

УДК 532.516

© 1999 г. В.И. ГРАБОВСКИЙ

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАДИАЛЬНЫЙ ГАЗОВЫЙ ПОДШИПНИК С МИНИМУМОМ МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ

Методами вариационного исчисления проведено оптимальное профилирование цилиндрических внешних обводов зазора газового радиального подшипника бесконечной протяженности. Сформулирована и решена изопериметрическая вариационная задача определения формы зазора, реализующего минимум коэффициента момента сопротивления на валу (шпиге) подшипника при заданном коэффициенте его несущей способности. Теоретический анализ иллюстрируется результатами расчета для изотермического газа. Показан предельный переход от газовых к жидкостным оптимальным подшипникам при соответствующем изменении параметра Гаррисона, а также от решения изопериметрической задачи к решению задачи Рэлея.

Газодинамические радиальные подшипники находят все большее распространение в различных технических приложениях (см. [1–3]). Использование газовой смазки вызвано ее преимуществом в сравнении с жидкой смазкой, а именно, пониженное трение и нагрев, возможность работы в агрессивных условиях (радиация, низкие и высокие температуры) и применения внешнего наддува, что увеличивает диапазон рабочих скоростей подшипника. Поскольку в рабочем состоянии движущиеся и неподвижные поверхности таких подшипников не контактируют, их использование весьма перспективно в устройствах, развивающих экстремальные скорости (до сотен тысяч оборотов в минуту). Среди многих вопросов, решение которых важно для создания и совершенствования газовых подшипников, значительное место занимает проблема оптимального профилирования их рабочего зазора. Начало исследованиям этого направления положил Рэлей [4]. Решая в приближении несжимаемой вязкой жидкости задачу определения формы зазора плоского бесконечного ползуна, реализующей максимум его несущей способности или коэффициента C_{NR} , он установил, что максимум C_{NR} обеспечивает кусочно-постоянный зазор с одной ступенькой.

Ступенчатую структуру имеет и решение аналогичной задачи для радиального подшипника (как газового, так и жидкостного), в дальнейшем также называемой "задачей Рэлея", хотя в этом случае высота зазора претерпевает два разрыва [5–9]. Наряду с задачей Рэлея для радиальных подшипников представляют интерес и другие вариационные задачи, в первую очередь – минимизация момента сопротивления C_M на валу подшипника при фиксированном C_N , так как вопрос потерь на трение в технических устройствах играет важную роль. Для плоского бесконечного ползуна первая попытка решения подобной проблемы, называемой далее изопериметрической, была предпринята в [10], а ее полное решение получено для жидкости в [11] и для газа в [12]. Для бесконечного радиального гидродинамического подшипника аналогичная проблема сформулирована и решена в [13]. При этом показано, что при $C_N < C_{NR}$, где C_{NR} отвечает задаче Рэлея, высота оптимального зазора непрерывна, становясь разрывной лишь при $C_N = C_{NR}$.

В данной работе изопериметрическая проблема формулируется и решается для газовых радиальных подшипников. Наряду со многими качественными соответствиями

в результатах для газовых и жидкостных оптимальных подшипников имеется много существенных различий как по постановке задач, так и по их решениям. Например, важным становится задание давления в фиксированной точке основания подшипника, моделирующей питающую канавку.

1. Выберем цилиндрические координаты r, θ, z с осью z , направленной по оси вала бесконечного подшипника. Вал радиуса R вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω , а цилиндрическое "основание подшипника", уравнение которого $r = R_1(\theta)$, неподвижно (фиг. 1, a и b). Таким образом, поверхность вала движется с постоянной скоростью $U = R\omega$. Введем высоту зазора подшипника $h(\theta) = R_1(\theta) - R$, которая удовлетворяет неравенству $0 < h \leq R$. Перейдем к переменным $x = \theta(2\pi)^{-1}$ и $y = r - R$ ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq h$), причем x , как и θ , будет циклической переменной. При этом уравнения, описывающие течение газа в зазоре подшипника в приближении газовой смазки, совпадут по форме с уравнениями в том же приближении для течения газа в зазоре плоского ползуна, движущегося над бесконечной плоскостью [1, 12]. Различие будет проявляться лишь в части граничных условий и в выражениях для сил и момента сопротивления. Форму зазора определяет его "верхняя" граница $h(x)$, образующая основание подшипника. В общем случае $h(x)$ может иметь ступеньку (или ступеньки) при $x = x_d$. Значениям величин, в частности h , в характерных сечениях i_0, i, a, b, c, f и d (фиг. 1) будем приписывать соответствующие нижние индексы, а если они рвутся в сечении d , то до (после) него, по направлению движения вала, — дополнительный индекс минус (плюс). Отметим, что на фиг. 1 зазоры подшипников изображены в увеличенном масштабе, на что указывают разрывы на радиусах R и R_1 . Вязкость газа μ предполагается постоянной, а его плотность ρ — степенной функцией давления p

$$\rho = c p^n \quad (1.1)$$

с фиксированными c и n . Если $n = 0$, то $\rho = \text{const}$, что отвечает несжимаемой жидкости. Случай $n = 1$ соответствует достаточно близкому к реальным условиям течения в узком зазоре ($h_m \ll 2\pi R$, где h_m — минимально допустимая по постановке задачи высота зазора подшипника) изотермическому течению [1].

