

УДК 532.516.013.4

В.К. АХМЕТОВ, В.Я. ШКАДОВ

О НОВОЙ ВЯЗКОЙ МОДЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОГО ВИХРЯ

В рамках линейной теории численно исследована задача об устойчивости свободного вихря по отношению к неосесимметричным возмущениям. Найдена новая вязкая мода, для которой рассчитаны максимальные коэффициенты усиления и соответствующие критические параметры.

Задача об устойчивости свободных вихрей актуальна в области аэродинамики при моделировании концевых вихрей, сходящих с задней кромки крыльев, при исследовании отрыва потока с передней кромки крыла большой стреловидности, а также при изучении закрученных течений в вихревых устройствах с точки зрения объяснения явления распада вихря [1]. Именно с развитием неустойчивости связывают явление распада вихрей. Исследуемое течение описывается профилями скорости, полученными из автомодельного решения Бэтчелора [2]. Невязкие моды неустойчивости свободного вихря численно исследованы в [3–4], асимптотическими методами – в [5], а сравнение результатов дано в [6]. В настоящей работе представлены расчеты для новой вязкой моды, впервые найденной в [7], и проведено ее сравнение с известными результатами.

1. Постановка задачи. Пусть имеется однородное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости с полем скоростей

$$U(r) = \exp(-r^2), \quad W(r) = qr^{-1}[1 - \exp(-r^2)], \quad V(r) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь U , V , W – осевая, радиальная и азимутальная компоненты скорости в цилиндрической системе координат z , r , ϕ ; q – параметр закрутки. Профили (1.1) выводятся из автомодельного решения уравнений Навье – Стокса, полученного Бэтчелором [2], для вязкого закрученного следа в предположении локальной плоскопараллельности потока.

Рассмотрим малые возмущения течения (1.1) как решения линеаризованных уравнений Навье – Стокса типа бегущей волны (нормальные моды)

$$\{V_z', V_r', V_\phi', p'\} = \{F, iS, H, P\} \exp[i(\alpha z + n\phi - \alpha ct)] \quad (1.2)$$

в которых α , n – волновые числа, причем положительные значения n соответствуют распространению волны в направлении закрутки, а отрицательные – в противоположном. Тогда для комплексных амплитудных функций $F(r)$, $S(r)$, $H(r)$, $P(r)$ получим систему уравнений

$$r^2 \gamma F + \alpha r^2 P + r^2 S U' = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rF')' - (\alpha^2 r^2 + n^2)F]$$

$$r^2 \gamma S + 2rHW - r^2 P' = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rS')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)S - 2nH]$$

$$r^2 \gamma H + r^2 S \left(W' + \frac{W}{r} \right) + m P = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rH')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)H - 2nS] \quad (1.3)$$

$$\alpha r F + (rS)' + nH = 0, \quad \gamma = \alpha(U - c) + \frac{nW}{r}, \quad \text{Re} = \frac{U_0 L}{v}$$

где U_0 – скорость на оси $r = 0$, L – радиус вихревого ядра, определяемый по максимальному значению $W(r)$, штрих означает производную по r .

Граничные условия для системы (1.3) выводятся из требований затухания возмущений на бесконечности и регулярного поведения решения вблизи оси $r = 0$ [8]

$$\begin{aligned} S(0) = H(0) = 0, \quad F(0), P(0) < \infty \quad (n = 0) \\ S(0) \pm H(0) = 0, \quad F(0) = P(0) = 0 \quad (n = \pm 1) \\ S(0) = H(0) = F(0) = P(0) = 0 \quad (|n| > 1) \\ S(\infty) = H(\infty) = F(\infty) = P(\infty) = 0 \quad (\forall n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Будем рассматривать возмущения (1.2), в которых α – действительное. Тогда решением системы (1.3) с граничными условиями (1.4) при фиксированных параметрах Re , q , α , n определяются комплексные собственные числа $c = c_r + ic_i$, в которых c_r – фазовая скорость, $\omega_i = \alpha c_i$ – коэффициент усиления. При $c_i > 0$ амплитуды возмущения (1.2) растут, при $c_i < 0$ – затухают с течением времени.

Метод расчета собственных значений для задачи (1.3) – (1.4) включает несколько этапов [7]. Вблизи особых точек $r = 0$ и $r = \infty$ строятся асимптотические решения по методу Фробениуса [9], которые позволяют перенести граничные условия в точки $r = r_a$ и $r = r_d$ соответственно. От этих точек решения продолжают численным интегрированием по методу Рунге – Кутты с автоматическим выбором шага и контролируемой точностью, причем на каждом шаге интегрирования проводится процедура ортогонализации по методу Грамма – Шмидта. Численные решения склеиваются в точке r_c ($r_a < r_c < r_d$) путем решения методом Ньютона соответствующего характеристического уравнения. В расчетах принимались значения $r_a = 0,01$, $r_c = 2$, а величина r_d подбиралась для каждого набора параметров индивидуально, исходя из заданной точности определения собственного числа, и варьировалась от 2,7 до 150. Наиболее широкая область интегрирования требовалась для длинноволновых возмущений.

