\mathbf{u}\times\frac{\partial K}{\partial\xi}\right]\right\}d\xi$$

Складывая последнее равенство с (2.11) и производя интегрирование, получим (2.10).

Для скорости, индуцированной бесконечной или замкнутой вихревой трубкой, равенство (2.10) выполняется с нулевой правой частью, так как если трубка бесконечна, то в точках ξ_1 и ξ_2 $|\mathbf{K}| = 0$, если вихревая трубка замкнута, то в точках ξ_1 и ξ_2 значения $\mathbf{K}\times\mathbf{V}$ совпадают.

Сравнивая правые части (2.10) и (2.9), можно видеть, что если на поверхность тела $d\Gamma = (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n})dS$ для "входящих" в тело вихрей и $d\Gamma = -(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n})dS$ для "выходящих" (т.е. вихревые трубки свободных вихрей переходят в вихревые трубки вихрей, моделирующих тело) и скорости движения вихрей **u** на поверхности совпадают со скоростями движения свободных вихрей, то при сложении (2.9) и интеграла от (2.10) по всем таким вихревым трубкам правые части взаимно уничтожатся, т.е. (2.1) будет выполнено.

Отдельного рассмотрения требуют свободные поверхности разрыва, так как в общем случае на них могут оканчиваться пространственные вихревые трубки и движение поверхности со скоростью, равной среднеарифметическому скоростей по обе ее стороны, вообще говоря, не обеспечивает непрерывности движения вдоль вихревых трубок. Можно показать, что при наличии в пространстве течения поверхностей разрыва справедливо равенство (ввиду громоздкости доказательства здесь оно не приводится)

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_s \mathbf{v}_2 ds + \mathbf{grad}\iint_s \mathbf{v}_2\cdot\frac{\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-}{2}ds =$$

$$= -\iint_{s_{-+}}[\mathbf{K}\times\mathbf{V}](\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega})ds - \oint_{C_{+-}}\mathbf{K}\times\mathbf{V}\times[\mathbf{V}_c\times d\mathbf{l}] - \oint_{C_{+-}}\frac{1}{2}|V|^2\,\mathbf{K}\times d\mathbf{l}$$

где C – линии пересечения поверхности разрыва с поверхностью тела. Два последних слагаемых могут быть переписаны в виде

$$-\oint_{C_{+-}}\frac{1}{2}|V|^2\,\mathbf{K}\times d\mathbf{l} - \oint_{C_{+-}}\mathbf{K}\times\mathbf{V}\times[\mathbf{V}_c\times d\mathbf{l}] =$$

$$= -\oint_{C_+}[\mathbf{K}\times\mathbf{V}_c]((\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-)\cdot d\mathbf{l}) + \oint_{C_+}[\mathbf{K}\times d\mathbf{l}]\left|\left(\frac{1}{2}(\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-) - \mathbf{V}_c\right)\times\boldsymbol{\gamma}\right|$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства аналогично интегралу $-\iint\limits_{s_{+-}} [\mathbf{K}\times\mathbf{V}](\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega})ds$ и связано с движением "концов" вихревых трубок по поверхности тела. Второе слагаемое связано со сходом вихревой пелены. Оно может отличаться от нуля и в том случае, когда вектор $\boldsymbol{\gamma}$ на линии l всюду коллинеарен вектору $d\mathbf{l}$, т.е. когда вихревые трубки пелены не являются продолжением трубок на поверхности. Это слагаемое связано с "рождением" на линии l завихренности, вектор которой направлен по касательной к этой линии, а интенсивность вихрей, генерированных за единицу времени, равна $|(\mathbf{u}-\mathbf{V}_c)\times\boldsymbol{\gamma}|$. Эта завихренность затем уносится пеленой. Очевидно, что если движение моделирующих вихрей определено таким образом, что в совокупности их с внешними вихрями, оканчивающимися на теле, вихревые линии замкнуты или бесконечны, непрерывность их не нарушается в процессе движения, вихри нигде не исчезают иначе, чем при аннигиляции, и не рождаются иначе, чем совпадающими парами противоположных знаков или вихревыми кольцами бесконечно малой площади, то для скоростей, индуцированных всей совокупностью вихрей, будет выполняться равенство (2.1).