Введем безразмерные переменные, принимая за масштабы r, y и h соответственно R и h_m . За масштабы плотности, давления и скорости возьмем соответственно $\rho_0, \gamma \rho_0 U^2$ и U . Безразмерный комплекс γ определен равенством

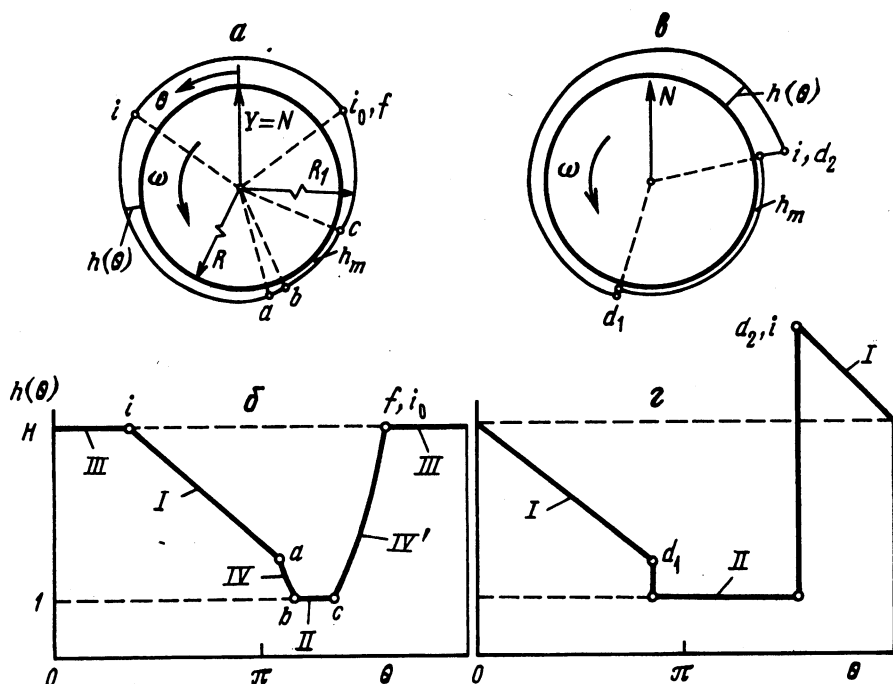
$$\gamma = \frac{12\pi R \mu}{\rho_0 h_m^2 U} \quad (1.2)$$

в котором величины справа размерные.

Из оценок теории смазки следует, что в узком смазочном слое p — функция только x , а инерционные слагаемые в уравнениях движения малы по сравнению с вязкими. В этом случае для описания течения в зазоре подшипника имеем в дополнение к соотношению (1.1) уравнения Рейнольдса и неразрывности [1]. Граничные условия прямой (при заданном h) задачи включают в себя условия прилипания и непротекания на стенках для скорости и условие для давления

$$p(x_0) = p_0 \quad (1.3)$$

Так как переменная x циклическая, то необходимо привлечь условие периодичности давления при изменении переменной x на единицу (а угла θ — на 2π). В отличие от жидкой смазки, где фиксирование давления в зазоре необязательно [13], в газе давление p_0 определяет режим течения и поэтому должно задаваться в некотором сечении $x = x_0$. Как будет видно, это связано с нелинейностью уравнений газовой смазки при $n \neq 0$. Поэтому решение задачи о газовом подшипнике зависит как от параметра ρ_0 , так и x_0 .



Фиг. 1. Схематическое изображение оптимальных подшипников и форма их зазора $h(x)$ в изопериметрической задаче (а, б) и задаче Рэлея (в, г)

После преобразования исходных уравнений с учетом граничных условий и условия сохранения расхода (безразмерный расход через зазор – Q) приходим к уравнению

$$L \equiv p^n h - p^n h^3 p' - q = 0, \quad q = 2Q \equiv 2 \int_0^h \rho u dy \quad (1.4)$$

или после его разрешения относительно p' – к уравнению

$$p' = (h - qp^{-n})h^{-3} \quad (1.5)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x . Из выписанных уравнений и условия (1.3) следует, что при заданном $h(x)$ решение зависит от двух безразмерных параметров: x_0 и p_0 . Последний выражается через изотермическое число Маха M_0 и γ из (1.2)

$$p_0 = (\gamma M_0^2)^{-1}, \quad M_0 = U \sqrt{\rho_0 p_0^{-1}} \quad (1.6)$$

Параметр удвоенного безразмерного расхода q подбирается так, чтобы удовлетворялось условие периодичности давления.

Обозначим через Y и X вертикальную и боковую составляющие силы N , действующей на вал из-за неравномерности распределения давления по его поверхности, а через M – испытываемый им момент сопротивления. Последний есть результат действия силы вязкого трения на поверхность вала. Введем коэффициенты C_Y , C_X и C_M равенствами (X , Y и M – размерные)

$$C_Y = \frac{Y}{2\pi R_0 \gamma \rho_0 U^2}, \quad C_X = \frac{X}{2\pi R_0 \gamma \rho_0 U^2}, \quad C_M = \frac{M}{R_0 h_m \gamma \rho_0 U^2}$$

Для них получаются интегральные представления

$$C_Y = -\int_0^1 p \cos \theta dx, \quad C_X = \int_0^1 p \sin \theta dx, \quad C_M = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3h} + hp' \right) dx, \quad \theta = 2\pi x \quad (1.7)$$

Выражение для C_M тождественно выражению для коэффициента сопротивления C_D бесконечного ползуна [11, 12] и для C_M гидродинамического подшипника [13]. Следствием этого будет ряд аналогий и совпадений в результатах соответствующих задач.

В задаче Рэлея ищется такое распределение высоты зазора $h = h(x)$, которое при p , определяемом дифференциальным уравнением (1.5) и граничным условием (1.3), реализует максимум коэффициента несущей способности C_N . Фигура 1 отвечает случаю $X = 0$, $Y = N$. В изотермической задаче фиксируется C_N , а минимизируется момент сопротивления C_M . В обеих задачах h ограничено снизу и сверху. В согласии с выбором масштаба h эти ограничения сводятся к неравенствам

$$1 \leq h(x) \leq H \quad (1.8)$$

с заданной константой $H > 1$. Разумеется, $C_N \leq C_{NR}$, где C_{NR} – максимально возможный коэффициент несущей способности, получающийся в задаче Рэлея. Ее решение по этой причине построено ниже (путем предельного перехода в решении изопериметрической задачи).

2. Для определения оптимальной высоты зазора $h = h(x)$ радиального подшипника составим функционал Лагранжа

$$J = \alpha C_M + \beta C_N + \int_0^1 \lambda(x) L dx, \quad C_N = \sqrt{C_Y^2 + C_X^2}, \quad \frac{C_Y}{C_N} = \cos \theta_1$$

в котором L – левая часть уравнения (1.4), а λ – переменный множитель Лагранжа. Задаче Рэлея соответствуют $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. В изотермической задаче $\alpha = 1$, а β – постоянный множитель Лагранжа. При $\beta \rightarrow -\infty$ решение изопериметрической задачи переходит в решение задачи Рэлея. Коэффициент C_N соответствует результирующей силе, действующей на вал и направленной в общем случае под углом θ_1 . Если $\theta_1 = 0$, то $C_N = C_Y$, а $C_X = 0$.