Результаты тестовых расчетов собственных чисел исходной задачи при $n = 1$ для вязкой моды, обнаруженной в [6] и детально исследованной в [10], представлены в табл. 1. Видно, что во всех случаях имеется хорошее соответствие. Это свидетельствует о том, что применяемый численный метод позволяет получать решение с высокой точностью. В то же время он более прост в численной реализации, чем метод спектральной коллокации с разложениями по чебышевским функциям [6].

2. Результаты вычислений. Имеющиеся результаты исследований по устойчивости концевых вихря Бэтчелора (1.1) показывают, что наиболее неустойчивая мода наблюдается при $n = -1$. Из всех рассчитанных неустойчивых мод она имеет минимальное критическое число Рейнольдса $\text{Re}_c = 13,905$, которое наиболее точно вычислено в [10] и достигается при значениях $\alpha_c = 0,415$, $q_c = 0,337$. Кроме того, именно эта мода соответствует главному максимуму измеренных энергетических спектров для закрученных течений в гидродинамических трубах с пузырьвидным типом распада вихря [11]. К аналогичному выводу приводят эксперименты по устойчивости концевых вихрей [12] и численные расчеты для закрученных течений в неограниченной среде [13].

Указанная мода имеет невязкий характер: при $\text{Re} \rightarrow \infty$ максимальный коэффициент усиления для нее ω_i^* стремится к некоторому предельному положительному значению, которое вычислено в рамках невязкой теории: $\omega_i^* = 0,24244$

Таблица 1

Re	α	q	$\omega_i \cdot 10^2$	$\omega_r \cdot 10^3$	$\omega_i \cdot 10^2$ [10]	$\omega_r \cdot 10^3$ [10]
25	0,05	0,5	-0,22387	0,98872	-0,22387	0,98851
25	0,05	0,5	0,00374	0,26682	0,00370	0,26618
100	0,3	0,4	1,72806	8,99650	1,72799	8,99607
1000	0,3	0,4	2,34621	0,97904	2,34621	0,97904

Таблица 2

Re	$n = -1$			$n = 1$ [10]	
	100	1000	5000	100	1000
$\omega_i^* \cdot 10^2$	8,8	2,83	1,28	0,96	0,166
q^*	0,7	0,7	0,7	0,475	0,24
α_*	0,824	0,868	0,848	0,418	0,21

$=0,458$, $q^* = 0,811$ [10]. Соответствующие максимальные коэффициенты, рассчитанные путем решения задачи (1.3) – (1.4) с помощью изложенного метода, $\omega_i^* = 0,190$; 0,215; 0,232 и достигаются при $\alpha_* = 0,784$; 0,803; 0,806, $q^* = 0,415$; 0,431; 0,442 для $Re = 140$; 300; 1000.

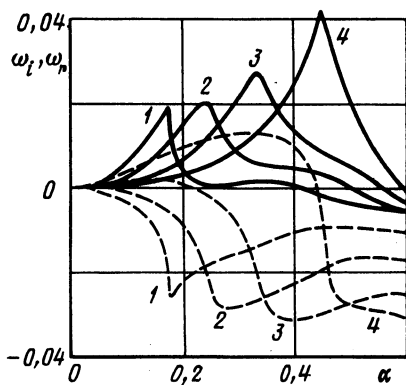
В [6] численными методами определены две вязкие моды неустойчивости с положительными азимутальными волновыми числами, для которых максимальный коэффициент усиления монотонно убывает при $Re \rightarrow \infty$. Одна из них соответствует осесимметричным возмущениям $n = 0$, а другая – неосесимметричным $n = 1$. В обоих случаях неустойчивость оказывается более слабой по сравнению с невязкой модой при $n = -1$, а критические числа Рейнольдса, вычисленные в [4], более высокими: $Re_c = 322,42$; 17,275 для мод $n = 0$; 1 соответственно. Две эти моды имеют важное значение, поскольку подтверждают дестабилизирующее действие вязкости на устойчивость течения.

Как показали численные исследования [7], существует еще одна мода неустойчивости при $n = -1$, имеющая вязкий характер. Проанализируем подробно ее свойства. Критическое число Рейнольдса для нее $Re_c = 43,934$ при $\alpha_c = 0,5012$, $q_c = 0,6603$. В этом смысле она занимает промежуточное положение между вязкими модами $n = 1$ и $n = 0$.