Вихри, моделирующие тело, могут быть как пространственными, так и поверхностными. Выведем уравнение, связывающее изменение во времени поверхностной завихренности от скорости движения плоских вихревых трубок при условии сохранения их интенсивности в процессе движения. Вектор завихренности отрезка вихревой трубки, поперечного сечения Δh длины Δl равен $\Delta\mathbf{\Gamma} = \gamma\Delta h\Delta\mathbf{l}$. При движении скалярная величина $\gamma\Delta h$ сохраняется, поэтому

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{\Gamma} = \gamma\Delta h\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{l}$$

С другой стороны, $\Delta\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\gamma}\Delta s$, где $\Delta s = \Delta h\ \Delta l$ – площадь отрезка вихревой трубки. Следовательно

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\gamma}\frac{d}{dt}\Delta s + \Delta s\frac{d}{dt}\boldsymbol{\gamma}$$

Сравнивая эти два равенства и учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{l} = \frac{\Delta l}{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}, \quad \frac{d}{dt}\Delta s = \Delta s\,\mathrm{div}_s\,\mathbf{u}$$

получим

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}\,\mathrm{div}_s\,\mathbf{u} \tag{2.13}$$

Индекс s означает, что дифференцирование ведется в плоскости, касательной к поверхности.

Полная производная по времени может быть представлена как

$$\frac{d}{dt} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s + (\mathbf{u}-\mathbf{V}_0)\cdot\boldsymbol{\nabla}$$

где $\partial/\partial t\,|_s$ – частная производная в локальной системе координат на поверхности, $\mathbf{V}_0$ – скорость движения этой системы координат. Очевидно, что нормальные составляющие скоростей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{V}_0$ совпадают. Следовательно, (2.13) можно переписать в виде

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s\boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{V}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}_s)\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{rot}_s(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{u}\,\mathrm{div}_s\,\boldsymbol{\gamma} \tag{2.14}$$

Назовем величину $\mathbf{u}\times\boldsymbol{\gamma}$ потоком завихренности. Знания именно этой величины достаточно для использования формулы (1.1), так как стоящее под интегралом выражение $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$ можно переписать как $[\mathbf{K} \times \boldsymbol{\gamma}] \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\gamma}]$. Аналогичные рассуждения для случая движения пространственной завихренности приводят к уравнению

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$$

или, с учетом того что $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Omega} = 0$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot}[\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}]$$

Как уже говорилось выше, поле моделирующих вихрей должно включать в себя продолжение пространственных вихревых линий, оканчивающихся на поверхности и движущихся со скоростью $\mathbf{V}$ движения жидкости на поверхности. Кроме того, в случае отрывных течений на линии отрыва должно обеспечиваться условие неразрывности потока завихренности.

В случае, если моделирующие вихри являются только поверхностными, для поверхностного поля завихренности $\boldsymbol{\gamma}_s$ условие непрерывности вихревых трубок выражается равенством $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\gamma}_s = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})$, а условие неразрывности потока завихренности имеет вид

$$|(\mathbf{u} - \mathbf{V}_c) \times \boldsymbol{\gamma}_s|_+ - |(\mathbf{u} - \mathbf{V}_c) \times \boldsymbol{\gamma}_s|_- = \left|\left(\frac{\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-}{2} - \mathbf{V}_c\right) \times [(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-) \times \mathbf{n}]\right|$$

Множество моделирующих тело вихрей целесообразно представить как суперпозицию двух полей: поля $\boldsymbol{\gamma}_1$, удовлетворяющего перечисленным выше условиям и движущегося со скоростью $\mathbf{V}$, и поля $\boldsymbol{\gamma}_2$, непрерывного и соленоидального на поверхности, движущегося таким образом, чтобы в совокупности движение двух полей обеспечивало необходимое перераспределение завихренности.

Запишем уравнения движения суперпозиции этих полей. Для поля $\boldsymbol{\gamma}_1$ с дивергенцией, равной $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}$, и скоростью движения вихрей $\mathbf{u} = \mathbf{V}$ уравнение имеет вид

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s \boldsymbol{\gamma}_1 - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla_s)\boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{rot}_s(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\gamma}_1) + \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})$$

Для второго, соленоидального поля $\boldsymbol{\gamma}_2$, движущегося со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{V}_2$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s \boldsymbol{\gamma}_2 - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla_s)\boldsymbol{\gamma}_2 = \mathbf{rot}_s(\mathbf{V}_2 \times \boldsymbol{\gamma}_2)$$