В обеих задачах при допустимом варьировании J и оптимизируемого функционала из (1.7) их вариации совпадают при любых, по крайней мере ограниченных множителях Лагранжа. Поэтому для оптимального зазора $\delta J = \delta C_M \geq 0$, а в задаче Рэлея $\delta J = \delta C_N \leq 0$ при любом варьировании h , удовлетворяющем ограничениям (1.8). Проварьировав J с учетом непрерывности p в сечении (или в сечениях) d возможного скачка h и правил определения вариаций, придем к выражению для δJ , справедливому для любого (необязательно оптимального) $h(x)$ и пока произвольных ограниченных $\lambda(x)$ и β

$$\begin{aligned} \delta J = & \{0, 5\alpha(h_- - h_+) + [(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-] p^n\}_d \Delta p_d + X_d \Delta x_d - \\ & - \Delta q \int_0^1 \lambda dx + \int_0^1 (A_h \delta h + A_p \delta p) dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$X_d = \frac{\alpha}{6} (h_-^{-1} - h_+^{-1}) + \lambda_- (hp^n - q)_- - \lambda_+ (hp^n - q)_+$$

$$A_h = (2hp^n - 3q)(\alpha - 6\lambda h^2 p^n)(6h^3 p^n)^{-1}$$

$$A_p = -\beta \cos(\theta - \theta_1) - 0,5\alpha h' + p^n [(\lambda h^3)' + n\lambda h p^{-1}]$$

Здесь Δp_d и Δx_d – разность p и x в сечениях скачка h для проварьированного и непроварьированного зазоров, а δp и δh – соответствующие вариации, т.е. разности p

и h для тех же зазоров при фиксированном x . Коэффициенты X_d и A_h преобразованы с учетом выражений для p'_\pm из (1.5).

Выбирая λ , обратим в нуль коэффициент A_p . С учетом (1.5) это приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\alpha h - 2p^n \lambda h^3)' = 2\lambda q p^{-1} - 2\beta \cos(\theta - \theta_1) \quad (2.2)$$

справедливому для любого зазора на участках непрерывности h . При наличии нескольких возможных сечений разрыва h условия, связывающие λ_{d-} и λ_{d+} во всех, кроме одного из них, получим, приравняв нулю множитель при Δp_d . Это даст

$$\alpha(h_- - h_+)_{d+} + 2[(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-]_d p_d^n = 0 \quad (2.3)$$

В силу (2.3) выражение в скобке в левой части уравнения (2.2) непрерывно в выбранных сечениях. При изменении x на единицу угол θ возрастает на 2π . Потому, проинтегрировав уравнение (2.2) от точки d_+ до той же точки d_- , отвечающей оставшемуся скачку h , и учтя выполнение условия (2.3) в остальных сечениях разрыва h , найдем, что это условие не выполняется на последнем скачке высоты. По этой причине выражение (2.1) для δJ содержит приращение Δp_d в указанной точке. Данное обстоятельство различает вариационные задачи для газовой и жидкой смазок, делая необходимым задание $p_0 = p_d$ для газа.

Для определения λ полученных условий недостаточно. Дополнительное условие найдем, приравняв нулю коэффициент при Δq

$$\int_0^1 \lambda dx = 0 \quad (2.4)$$

Уравнения и условия (2.2)–(2.4) формулируют сопряженную задачу для множителя Лагранжа λ .

Пусть непрерывная или разрывная функция $h(x)$ задана. Тогда, интегрируя уравнение (1.5) для p при заданном значении $p(x_{0+}) = p_0$ и подбирая параметр q , можно удовлетворить условию периодичности давления из (1.3) $p(x_{0-}) = p_0$ при циклическом обходе вала, т.е. решить прямую задачу теории смазки. В отличие от гидродинамического подшипника в данном случае уравнение (1.5) содержит не только производную от p , но и само давление. Поэтому найденное q и все прочие результаты зависят от выбора величины p_0 , а также x_0 .

Найдя решение прямой задачи, решим затем сопряженную для λ . При этом для уравнения (2.2) константу λ_0 всегда можно подобрать такой, чтобы выполнялось интегральное условие (2.4). После этого для произвольного, т.е. необязательно оптимального, зазора выражение для вариации J примет вид

$$\delta J = X_d \Delta x_d + \int_0^1 A_h \delta h dx \quad (2.5)$$

$$X_d = \{\alpha(6h_\pm p^n)^{-1}[3qh_\pm + h_\mp(h_\mp - 3h_\pm)p^n] + \lambda_\mp f\}(h_+ - h_-)h_\mp^{-3}$$

$$f = h_+ h_- (h_+ + h_-) p^n - (h_+^2 + h_+ h_- + h_-^2) q$$

Оба эквивалентных представления коэффициента X_d (либо верхние, либо нижние индексы) получены из соответствующего коэффициента из (2.1) после исключения либо λ_- (нижние индексы), либо λ_+ (верхние индексы) с использованием условия (2.3) на скачках h .

