

УДК 532.529:537.6

© 1999 г. М.А. ЛУШНИКОВ

ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ АГРЕГАТОВ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОМАГНИТНОЙ СИЛЫ

Исследована плоская задача о перераспределении агрегатов в магнитной жидкости в сосуде, состоящем из двух резервуаров – верхнего и нижнего, соединенных вертикальным каналом. При нагреве стенок канала до разных постоянных температур в нем возникает двухслойное плоскопараллельное конвективное течение магнитной жидкости, осуществляющее обмен агрегатами между резервуарами. Показано, что под действием термомагнитной силы, силы тяжести, силы трения, действующих на агрегаты со стороны магнитной жидкости и под влиянием концентрационной диффузии происходит перераспределение агрегатов в канале и их перенос из нижнего в верхний резервуар. Произведена оценка размеров канала, обеспечивающих эффективность такого переноса.

На находящееся в неоднородно нагретой магнитной жидкости тело в присутствии внешнего магнитного поля действует термомагнитная сила [1], направленная по градиенту температуры. Экспериментальное исследование влияния этой силы на перераспределение агрегатов, образованных из мелких частиц диспергированной фазы магнитной жидкости, проводилось в [2]. Экспериментальная установка, состоявшая из двух резервуаров, соединенных вертикальным каналом с плоскими разно нагретыми стенками, помещалась в горизонтальное магнитное поле. Использованная в установке магнитная жидкость (жидкость-носитель и мелкие диспергированные частицы магнетита, окруженные слоем поверхностно-активного вещества) содержала агрегаты, образованные из мелких частиц магнетита. Такую среду можно приближенно считать двухфазной: одну ее фазу составляет обычная магнитная жидкость, а другую – агрегаты, более тяжелые, чем окружающая жидкость. Из-за разного нагрева стенок канала в установке возникало термоконвективное течение магнитной жидкости, переносившее агрегаты из верхнего в нижний и из нижнего в верхний резервуар. В эксперименте обнаружилось, что через несколько часов концентрация тяжелых агрегатов в верхнем резервуаре увеличилась, а в нижнем уменьшилась, несмотря на действие силы тяжести.

Этот результат можно объяснить действием на агрегаты термомагнитной силы. Течение магнитной жидкости в большей части канала состояло из двух встречных плоскопараллельных конвективных потоков: у более нагретой стенки жидкость поднималась вверх, у более холодной опускалась вниз. Термомагнитная сила, действующая на агрегаты, двигающиеся в канале, сносила их в восходящий поток. При этом поток агрегатов через поперечное сечение канала направлен вверх, что и вызвало наблюдаемое в эксперименте необычное перераспределение агрегатов между резервуарами.

С целью моделирования перераспределения агрегатов в установке в данной работе рассмотрены задачи о перераспределении агрегатов в канале установки и определении расхода агрегатов через его поперечное сечение и о перераспределении агрегатов между резервуарами.

1. Рассмотрим плоскую задачу о движении агрегатов в канале. Введем прямоугольную систему координат, ось X направим горизонтально в направлении к более нагретой стенке, ось Y – вертикально вверх. Обозначим длину канала l_2 его ширину l_1 , $l_2 \gg l_1$, разность температур T_1 и T_2 его стенок $\theta = T_2 - T_1 > 0$.

Численное моделирование развитого конвективного течения магнитной жидкости в установке показало, что в большей части канала установки оно практически не отличается от течения [3] в канале бесконечной длины, состоящего из двух встречных плоскопараллельных потоков: вблизи горячей стенки жидкость поднимается вверх, возле холодной – опускается вниз. Профиль вертикальной компоненты скорости жидкости в середине канала показан на фиг. 1. Будем считать процесс перераспределения числовой плотности n агрегатов в канале установившимся: $n = n(x, y)$. Предположим, что на агрегаты, считающиеся одинаковыми сферическими частицами диаметра d , действуют сила тяжести, сила трения Стокса со стороны жидкости и постоянная термомангнитная сила $F_m = \alpha \nabla T$, $\alpha > 0$, сносящая их в восходящий поток жидкости в канале и компенсируемая вблизи стенки градиентом броуновского давления фазы агрегатов. Уравнение для n может быть получено из уравнения неразрывности и движения для фазы агрегатов, записанного в диффузионном приближении в пренебрежении конвективными слагаемыми. Выпишем его вместе с граничным условием на вертикальных стенках канала – равенством нулю потока массы агрегатов на стенку в виде