Назовем эффективной скоростью движения скорость $\mathbf{u}_{\mathrm{ef}}$, такую, что $[\boldsymbol{\gamma}_s \times \mathbf{u}_{\mathrm{ef}}] = [\boldsymbol{\gamma}_1 \times \mathbf{V}] + [\boldsymbol{\gamma}_2 \times \mathbf{V}_2]$, и, следовательно, удовлетворяющую уравнению

$$\mathbf{rot}_s[\boldsymbol{\gamma}_s \times \mathbf{u}_{\mathrm{ef}}] = -\left.\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_s}{\partial t}\right|_s + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla_s)\boldsymbol{\gamma}_s - \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}) \qquad (2.15)$$

Это уравнение (вместе с условием неразрывности потока завихренности для отрывных течений) – определяющее для векторного произведения $\boldsymbol{\gamma}_s \times \mathbf{u}_{\mathrm{ef}}$ в случае, если моделирующие вихри задаются как поверхностные. Однако, как будет показано ниже, возможны и другие способы задания моделирующих вихрей. При этом процедура нахождения скоростей их движения может быть более простой, чем решение уравнения (2.15).

3. Некоторые способы применения доказанной теоремы. Как уже говорилось, полученную формулу целесообразно использовать для расчета давления при решении нестационарных задач вихревыми методами. В этом случае вихри, моделирующие тело, находятся из условия непротекания по заданному распределению завихренности в пространстве и скорости движения тела. Моделирующие вихри могут быть расположены как на поверхности, так и внутри тела. Необходимо, чтобы в совокупности их с внешними вихрями, оканчивающимися на поверхности, вихревые трубки были замкнутыми либо бесконечными. Кроме того, должно быть выполнено следующее условие: вихри нигде не должны исчезать иначе, чем при аннигиляции, и не рождаться иначе, чем совпадающими парами противоположных знаков или вихревыми кольцами бесконечно малого размера.

В случае, когда внешние вихревые трубки оканчиваются на поверхности тела, целесообразно представлять моделирующие вихри в виде суперпозиции двух полей, одно из которых представляет собой продолжение внешних вихревых трубок, второе – состоит из вихревых трубок, замкнутых внутри тела. Первое поле может быть выбрано достаточно произвольно, например в виде конусообразных вихревых трубок, выходящих из фиксированной точки внутри тела и оканчивающихся на поверхности, или в виде поверхностей вихрей, направленных вдоль линий расчетной сетки. Второе, соленоидальное поле γ_2 ($\mathrm{div}_s\gamma_2 = 0$) должно обеспечивать условие непротекания для заданного распределения внешней завихренности и первого поля. Оно может быть локализовано как на поверхности тела, так и внутри его. В случае поверхностного распределения условие непротекания, определяющее это поле, имеет вид

$$\mathbf{n}\cdot\int_s \mathbf{K}\times\boldsymbol{\gamma}_2 ds = -\mathbf{n}\cdot\int [\mathbf{K}\times\boldsymbol{\Omega}]d^3r - \mathbf{n}\cdot\int_\tau [\mathbf{K}\times\boldsymbol{\gamma}_1]d\tau - \mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_0) \tag{3.1}$$

Более удобно искать его в виде распределения вихревых колец (диполей) с плотностью σ, удовлетворяющей условию непротекания

$$\mathbf{n}\cdot\int_s \sigma\mathbf{v}_d(\mathbf{R}-\mathbf{r})ds = -\mathbf{n}\cdot\int [\mathbf{K}\times\boldsymbol{\Omega}]d^3r - \mathbf{n}\cdot\int_\tau [\mathbf{K}\times\boldsymbol{\gamma}_1]d\tau - \mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_0) \tag{3.2}$$

где $\mathbf{v}_d$ – скорость, индуцируемая единичным диполем

$$\mathbf{v}_d(\mathbf{r})ds = \frac{1}{4\pi}\left\{-\frac{d\mathbf{s}}{r^3} + 3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{s})\frac{1}{r^5}\right\}$$

Уравнения (3.1), (3.2), как известно, должны быть дополнены условиями на острых кромках. Если решается нестационарная задача обтекания твердого тела, то для уравнений (3.1) или (3.2) достаточно один раз найти оператор (функцию Грина или, в численной реализации – матрицу), позволяющий находить σ или γ_2 по правой части уравнений (3.1), (3.2), после чего на последующих шагах эти поля будут вычисляться с помощью квадратур.