В задаче Рэлея, которой отвечают $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, анализ (2.5) и выражения для A_h из (2.1) показывает, что в общем случае оптимальный зазор может состоять из трех типов участков (фиг. 1, в и г). Это – участки двух типов краевого экстремума: II, где

$h_+ = 1$, и III (на фиг. 1, θ и z не показан), где $h = H$, и один участок двустороннего экстремума I. На участке I высота зазора определяется условием обращения в нуль коэффициента A_h , т.е. равенством

$$2hp^n - 3q = 0 \quad (2.6)$$

В силу (1.8) на участке II допустимые δh неотрицательны, а на участке III $\delta h \leq 0$. В задаче Рэлея $\delta J = \delta C_N$, отвечающие его допустимому варьированию, неположительны, так как допустимое варьирование оптимального зазора должно вести только к уменьшению C_N . Поэтому условия оптимальности участков II и III имеют вид неравенств соответственно

$$\lambda(3q - 2p^n) \leq 0, \quad \lambda(3q - 2Hp^n) \geq 0$$

Разные участки могут в общем случае стыковаться с разрывом или без разрыва h . Для оптимальной "разрывной" стыковки необходимо, чтобы в сечении скачка h обращался в нуль коэффициент при Δx_d из (2.5)

$$X_d = 0 \quad (2.7)$$

В задаче Рэлея, где $\alpha = 0$, условие (2.7) показывает, что разрывная стыковка участка I с любым из участков краевого экстремума возможна только тогда, когда в сечении разрыва h множитель λ обращается в нуль

$$\lambda_{d-} = \lambda_{d+} = 0 \quad (2.8)$$

В силу (2.6) и (1.5) на участке I имеем

$$h = 1,5qp^{-n}, \quad p' = \frac{1}{3}h^{-2}$$

Следовательно, для газового подшипника при $n > 0$ на участке I высота зазора h уменьшается по направлению движения вала, а p растет по нелинейному закону в отличие от гидродинамического подшипника ($n = 0$).

С помощью условий (2.5)–(2.8), показано, что в задаче Рэлея оптимальная функция $h(x)$ имеет два разрыва. Они расположены либо между участками III и II, в случае, когда $H < 1,5qp_0^{-n}$, либо между участками I и II когда $H > 1,5qp_0^{-n}$ (фиг. 1, θ и z). Таким образом, для газового подшипника оптимальный зазор – функция с двумя ступеньками.

В изопериметрической задаче, в которой $\alpha = 1$, обращение в нуль A_h возможно не только в силу равенства нулю первого сомножителя в A_h (см. (2.1)), что по-прежнему приводит к равенству (2.6) и к участку I, но и из-за равенства нулю второго сомножителя

$$6\lambda h^2 p^n = 1 \quad (2.9)$$

В соответствии с этим наряду с участком I возможен участок двустороннего экстремума другого типа (IV). На нем высота зазора в силу (2.2) и (2.9) определяется уравнением

$$h' = -3\beta \cos(\theta - \theta_1) + 0,5nqh^{-2}p^{-n-1}$$

Этот участок является ключевым при построении оптимальных форм. На нем высота зазора по направлению вращения может как возрастать, так и убывать. Тем самым обеспечивается возможность построения непрерывных форм зазоров в отличие от задачи Рэлея. Действительно, подставляя λ_+ или λ_- из (2.9) в формулу для X_d из (2.5) с $\alpha = 1$, можно показать, что $X_d = 0$ только при $h_{d+} = h_{d-}$. Это означает, что участок IV стыкуется с другими участками непрерывным образом. Оптимальный зазор может содержать либо один такой участок, на котором $h(x)$ сначала уменьшается, а

Таблица 1

p_0	$-\beta q$	q	$C_N \cdot 10^2$	$C_M \cdot 10$	$x_a \cdot 10^4$	$x_b \cdot 10^4$	$x_c \cdot 10^4$	$x_f \cdot 10^4$	h_f	h_a	M_m
1	10^3	1,25	1,34	1,435	5753	5757	9019	9024	1,88	1,76	1
0,1	10	0,16	1,21	1,375	5223	5255	8335	8480	2,48	1,57	1,1
0,01	50	0,04	0,66	1,142	4353	4355	7717	7784	5,49	1,5	2,2

Таблица 2

p_0	q_R	$C_{NR} \cdot 10^2$	$C_{MR} \cdot 10$	$x_{d1} \cdot 10^4$	$x_{d2} \cdot 10^4$	h_{fR}	h_{aR}	M_m
1	1,251	1,34	1,44	5750	9025	1,876	1,76	1
0,1	0,165	1,21	1,384	5173	8389	2,475	1,56	1,1

затем увеличивается, либо два отдельных, на первом из которых h уменьшается, а на втором увеличивается. Последний будем в дальнейшем обозначать IV' в отличие от первого IV без штриха (фиг. 1, б).

На участках краевого экстремума согласно условиям оптимальности должны выполняться неравенства

$$(1 - 6\lambda H^2 p^n) (2Hp^n - 3q) \leq 0 \quad (2.10)$$

$$(1 - 6\lambda p^n) (2p^n - 3q) \geq 0$$

где первое неравенство соответствует участку III ($h = H$), а второе – II ($h = 1$).

3. Для изопериметрической задачи существуют предельные решения. Одно из них – решение Рэлея, которое характеризуется наибольшим значением C_N несущей способности подшипника и большим (но не наибольшим при наличии верхнего ограничения $H > h_R$) значением C_M . Другое предельное решение, связанное с ограничением на высоту зазора, – $h = H$, когда $C_N = 0$. В этом случае C_M минимален для фиксированного H ($C_M = (6H)^{-1} \rightarrow 0$ при $H \rightarrow \infty$).

Особая роль принадлежит решению задачи Рэлея уже потому, что отвечающая ему величина $C_N = C_{NR}$ – максимальное значение C_N , задаваемое в качестве изопериметрического условия. Ее решение можно получить двумя способами. Во-первых, из уравнений и условий разд. 2, включая (2.8) – $\lambda = 0$ в сечениях d скачка высоты зазора. Во-вторых, при $\beta \rightarrow -\infty$ из решения изопериметрической задачи. Это означает, что переход от одного решения к другому осуществляется при $C_N \rightarrow C_{NR}$ за счет одновременного уменьшения длины и роста модуля наклона участков IV и IV' .