$$0 = -(\delta F_m + \mathbf{u}) \nabla n - \delta V \rho g \nabla n + \delta k T \Delta n \quad (1.1)$$

$$(n F_m - k T \nabla n) \mathbf{N} = 0, \quad x = 0, \quad x = l_1$$

Здесь $\mathbf{u} = (0, u_y)$ – скорость магнитной жидкости, \mathbf{N} – внешняя нормаль к стенке, $F_m = (F, 0)$, $\delta = [3\pi\nu\rho_0 d]^{-1} = \text{const}$, $\rho = \rho_a - \rho_0$, ρ_a и ρ_0 – плотность вещества агрегата и магнитной жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{g} = (0, -g)$ – ускорение силы тяжести, k – постоянная Больцмана, V – объем агрегата.

Члены δF_m и $\delta V \rho g$ описывают скорость движения агрегатов под действием силы F_m и скорость их оседания под действием разности силы тяжести и выталкивающей силы Архимеда. Член $\delta k T \Delta n$ описывает диффузию агрегатов, вызванную неоднородностью их распределения.

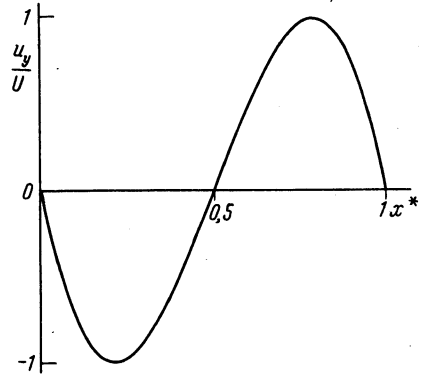
Для эллиптического уравнения (1.1) зададим распределение n внизу и вверху канала

$$n_0(x) = n(x, 0), \quad n_1(x) = n(x, l_2), \quad 0 < x < l_1 \quad (1.2)$$

Перейдем в (1.1) к безразмерным переменным. Поскольку $l_2 \gg l_1$, то в (1.1) можно пренебречь членом со второй производной по y , т.е. диффузией агрегатов вдоль канала. В итоге получим

$$-A \frac{\partial n^*}{\partial x^*} + (G - B(x^*)) \frac{\partial n^*}{\partial y^*} + \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (1.3)$$

$$A n^* - \frac{\partial n^*}{\partial x^*} = 0, \quad x^* = 0, \quad x^* = 1 \quad (1.4)$$



Фиг. 1. Профиль вертикальной компоненты скорости жидкости в среднем горизонтальном сечении канала

$$x^* = \frac{x}{l_1}, \quad y^* = \frac{y}{L_y}, \quad L_y = \frac{Ul_1^2}{\delta k T}, \quad U = \max |u_y|$$

$$G = \frac{\rho g \delta V}{U}, \quad 0 < G < 1, \quad A = \frac{Fl_1}{kT}$$

$$B(x^*) = \frac{u_y(x^* l_1)}{U}, \quad n^*(x^*, y^*) = n(x^* l_1, y^* L_y)$$

Проведенное упрощение приводит к неклассической параболической задаче [4] со сменой направления параболическости (с меняющимся направлением времени для стандартного уравнения теплопроводности). В связи с этим изменяются граничные условия внизу и вверху канала (1.2). Так как перемещение агрегатов из области нисходящего в восходящий поток под действием силы F_{tm} вызовет изменение их концентрации на выходе потоков внизу и вверху, то интуитивно понятно, что это изменение "повлияет" на граничные условия на выходе из канала. Действительно, как показано в [4], для корректной постановки задачи (1.3) – (1.4) требуется задание плотности n лишь на участках горизонтального сечения канала, где потоки агрегатов входят в канал

$$n_0^*(x^*) = n^*(x^*, 0), \quad x_r < x^* < 1$$

$$n_0^*(x^*) = n^*(x^*, l_2 / L_y), \quad 0 < x^* < x_r \quad (1.5)$$

где x_r – координата пересечения прямой, разделяющей потоки агрегатов, двигающиеся вверх и вниз с осью X .

