

УДК 532.529.2:536.421

© 1999 г. П.Т. ЗУБКОВ, В.А КРАВЧЕНКО

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ЗАМЕРЗАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ ЯЧЕЙКЕ

Изучено поведение замерзающей (оттаивающей) жидкости в квадратной ячейке при теплоизолированных вертикальных и изотермических горизонтальных стенках. Получены четыре вида различных стационарных решений. Найдены критические числа Gr, соответствующие переходу одного типа решения в другое.

В данной работе продолжено исследование различных стационарных решений задачи о естественной конвекции жидкости при наличии фазовых переходов, начатое в [1-3].

1. Постановка задачи. Единственное отличие данной постановки задачи от [3] состоит в том, что вместо линейного распределения температуры на вертикальных стенках они считаются теплоизолированными.

Повторим запись системы уравнений [3] в векторном виде и запишем новые граничные условия для температуры на вертикальных стенках.

В безразмерных переменных система уравнений для жидкой и твердой фаз имеет вид

$$\frac{DU}{Dt} = -\nabla P + \Delta U + Gr \Theta \mathbf{e}_g; \quad \nabla U = 0; \quad \frac{D\Theta}{Dt} = \frac{1}{Pr} \Delta \Theta \quad (1.1)$$

$$Gr = \frac{g\beta L^3 (T_1 - T_0)}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{a}, \quad \mathbf{e}_g = (0, 1)$$

$$\frac{\partial \Theta_{sol}}{\partial \tau} = \frac{1}{Pr} \Delta \Theta_{sol}$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad U = \frac{uL}{\nu}, \quad \tau = \frac{t\nu}{L^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

Здесь L – сторона квадрата, T_1 и T_0 – температура нижней и верхней стенки, ν – кинематический коэффициент вязкости.

Система уравнений написана в предположении, что плотность, теплопроводность и теплопроводность жидкой и твердой фазы одинаковы.

Безразмерная энтальпия определяется как

$$H = \Theta + \frac{1}{Ste}, \quad \Theta > \Theta_s; \quad H = \Theta, \quad \Theta < \Theta_s; \quad H = \Theta + \frac{\alpha}{Ste}, \quad \Theta = \Theta_s$$

$$Ste = \frac{c(T_1 - T_0)}{h_{ls}}$$

Здесь α – доля жидкости в двухфазном объеме, Ste – число Стефана, Θ_s – безразмерная температура фазового перехода. На фронте плавления выполняется усло-

вие Стефана

$$\Theta = \Theta_s, [-\nabla \Theta] = \frac{1}{Ste} V_b, [f] = f_+ - f_-, U = V = 0$$

где V_b – скорость поверхности плавления. Граничные условия на всех гранях $U = V = 0$ и для Θ в отличие от [3]

$$Y = 0: \Theta = 1; Y = 1: \Theta = 0 \quad (1.2)$$

$$X = 0: \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0; X = 1: \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0$$

Рассматриваются три типа начальных условий для Θ ($U = V = 0$)

$$\Theta_{in} = 0, \Theta_{in} = 1, \Theta_{in} = 1 - X \quad (1.3)$$

Рассматриваемая система уравнений с заданными граничными и начальными условиями, так же как и в [3], допускает следующее стационарное решение:

$$U = V = 0, \Theta = 1 - Y, P = Gr(Y - 0,5 \cdot Y^2) + const \quad (1.4)$$

Это решение при достаточно больших числах Gr неустойчиво.

Уравнения (1.1) с граничными и начальными условиями (1.2) и (1.3) исследовались численно на сетке 52×52 методом [4]. Процессы плавления–замерзания моделировались методом энтальпии [5]. Причем анализируются только стационарные решения в зависимости от числа Gr , остальные характерные параметры постоянны и равны $\Theta_s = 0,3$, $Ste = 10$, $Pr = 1$. Значение Θ_s бралось близким к температуре верхней стенки, для того чтобы получить область с жидкой фазой, близкой к квадратной. При других Θ_s , например 0,7, характер, количество решений и диапазоны их существования будут существенно отличаться от результатов, представленных в данной работе. При $\Theta_s = 0,3$ для выбранных начальных и граничных условий при отсутствии конвекции (решение (1.4)) доля твердого вещества в точности составляет 0,3 всего объема ячейки.