Для больших по модулю β ($\beta \ll -1$) результаты расчетов при различных значениях p_0 представлены в табл. 1 ($n = 1$, $\theta_1 = 0$, $C_X = 0$, $C_N = C_Y$, $H \gg 1$). В ней координаты стыковки разных участков (см. фиг. 1, б) различаются (x_a от x_b и x_c от x_f) максимум в третьей значащей цифре. В пределе $\beta \rightarrow -\infty$ ($x_a \rightarrow x_b \rightarrow x_{d1}$, а $x_c \rightarrow x_f \rightarrow x_{d2}$). Как отмечалось, важен выбор p_0 и x_0 . Здесь и далее p_0 фиксируется при $x_0 = x_i = x_f$, т.е. в точке стыковки участков IV' и I . Она соответствует наибольшей высоте оптимального зазора (максимальному углублению в основании подшипника). В случае задачи Рэлея это – точка второго разрыва x_{d2} (фиг. 1, в, г). В табл. 2 приведены результаты численного решения задачи Рэлея точным способом, позволяющие выявить точность предельного перехода $\beta \rightarrow -\infty$. Во всех случаях нижнее ограничение существенно и $h_{\min} = 1$.

Помимо уже указанных параметров в табл. 1 и 2 приведены максимальные значения числа Маха по всему зазору, отнесенные к $M_0 = M(x_0)$, – $M_m = M_{\max} M_0^{-1}$. Параметр M_{\max} является важным для контроля режима течения газа, которое согласно

постановке задачи должно быть всюду дозвуковым. Видно, что при $p_0 = 1$ и $0,1$ рост M незначителен, а при $p_0 = 0,01$ уже существен. Отметим, что локальное максимальное значение числа Маха реализуется на выходе из участка II , причем при $y > 0$.

4. Проведенный анализ показал, что оптимальный зазор подшипника характеризуется определенным расположением участков оптимальности. Если двигаться от точки задания p_0 по направлению вращения вала, то в общем случае последовательность участков следующая: III, I, IV, II и IV' . В зависимости от задаваемой величины C_N участки любого типа, кроме IV и IV' , могут отсутствовать. Участки же IV и IV' в изопериметрической задаче являются ключевыми и исчезают (точнее, превращаются в "ступеньки") при предельном переходе к задаче Рэлея. Они обеспечивают непрерывность верхней границы зазора подшипника $h(x)$.

Решение задачи строится численно, p , h и λ определяются последовательным интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений с учетом непрерывности давления и высоты зазора в точках соединения разных участков, а также константы q и β из граничных и интегральных условий. При этом проверяется выполнение условий (2.10) на участках краевого экстремума.

Согласно уравнениям и граничным условиям при заданных H и C_N определяемыми параметрами являются: q , β , λ_0 и C_M . Решение задачи зависит от безразмерного комплекса p_0 , включающего в себя γ и число M_0 . Каждому из четырех параметров отвечает одно из условий, которое должно быть удовлетворено при решении. Так, выбор β соответствует заданному значению C_N , подбор величины q обеспечивает периодичность давления и, наконец, значение λ_0 задается таким, чтобы удовлетворить условию (2.4).

Система уравнений, необходимая для определения оптимальной формы зазора подшипника на участках краевого экстремума II и III , имеет вид

$$h \equiv I: p' = 1 - qp^{-n}, \quad \lambda' + n\lambda p^{-1} - \beta p^{-n} \cos(2\pi x - \theta_1) = 0$$

$$h \equiv H: p' = (H - qp^{-n})H^{-3}, \quad \lambda' + n\lambda p^{-1}H^{-2} - \beta H^{-3}p^{-n} \cos(2\pi x - \theta_1) = 0$$

На участках же двустороннего экстремума I, IV и IV' имеем

$$h = 1,5qp^{-n}, \quad p' = 3^{-1}h^{-2}, \quad \lambda' + [n - 6\beta ph \cos(2\pi x - \theta_1)](9qph^3)^{-1} = 0$$

$$h' = -3\beta \cos(2\pi x - \theta_1) + nq(2h^2 p^{n+1})^{-1}, \quad p' = (h - qp^{-n})h^{-3}, \quad \lambda = (6h^2 p^n)^{-1}$$

При совпадающих уравнениях для участков IV и IV' на первом из них h по направлению вращения уменьшается, а на втором растет. В согласии с этим и уравнением для p максимум давления располагается на участке IV , а минимум – на участке IV' .

5. Рассмотрим результаты численного решения. Отметим, что учет сжимаемости даже в принятом выше баротропном приближении усложняет оптимальное профилирование радиальных подшипников. Во-первых, изменяются уравнения и условия, которые определяют течение в зазоре и оптимальное распределение его высоты $h(x)$. Во-вторых, в отличие от несжимаемой смазки решения для газовых подшипников зависят от двух параметров: x_0 (или θ_0), определяющего положение сечения, где необходимо фиксировать величину давления, и p_0 . Эти параметры моделируют питающую канавку в реальных подшипниках. Появление параметра p_0 приводит к тому, что для газовой смазки решения оптимальных задач не удастся представить в универсальном (не зависящем от γ) виде, как для жидкой смазки [13].

Представленные ниже результаты относятся к изотермическому газу ($n = 1$), $x_0 = x_f$ – координата конца участка IV' в изопериметрической задаче и $x_0 = x_{d2}$ – конца участка II в задаче Рэлея (фиг. 1). Это координаты максимальных h оптимальных зазоров. Поворачивая систему координат, силу N направим по оси Y , т.е. $X = 0$, $\theta_1 = 0$ и $Y = N$.

Таблица 3

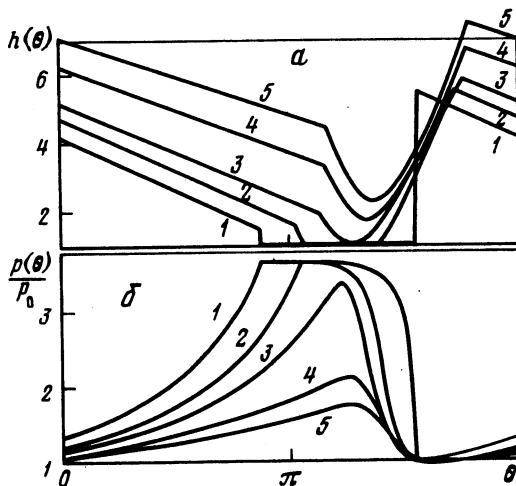
$q \cdot 10^2$	$C_N \cdot 10^2$	$C_M \cdot 10$	$x_a \cdot 10^4$	$x_b \cdot 10^4$	$x_c \cdot 10^4$	$x_f \cdot 10^4$	h_f	h_{\min}	h_a	p_m
3,61	0,62	1,037	4711	4785	7316	8400	5,417	1	1,53	3,6
3,68	0,57	0,939	5140	5329	6936	8617	5,525	1	1,59	3,7
3,9	0,41	0,777	5657	—	—	8771	5,85	1,03	1,93	3,4
4,5	0,22	0,557	5756	—	—	8872	6,75	1,77	3,35	2,1
5	0,15	0,460	5798	—	—	8919	7,5	2,3	4,46	1,8
6	0,09	0,350	5849	—	—	8965	9,0	3,22	6,45	1,4