Решение задачи (1.3)–(1.5) искалось методом разделения переменных в виде ряда

$$n^*(x^*, y^*) = \sum_k C_k X_k(x^*) Y_k(y^*), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

Из (1.1) – (1.3) и (1.6) получается

$$X_k''(x^*) - AX_k'(x^*) + \lambda_k(G - B(x^*))X_k(x^*) = 0, \quad 0 < x^* < 1 \quad (1.7)$$

$$AX_k(x^*) - X_k'(x^*) = 0, \quad x^* = 0, \quad x^* = 1 \quad (1.8)$$

$$Y_k = \exp(\lambda_k y^*), \quad k \neq 0, \quad \lambda_k \neq 0$$

$$X_0 = \exp(Ax^*), \quad Y_0 = 1 = \text{const}, \quad k = 0, \quad \lambda_k = 0$$

Здесь $\lambda_k = \lambda_k(A, G)$ – собственное значение задачи (1.7) – (1.8).

Уравнение для $X_k(x^*)$ решалось численно. Постоянные C_k определялись из граничного условия (1.5) приближенно методом наименьших квадратов. Девяти членов разложения (1.6) достаточно, чтобы с точностью до 1% в норме L_2 вычислить решение задачи с граничными условиями

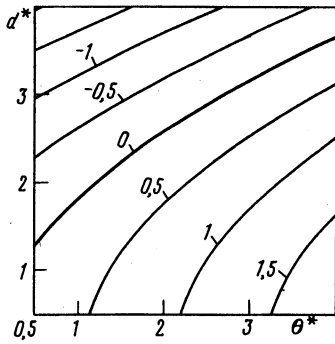
$$n_0^*(x^*, 0) = 1, \quad x_r < x^* < 1, \quad n_0^*(x^*, l_2 / L_y) = 0, \quad 0 < x^* < x_r$$

Обозначим решение с этими граничными условиями $n^*(x^*, y^*) = n_{1,0}^*$. Семи членов – чтобы с такой же точностью найти решение при

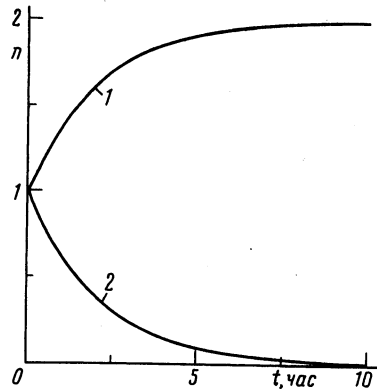
$$n_0^*(x^*, 0) = 0, \quad x_r < x^* < 1, \quad n_0^*(x^*, l_2 / L_y) = 1, \quad 0 < x^* < x_r$$

Обозначим решение в этом случае $n^*(x^*, y^*) = n_{0,1}^*$.

Вычислим поток агрегатов через горизонтальное сечение канала. Используя



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Линии уровня безразмерного расхода агрегатов $Q_y^* = Q_y g^{-1} v$ через поперечное сечение канала на плоскости безразмерных величин $\theta^* = \theta \beta \cdot 10^3$ и $d^* = d^{1/3} g^{1/3} v^{-2/3} \cdot 10^3$

Фиг. 3. Изменение числовой плотности агрегатов n в резервуарах со временем: 1 – верхний, 2 – нижний