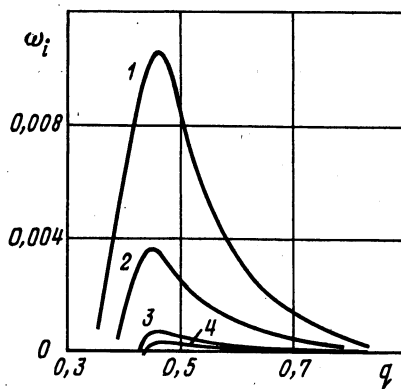
На фиг. 1 для данной моды представлены зависимости $\omega_i = \omega_i(\alpha)$, $\omega_r = \omega_r(\alpha)$ сплошными и пунктирными линиями соответственно. Коэффициент усиления $\omega_i = \omega_i(\alpha)$ имеет пикообразное распределение. Такой же характер имеют аналогичные зависимости для вязких мод с $n = 0$ и $n = 1$ [6]. Фазовые скорости возмущений с волновыми числами, отвечающими максимальному коэффициенту усиления, отрицательны, т.е. неустойчивые возмущения в этом случае распространяются вверх по потоку.

Подтверждением того факта, что найденная мода имеет вязкий характер, служит зависимость изменения коэффициента усиления от закрутки (фиг. 2). С ростом числа Рейнольдса максимальный коэффициент усиления монотонно убывает.

Сравним полученную моду с наиболее неустойчивой вязкой модой, рассчитанной в [10] при $n = 1$. В табл. 2



Фиг. 1. Зависимость коэффициента усиления и частоты от волнового числа: $Re = 100$, $q = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ (кривые 1–4)



Фиг. 2. Зависимость коэффициента усиления от закрутки: $\alpha = 0,3$; $Re = 300; 1000; 5000; 10\,000$ (кривые 1–4)

усиления для моды $n = -1$ на порядок выше, чем аналогичные значения для моды $n = 1$.

Рассмотрим теперь возмущения (1.2), периодические по времени. Тогда частоту $\omega = \alpha c$ следует считать действительной, а волновое число α – комплексным. При $\alpha_i > 0$ возмущения затухают, а при $\alpha_i < 0$ растут. Расчеты для пространственной неустойчивости течения (1.1) показывают, что найденная мода при $n = -1$ остается неустойчивой, но ведет себя по-разному в зависимости от величины q . При $q > 0,75$ мода остается вязкой и с увеличением $Re \rightarrow \infty$ максимальные коэффициенты усиления $-\alpha_i^*$ монотонно убывают. Например, при $q = 0,8$ значения $-\alpha_i^*$ составляют 0,02478; 0,014; 0,0073; 0,004406 при $\omega = 0,22; 0,28; 0,26; 0,26$ для $Re = 140; 300; 600; 1000$ соответственно. Однако для значений $q < 0,75$ мода имеет невязкий характер. Так, например, при $q = 0,7$ и прежних значениях Re соответствующие $-\alpha_i^*$ составляют 0,153; 0,252; 0,262; 0,269 при $\omega = 0,15; -0,101; -0,105; -0,107$.

3. Заключение. Вязкая мода неустойчивости при $n = -1$ впервые обнаружена в выборочных расчетах [7]. Проведенные здесь систематические исследования и сопоставление с новыми решениями [6, 10] показали следующие свойства этой моды. Критическое число Рейнольдса для нее меньше, чем для вязкой моды $n = 0$, и больше, чем для $n = 1$. Однако коэффициент усиления этой моды на порядок более высокий и в ряде случаев возмущения распространяются вверх по потоку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00153).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Batchelor G.K. Axial flow in the trailing line vortices // J. Fluid Mech. 1964. V. 20. Pt 4. P. 645–658.
2. Lessen M., Singh P.J., Paillet F. The stability of a trailing line vortex. Pt 1. Inviscid theory // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. Pt 4. P. 753–763.
3. Duck P.W., Foster M.R. The inviscid stability of a trailing line vortex // ZAMP. 1980. V. 31. № 4. P. 524–532.
4. Stewartson K., Leibovich S. On the stability of a columnar vortex to disturbances with large azimuthal wavenumber: the lower neutral points // J. Fluid Mech. 1987. V. 178. P. 549–566.

5. Duck P.W. The inviscid stability of swirling flows: large wavenumber disturbances // ZAMP. 1986. V. 37. № 3. P. 340–360.
6. Khorrami M.R. On the viscous modes of instability of a trailing line vortex // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 197–212.
7. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. К вопросу об устойчивости свободного вихря // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 2. С. 35–40.
8. Batchelor G.K., Gill A.E. Analysis of stability of axisymmetric jets // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt 4. P. 529–551.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
10. Mayer E.W., Powell K.G. Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex // J. Fluid Mech. 1992. V. 245. P. 91–114.
11. Garg A.K., Leibovich S. Spectral characteristics of vortex breakdown flowfields // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 11. P. 2053–2064.
12. Singh P.I., Ulberoi M.S. Experiments on vortex stability // Phys. Fluids. 1976. V. 19. № 12. P. 1858–1863.
13. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Развитие и устойчивость закрученных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 3–11.

Москва

Поступила в редакцию
10.XII.1998