Переход в решениях сформулированных задач от газа к жидкости осуществляется при $n \rightarrow 0$, а для $n > 0$ — при $p_0 \rightarrow \infty$. Вторая возможность отвечает $M_0 \rightarrow 0$. С уменьшением параметра p_0 сжимаемость газовой смазки проявляется все сильнее и это может соответствовать только $\gamma \rightarrow \infty$, поскольку согласно принятым условиям всегда должно быть $M_0 < 1$. Оценим реальный диапазон изменения параметра γ . Согласно [2] в реальных устройствах используются, например, воздух, метан, гелий при температуре порядка 300 К и давлении $0,98 \cdot 10^5$ Па. Следовательно, $\mu \approx 1,75 \cdot 10^{-5}$ Па · с. При таком μ и $h_m \approx 20$ –10 мкм, $R \approx 10^3 h_m$, и числе оборотов вала в газовых подшипниках $n_{об} \sim 10^4$ – 10^5 об/мин имеем $10 \leq \gamma \leq 10^3$ и $M_0 \approx 0,01$ –0,8.

Расчеты были выполнены при $p_0 = 1, 0,1$ и $0,01$. С использованием определения (1.6) находятся пары значений γ и M_0 , которым отвечают выбранные значения p_0 . При этом естественно ограничиться дозвуковыми течениями во всем зазоре, так как сверхзвуковое течение не предусмотрено используемой моделью. Например, согласно табл. 1 и 2 для оптимальных подшипников Рэлея при $p_0 = 1$ и $0,1$ практически могут быть любые $M_0 < 1$, а при $p_0 = 0,01$ число M_0 не должно превышать 0,45 из-за существенного роста текущего числа Маха в суженной части зазора. Тогда для $p_0 = 1$ можно, например, принять $M_0 \approx 0,31$ и $\gamma \approx 10$, для $p_0 = 0,1$ –0,31 и 100, для $p_0 = 0,01$ –0,45 и 500.

Некоторые параметры оптимальных подшипников представлены в табл. 3 для $p_0 = 0,01$ и $H = \infty$. Эти данные используются в дальнейшем в графических иллюстрациях оптимальных форм подшипников. На самом деле $H = \infty$ отвечает подшипникам, для которых несущественно ограничение на h сверху, т.е. $H > h_i$. Схема зазоров, поясняющая принятые в таблице обозначения, показана на фиг. 1, б. На ней: от точки i_0 до точки i — участок III, от i до a — участок I, от a до b — сужающийся участок IV, и c – f — расширяющийся участок IV', примыкающий к участкам II (b – c) и III. Как уже отмечалось, набор перечисленных участков может быть неполным в основном из-за существенности или несущественности того или иного ограничения. Прочерки в клетках колонки координат концов участков означают отсутствие соответствующего участка. В таблицу включены: удвоенный безразмерный расход q , силовые характеристики C_N и C_M , координаты сечений стыковки разных участков ($\theta = 2\pi x$) — $x_i = x_f, x_a, x_b$ и x_c , высоты зазора $h_i = h_f, h_a$ и h_{\min} ; максимальное относительное давление $p_m = p_{\max} p_0^{-1}$ в зазоре. Данные расположены по мере возрастания q и убывания C_N и C_M . Верхняя строка соответствует подшипнику, близкому подшипнику Рэлея, а нижняя — оптимальному подшипнику, близкому к предельной форме с $h = \text{const}$ и $C_N = 0$. К этой же таблице относится третья строка табл. 1.

На фиг. 2, а представлены некоторые оптимальные формы подшипников. Она дает изменение формы $h(\theta)$ для $p_0 = 0,01$ и разных $C_N^0 = C_N C_{NR}^{-1}$ ($0 < C_N^0 \leq 1$), начиная от предельного случая с максимально возможной $C_N^0 = 1$ — подшипника Рэлея (кривая 1). Уменьшение C_N^0 сопровождается ростом высоты зазора подшипника вне участка



Фиг. 2. Формы зазоров (а) и распределения давления в них (б) для оптимальных подшипников при $H = \infty$, $p_0 = 0,01$ и $C_N^0 = 1, 0,86, 0,63, 0,33$ и $0,23$ (кривые 1–5)

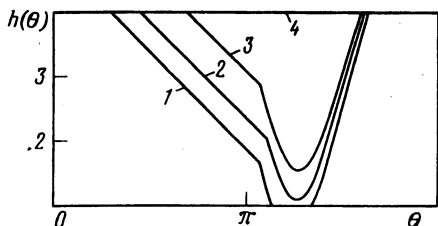
$h = 1$ и сокращением протяженности этого участка, что ведет к росту расхода q . При этом уменьшается и C_M (или $C_M^0 = C_M C_{MR}^{-1}$).

Качественное различие решений изопериметрической задачи для газа и жидкости связано с формой участков I, IV и IV'. Для жидкости участок I имеет постоянную высоту [13]. Для газа он сужается по направлению вращения вала. При C_N , близких к C_{NR} , участки IV и IV' разьединены участком I (кривая 2). При некотором значении $C_N = C_{N^*}$ участок I исчезает, а IV и IV' соединяются, образуя единый сужающийся и затем расширяющийся участок (кривая 3). При $C_N < C_{N^*}$ нижнее ограничение становится несущественным (кривые 4, 5).