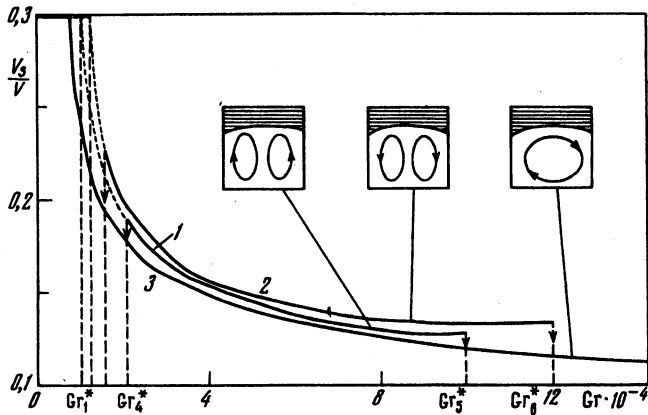
Определим безразмерные тепловые потоки на границах рассматриваемой ячейки как потоки, входящие в расчетную область, через безразмерные местные и интегральные числа Нуссельта (Nu) на верхней и нижней стороне квадрата

$$Y = 1: Nu_{ux} = \frac{\partial \Theta}{\partial Y}, Nu_u = \int_0^1 Nu_{ux} dx, Y = 0: Nu_{dx} = -\frac{\partial \Theta}{\partial Y}, Nu_d = \int_0^1 Nu_{dx} dx$$

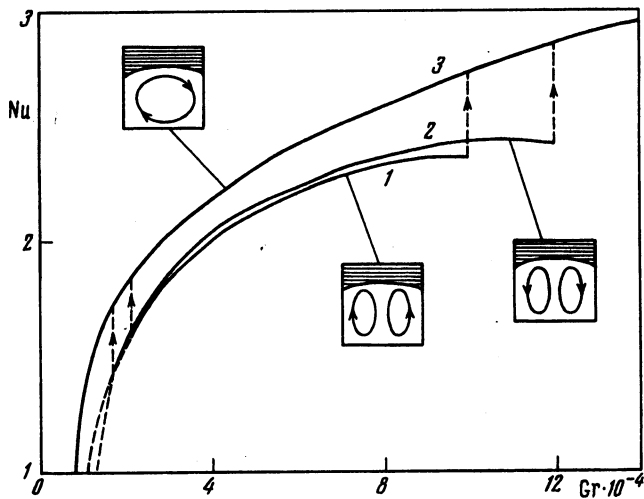
В стационарном случае $Nu_u + Nu_d = 0$. Это условие используется в расчете как один из критериев выхода на стационарный режим.

2. Анализ стационарных решений. Зависимость доли твердого вещества и стационарные тепловые потоки от числа Gr являются наиболее интересными зависимостями с точки зрения анализа полученных решений и переходов решений из одного типа в другой (фиг. 1, 2). В отличие от [3] в рассматриваемой ситуации каждый тип решения имеет свое собственное критическое число Gr , отвечающее началу конвективного движения. При малых числах Gr существует только несимметричное решение. Для него критическое число Gr начала конвекции равно $7,8 \cdot 10^3$, что меньше, чем в задаче с линейным распределением температуры на боковых стенках ($1,3 \cdot 10^4$). Уменьшение первого критического числа Gr можно объяснить тем, что линейное распределение температуры на боковых стенках, рассмотренное в [3], по сравнению с теплоизолированными является более жестким удерживающим условием.