Когда оба поля определены, скорость во всем поле течения может быть вычислена как индуцированная всеми вихрями и диполями. Следовательно, может быть вычислена скорость перемещения внешних вихрей и их перераспределение. Скорость движения для первого поля моделирующих вихрей выбирается таким образом, чтобы обеспечивалась непрерывность вихревых линий на границе с внешними вихрями. Например, при пространственном распределении, о котором говорилось выше, отрезки вихрей можно считать движущимися так, что скорость движения в точках пересечения с поверхностью совпадает со скоростью на поверхности. При поверхностном представлении этого поля вихревые линии могут, например, считаться приклеенными к телу всюду, кроме бесконечно малой окрестности точки перехода во внешнюю линию, где относительная скорость изменяется от нуля до внешней скорости, в результате движения линия на поверхности будет наращиваться вдоль траектории движения. Возможны и другие способы представления этого поля.

Скорость движения второго поля может быть найдена следующим образом. Поскольку в каждый момент времени это поле определяется по положению внешних вихрей и первого поля, можно вычислить скорость изменения его в фиксированной точке поверхности. По этому изменению можно найти скорость движения вихрей, приводящего к такому перераспределению. Например, можно представить, что объем тела заполнен вихрями бесконечно малой интенсивности (назовем их виртуальными вихрями $\mathbf{\Omega}_V$), движущимися с бесконечно большой скоростью $\mathbf{V}_V$ по направлению от некоторой фиксированной точки внутри тела $\mathbf{R}_0$ к точке поверхности $\mathbf{R}$ таким образом, что в системе координат, связанной с телом

$$\mathbf{\Omega}_V \times \mathbf{V}_V = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_2}{\partial t} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_0|} \frac{1}{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\mathbf{n}}$$

Можно показать, что при таком распределении скорости в случае, если поле $\boldsymbol{\gamma}_2$ соленоидально на поверхности, имеем $\partial \mathbf{\Omega}_V / \partial t = 0$, т.е. интенсивность виртуального вихревого поля остается бесконечно малой. При расчете давления по формуле (1.1) движение виртуальных вихрей в объеме тела также должно быть учтено, хотя скорость, индуцированная ими, бесконечно мала, но величина скалярного произведения этой скорости на скорость движения виртуальных вихрей – конечная величина. Если поле $\boldsymbol{\gamma}_2$ найдено в виде вихревых диполей, распределенных по поверхности с плотностью σ, то в системе координат, связанной с телом, $\boldsymbol{\gamma}_2 \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{n}\partial\sigma/\partial t$. В этом легко убедиться, взяв ротор от обоих выражений. Учитывая, что

$$\mathbf{rot}_s\left(\mathbf{n}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) = \mathbf{\nabla}_s \frac{\partial s}{\partial t} \times \mathbf{n}$$

и $\mathbf{\nabla}_s \sigma \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\gamma}_2$, получим уравнение движения вихрей в системе координат, связанной с телом

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s \boldsymbol{\gamma}_2 = \mathbf{rot}_s(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\gamma})$$

Переход в другую систему координат не представляет труда.

При наличии отрыва потока необходимо обеспечить условие, согласно которому вихри нигде не исчезают иначе, чем при аннигиляции, и не рождаются иначе, чем парами или кольцами бесконечно малой площади. Это можно сделать, представляя сошедшие вихри в виде раскрывающихся вихревых колец, частично "приклеенных" к поверхности тела. При этом "приклеенные" части колец будут влиять на распределение поля $\boldsymbol{\gamma}_2$, обусловливая его движение даже в случае стационарного отрывного течения (имеются в виду отрывные течения, при которых неустойчивостью вихревого следа пренебрегают).

Заключение. Для нестационарных вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости доказано равенство (1.1), аналогичное формулам Бернулли и Коши – Лагранжа. Полученная формула может использоваться для нахождения давления при решении нестационарных задач гидродинамики вихревыми методами.

Для применения полученной формулы при наличии в течение обтекаемых объектов последние должны быть представлены в виде движущихся вихрей, удовлетворяющих следующим условиям. В совокупности со свободными вихрями моделирующие вихри образуют соленоидальное поле (вихревые трубки, оканчивающиеся на поверхности тел, переходят в вихревые трубки той же интенсивности моделирующих вихрей). В процессе движения все вихревые трубки остаются непрерывными; вихри нигде не исчезают иначе, чем при аннигиляции, и не рождаются иначе, как парами противоположных знаков или вихревыми кольцами бесконечно малой площади.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-15-9603 поддержки ведущих научных школ и проект 98-01-00156).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leonard A.* Vortex methods for flow simulation // J. Comput. Phys. 1980. V. 37. № 3. P. 289–335.
2. *Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.* Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Физматлит, 1995. 367 с.
3. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
4. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло внестационарном потоке газа М.: Наука, 1971. 767 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.XII.1998