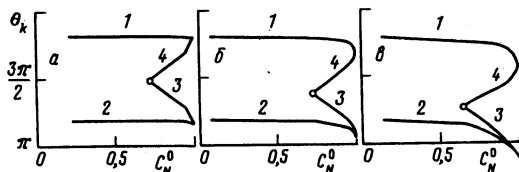
Наибольший подъем давления (фиг. 2, б) – в нижней части вала, что обеспечивает вертикальную направленность несущей способности, и при C_N , близких к C_{NR} . Видно, как указывалось выше, что максимум давления находится на участке IV, а минимум – на IV'.

Оптимальные формы, отвечающие малым C_N^0 , а следовательно, – большим q , характеризуются большой высотой зазора. Поэтому для любой конечной H имеется такое C_{NH}^0 , что при $C_N^0 < C_{NH}^0$ становится существенным ограничение на h сверху. При фиксированном H уменьшение C_N^0 сопровождается ростом q , снижением C_M^0 и изменением формы оптимального зазора, как показано на фиг. 3 для $p_0 = 0,01$ и $H = 4$. В пределе $C_N^0 = 0$ высота зазора, как и для жидкой смазки, постоянна ($h = H$, кривая 4). Деформация оптимального зазора при $C_N^0 \rightarrow 0$ сопровождается уменьшением протяженности всех участков и их поочередным исчезновением. Последними пропадают участки IV и IV'. Кривая 1 отвечает подшипнику, для которого существенны и верхнее и нижнее ограничения. Для кривых 2 и 3 нижнее ограничение несущественно.

Высоты h_k зазоров в характерных сечениях θ_k ($k = i, a, b, c, f$ – см. фиг. 1) с уменьшением C_N^0 возрастают. При этом $h_{\max} = h_i = h_f$, а $h_{\min} = h_b = h_c$. Чем меньше p_0 , т.е. больше сжимаемость газа, тем больше перепады высот зазора. На фиг. 4 для разных p_0 показана зависимость от C_N^0 координат границ участков разных типов $\theta_k = 2\pi x_k$.



Фиг. 3. Оптимальные формы зазоров подшипника $h(\theta)$ при $H = 4$, $p_0 = 0,01$ и $C_N^0 = 0,77$, 0,57, 0,36 и 0 (кривые 1–4)



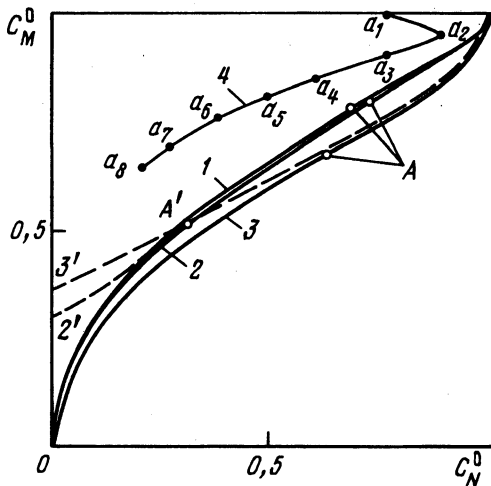
Фиг. 4. Координаты границ разных участков оптимальности а-е: $p_0 = 1, 0,1, 0,01$ и кривые 1–4 – $\theta_i = \theta_f, \theta_a, \theta_b, \theta_c$

Видно, что при уменьшении C_N^0 угловая протяженность участка II минимальной высоты $\Delta_{ab} = \theta_b - \theta_a$ убывает до нуля. Если в жидкости этот участок симметричен относительно сечения $\theta = 1,5\pi$ [13] (близкий случай – на фиг. 4, а), то в газе он смещен к сечению $\theta = \pi$, причем тем больше, чем меньше p_0 .

Фигуры 2, 3, 4 служат построению оптимальных подшипников практически для любых интересных значений C_N^0 и соответствующих H . Их силовые характеристики приведены на фиг. 5 в виде зависимостей оптимального относительного момента сопротивления C_M^0 от заданной относительной несущей способности подшипников $C_M^0 = C_M^0(C_N^0)$ для разных значений p_0 . Кривые 1–3 отвечают подшипникам, для которых верхнее ограничение на высоту несущественно. Кривые 1 и 2 близки к соответствующей кривой для жидкости [13], а кривая 3 значительно отличается от нее. Как и для жидкости, точки кривых ниже точек А отвечают оптимальным зазорам изопериметрической задачи с $h(x) > 1$, т.е. без участка краевого экстремума II ($h = 1$). В отличие от жидкости эти части кривых точно не описываются автомодельными зависимостями $C_N^0 = kC_M^{0,2}$, хотя для $p_0 = 1$ и 0,1 можно принять $k \approx 1,09$ и 1,11. Участки кривых над точками А отвечают зазорам, содержащим участок краевого экстремума II. Согласно определениям C_N^0 и C_M^0 кривые 1–3 приходят в точку $C_N^0 = C_M^0 = 1$. Для $C_N^0 = 1$ решения задач Рэлея и изопериметрической совпадают и высота оптимального зазора претерпевает разрыв при $x = x_{d1}$ и x_{d2} .

Кривые 1–3 на фиг. 5 построены без учета возможного ограничения на h сверху, т.е. формально при отсутствии такого ограничения, чему соответствует $H = \infty$. На самом деле $H = \infty$ только при $C_N^0 = C_M^0 = 0$, а в других случаях $H > h_{\max} = h_f$. Чем ближе к началу координат, тем больше h_f . Если же величина H конечна и фиксирована, то при $C_N^0 \leq C_{NH}^0$ верхнее ограничение становится существенным и появляется участок краевого экстремума III ($h = H$). Зависимости $C_M^0(C_N^0)$ для таких подшипников отличаются от случая без ограничения. Две из них для $H = 4$ и $p_0 = 0,1$ и 0,01 даны на фиг. 5 кривыми 2' и 3'. Их пересечение с осью ординат, где $C_N^0 = 0$, дает оптимальный зазор постоянной высоты $h(x) = 4$.