Далее, при малых Gr симметричные решения можно получить только искусственным путем (постановкой условия симметрии на вертикальной линии, проходящей через центр квадрата). Эти "нестабильные" решения (на фиг. 1 и 2 показаны пунктирными линиями) имеют следующие критические числа Gr : 10^4 для решения с течением жид-

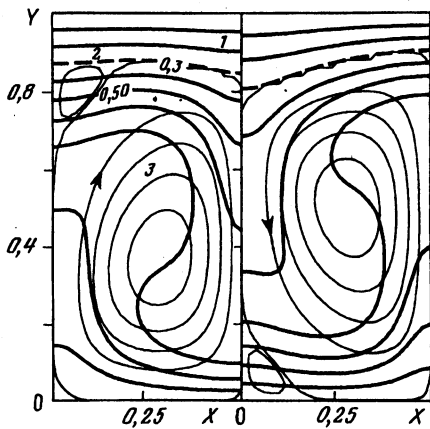


Фиг. 1. Зависимость доли твердой фазы V_s/V от числа Грасгофа ($Gr \cdot 10^{-4}$): 1, 2, 3 – кривые решений первого, второго и третьего типа; Gr_i^* ($i = 1, \dots, 6$) – критические числа Грасгофа ($\cdot 10^{-4}$): 1; 1,15; 1,6; 2,1; 10; 12



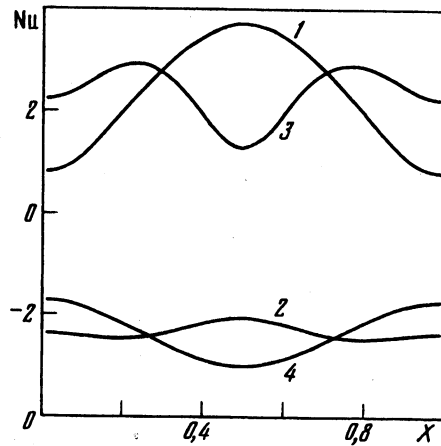
Фиг. 2. Зависимость теплового потока через ячейку от числа Грасгофа ($Gr \cdot 10^{-4}$): 1, 2, 3 – кривые решений первого, второго и третьего типа

кости у стенок вверх (решение первого типа) и $1,15 \cdot 10^4$ для решения с течением жидкости у стенок вниз (решение второго типа). Начиная с $Gr = 2,1 \cdot 10^4$ до $Gr = 1 \cdot 10^5$ существует "стабильное" решение первого типа. Область существования "нестабильного" решения первого типа – от $Gr = 1 \cdot 10^4$ до $Gr = 2,1 \cdot 10^4$. Стрелками показаны переходы этого решения на несимметричное решение. Заметим, что при увеличении Gr от $9 \cdot 10^4$ до $1 \cdot 10^5$ наблюдается не уменьшение, а некоторое увеличение доли твердого вещества в ячейке. В то же время в этом диапазоне изменения числа Gr незначительно уменьшается тепловой поток через ячейку. Такое поведение можно понять, рассмотрев характер течения, представленный на фиг. 3 (левая часть графика). Как видно из этого графика, вверху области существуют вторичные течения, которые развиваются при увеличении числа Грасгофа. Это приводит к потерям и уменьшению теплового потока, тем самым к увеличению доли твердого вещества.



Фиг. 3

Фиг. 3. Функция тока и изотермы для $(\Theta_{in} = 0; Gr = 8 \cdot 10^4)$ и $(\Theta_{in} = 1; Gr = 8 \cdot 10^4)$. В силу симметрии показана только половина области $0 \leq X \leq 0,5$; 1 – изотермы, 2 – граница раздела фаз, 3 – функция тока.