Для $H \geq h_R(p_0)$ кривые, отвечающие подшипникам с верхним ограничением, при некотором $C_{NH}^0 \leq 1$ приходят на соответствующую кривую, которая является для них огибающей (на фиг. 5 это кривые 1, 2 и 3). Такой случай иллюстрируется кривой 2' при $p_0 = 0,1$. Точка ее прихода на огибающую отмечена А'. Она отвечает исчезновению участка III. Выше этой точки до точки А на огибающей решения соответствуют подшипникам, для которых не важны оба ограничения на высоту. Точка А



Фиг. 5. Зависимость относительного момента сопротивления C_M^0 оптимального подшипника от C_N^0 при разных p_0 — кривые 1–3 ($H = \infty$), 2'–3' ($H = 4$); 1 — $p_0 = 1$, 2 — 0,1, 3 — 0,01; 4 — неоптимальные подшипники ($p_0 = 1$). Точки a_1 – a_8 отвечают $H = 1, 5, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ и 10

мальное и максимальное значения высоты зазора, то

$$h(\theta) = h_m + e[1 + \cos(\theta - \theta_0)], \quad e = 0,5(h^m - h_m)$$

Результаты, представленные на фиг. 5 тонкой кривой 4 ($p_0 = 1$), отвечают эксцентриситетным подшипникам с $h_m = 1$ и с переменными $h^m = H$. Точки a_1 – a_8 на этой кривой соответствуют разным H . Как видно, преимущество оптимальных зазоров перед неоптимальными увеличивается с уменьшением C_N^0 . Коэффициенты C_M^0 оптимальных и эксцентриситетных подшипников сравнивались при одинаковых C_N^0 и H . Пусть δC_M^0 — превышение (в % оптимального) C_M^0 неоптимального подшипника над коэффициентом оптимального. Тогда, например, для $p_0 = 0,01$ при C_N подшипника, равных 73,5 ($H = 4$) и 69% ($H = 5$) от максимального C_{NR} , превышение δC_M^0 равно 8 и 14,2% соответственно. Преимущество оптимальных подшипников растет с увеличением H и уменьшением C_N .

Закключение. Предложена методика нахождения коэффициента момента сопротивления C_M оптимальных подшипников и необходимых для их конструирования геометрических параметров зазора при любых $C_N \leq C_{NR}$, $1 \leq H \leq \infty$ и γ . Сравнение с неоптимальными эксцентриситетными подшипниками показало заметное преимущество оптимальных. Коэффициенты C_N и C_M в изопериметрической задаче газовой смазки в отличие от жидкой зависят от величины фиксированного давления в зазоре подшипника и от координаты этой фиксации. При $C_N < C_{NR}$ высота оптимального зазора в отличие от отвечающего задаче Рэлея случая $C_N = C_{NR}$ — непрерывная функция θ . Установлена структура оптимального решения. При $C_N > 0$ оптимальный зазор содержит от двух до пяти участков разных типов в зависимости от значений определяющих параметров. Участок с минимально допустимой высотой зазора $h = 1$ появляется лишь при C_N , близких к C_{NR} задачи Рэлея. В общем случае оптимальная высота $h = h(\theta)$ имеет участки четырех типов. Два из них ($h = 1$ и $h = H > 1$) — участки

соответствует появлению участка II. Выше ее оптимален зазор с участком II. Если C_N^0 больше величины, отвечающей точке A, то существенно ограничение на h снизу.

Другой случай, показанный кривой 3' при $p_0 = 0,01$, отвечает $H < h_R(p_0)$. Кривые такого типа не приходят на соответствующую огибающую, а отворачивают от нее к оси $C_N^0 = 0$, пересекая ее при $C_M^0 = (6HC_{MR})^{-1}$ (этот участок кривой не показан).

Для сравнения оптимальных зазоров с неоптимальными был выбран известный "эксцентриситетный" радиальный подшипник [1]. Внешние обводы его зазора образованы окружностью с центром, отличным от центра вала. Вал имеет радиус R , основание подшипника — радиус R_1 . Эксцентриситет подшипника (смещение центров цилиндров) $e \ll R$, а ось смещения повернута на угол θ_0 . Если h_m и $h^m = H$ — мини-

краевого экстремума, появляющиеся из-за ограничения на h снизу и сверху. Другие два – участки двустороннего экстремума. При $C_N \rightarrow C_{NR}$ тангенсы угла их наклона обращаются в $-\infty$ и в $+\infty$, а сами они превращаются в известные разрывы h в задаче Рэлея.

Автор выражает благодарность А.Н. Крайко за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-01825 и 96-15-96158).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Константиnescу В.Н. Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
2. Лучин Г.А., Пешти Ю.В., Снопов А.И. Газовые опоры турбомашин. М.: Машиностроение, 1989. 238 с.
3. San Andres L. Thermodynamic analysis of fluid film bearings for cryogenic applications // J. Propuls. Power. 1995. V. 11. № 5. P. 964–972.
4. Rayleigh. Notes on the theory of lubrication // Phil. Mag. 1918. V. 35. № 1. P. 1–12.
5. Hamrock B.J., Anderson W.J. Rayleigh step journal bearing. Pt II. Incompressible fluid // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1969. V. 91. № 4. = Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1969. Т. 91. № 4. С. 53–62.
6. Madaу C.J. The maximum principle approach to the optimum one-dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1970. V. 92. № 3. P. 482–489. = Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1970. Т. 92. № 3. С. 111–119.
7. Rohde S.M. A demonstrably optimum one-dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 2. P. 188–192. = Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 2. С. 89–93.
8. McAllister G.T., Rohde S.M. Optimum design of one-dimensional journal bearings // J. Optimiz. Theory Appl. 1983. V. 41. № 4. P. 599–617.
9. Болдырев Ю.Я., Слесарев М.Е. Одномерный радиальный газовый подшипник с максимальной несущей способностью // Машиноведение. 1987. № 4. С. 97–103.
10. Rohde S.M. The optimum slider bearing in terms of friction // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 3. P. 275–279. = Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 3. С. 82–87.
11. Крайко А.Н. Изопериметрическая задача о профилировании оптимального зазора бесконечного плоского ползуна // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 222–233.
12. Грабовский В.И. Оптимальное профилирование ползуна, обеспечивающее его минимальное сопротивление // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 14–25.
13. Грабовский В.И., Крайко А.Н. Профилирование зазора радиального подшипника с минимальным моментом сопротивления // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 470–480.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1998