Фиг. 4

Фиг. 4. Локальные числа Нуссельта $(\Theta_{in} = 0; Gr = 8 \cdot 10^4)$: 1 – Nu_{dx} , 2 – Nu_{ux} $(\Theta_{in} = 1; Gr = 8 \cdot 10^4)$, 3 – Nu_{dx} , 4 – Nu_{ux}

Перейдем к описанию решения второго типа, при котором в центре квадрата жидкость течет вверх. В этом случае "стабильное" решение существует от $Gr = 1,6 \cdot 10^4$ до $Gr = 1,2 \cdot 10^5$. Область существования неустойчивого решения второго типа от $Gr = 1,15 \cdot 10^4$ до $Gr = 1,6 \cdot 10^4$. При $Gr = 1,2 \cdot 10^5$ и $1,6 \cdot 10^4$ это симметричное решение тоже становится неустойчивым и "сваливается" на несимметричное решение. Аналогично предыдущему случаю перед переходом на несимметричное решение наблюдается незначительное увеличение доли твердого вещества и соответственно уменьшение теплового потока, начиная от $Gr = 9,3 \cdot 10^4$ до критического значения для этого решения $Gr = 1,2 \cdot 10^5$. Здесь, так же как и в предыдущей ситуации, существуют вторичные течения, только теперь внизу области (фиг. 3, правая часть графика). В указанном выше диапазоне изменения числа Грасгофа вторичные течения увеличиваются, что приводит к потерям и соответственно уменьшению теплового потока и увеличению доли твердой фазы.

Сравним результаты для решений первого и второго типа, представленные на фиг. 1 и 2. При данном Gr решение первого типа дает меньшее значение как доли твердого вещества, так и теплового потока, переносимого через ячейку, чем решение второго типа. Такой, на первый взгляд необычный результат объясняется тем, что для решения второго типа поверхность раздела твердое – жидкое значительно более выпукла вверх, чем в случае решения первого типа, где граница раздела хотя и выпукла вниз, но является почти горизонтальной. Тем самым распределение плотности теплового потока на верхней стороне квадрата в случае решения первого типа ближе к постоянному значению (фиг. 4, кривая 2), чем для решения второго типа (фиг. 4, кривая 4). Кроме того, длина границы раздела фаз, изображенная штриховой линией на фиг. 3, для решения второго типа превышает длину границы раздела фаз решения первого типа, а через большую поверхность возможно прохождение большего потока тепла.

Наибольшему диапазону изменения Gr отвечает несимметричное решение, которое получается при начальном распределении температуры $\Theta = 1 - X$ и существует от $Gr = 7,8 \cdot 10^3$ до $Gr = 5,9 \cdot 10^5$. При числах $Gr > 5,9 \cdot 10^5$ и это решение становится

неустойчивым и получить стационарное решение не удастся. Если задать начальное условие $\Theta = X$, то получим несимметричное решение, являющееся зеркальным отображением рассматриваемого решения относительно оси симметрии, проходящей через центр квадрата. Но поскольку по переносимым тепловым потокам, структуре вихревого движения жидкости, а также по количеству твердой фазы эти решения одинаковы, то рассматривалось только одно из этих решений.

Из фиг. 2 следует, что решениям с меньшим тепловым потоком, переносимым через ячейку, соответствует меньший диапазон изменения числа $G\tau$ существования "стабильного" решения.

Заключение. Получены диапазоны чисел $G\tau$, при которых существует четыре типа различных решений, из них одно отвечает задаче чистой теплопроводности, а три – задаче конвекции. Диапазон существования различных решений отличается от соответствующих диапазонов при других граничных условиях на вертикальных стенках [3]. Определены области существования "нестабильных" симметричных решений. Найдено, что чем больше перенос тепла через квадратную ячейку, тем больше область изменения числа $G\tau$, при котором "стабильный" тип этого решения существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубков П.Т., Федоров К.М.* Конвекция в цилиндрической ячейке с замерзающей жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5, С. 125–129.
2. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
3. *Зубков П.Т., Климин В.Г., Кравченко В.А.* Конвекция замерзающей жидкости в квадратной ячейке при потере гидростатической устойчивости // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 115–119.
4. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
5. *Шамсундар Н., Спэрроу Е.М.* Применение метода энтальпии к анализу многомерной задачи теплопроводности при наличии фазового перехода // Теплопередача. 1975. № 3. С. 14–23.

Сургут

Поступила в редакцию
27.X.1998