формулы (1.6) – (1.8), получим

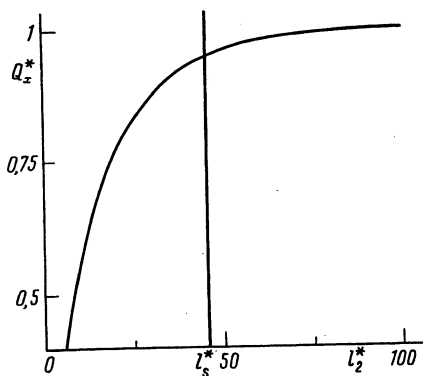
$$\begin{aligned}
 Q_y &= \int_0^{l_1} (u_y(x) - \delta p V g) n(x, y) dx = l_1 U \int_0^1 (B(x^*) - G) n^*(x^*, y^*) dx^* = \\
 &= l_1 U \int_0^1 (B(x^*) - G) \left(\sum_{k=\pm 1} C_k X_k(x^*) Y_k(y^*) + C_0 X_0(x^*) \right) dx^* + \\
 &+ l_1 U \sum_{k=\pm 1, \dots} \frac{C_k}{\lambda_k} Y_k(y^*) \int_0^1 (A X'_k(x^*) - X''_k(x^*)) dx^* = \tag{1.9} \\
 &= -l_1 U \int_0^1 \sum_{k=\pm 1, \dots} \frac{C_k}{\lambda_k} Y_k(y^*) (X''_k(x^*) - A X'_k(x^*) + \lambda_k (G - B(x^*)) X_k(x^*)) dx^* + \\
 &+ l_1 U C_0 \int_0^1 X_0(x^*) (B(x^*) - G) dx^* = l_1 U C_0 \int_0^1 X_0(x^*) (B(x^*) - G) dx^* = \text{const}
 \end{aligned}$$

Отметим, что в формуле (1.9) интеграл от $A X'_k(x^*) - X''_k(x^*)$ равен нулю в силу граничных условий (1.8). Таким образом, поток агрегатов через сечение канала полностью определяется слагаемым при $k = 0$ решения (1.6).

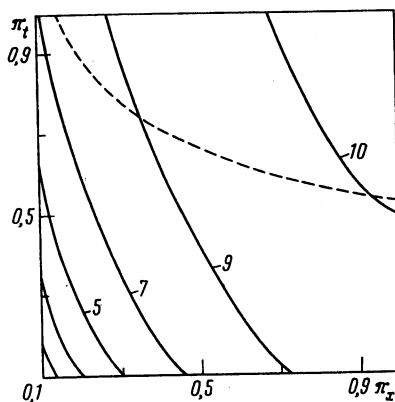
На фиг. 2 показана картина линий уровня безразмерного потока $Q_y^* = Q_y g^{-1} v$ агрегатов в зависимости от безразмерных величин $\theta^* = \theta \beta \cdot 10^3$ и $d^* = d^{1/3} g^{1/3} v^{-2/3} \cdot 10^3$, β – коэффициент изотермической сжимаемости жидкости. Поток агрегатов может быть положительным, т.е. направленным против силы тяжести, что соответствует переносу агрегатов в канале вверх.

2. Рассмотрим задачу о перераспределении агрегатов между резервуарами в предположении их однородности в резервуарах. Обозначим значения числовой плотности агрегатов $n^+(t)$ в верхнем и $n^-(t)$ в нижнем резервуарах.

Функция $n(x, y, t) = n^+(t) n_{1,0}^* + n^-(t) n_{0,1}^*$ является решением задачи (1.3)–(1.5) с граничными условиями на входе в канал $n(x, l_2, t) = n^+(t)$ – вверху и $n(x, 0, t) = n^-(t)$ – внизу.



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Расход агрегатов $Q_x^* = Q_x / Q_\infty$ через вертикальную плоскость, разделяющую потоки агрегатов, двигающиеся в противоположных направлениях в зависимости от $l_2^* = l_2/l_1$

Фиг. 5. Линии уровня расхода агрегатов $Q_x^{**} = Q_x g^{-1} v \cdot 10^4$ в плоскости безразмерных параметров $\pi_x = l_1 g^{1/3} v^{-2/3} \cdot 10^{-1}$ и $\pi_t = \theta \beta \cdot 10^2$

Условие сохранения полной массы агрегатов в сосуде записывается в виде

$$S \frac{dn^+}{dt} = l_1 \int_0^{l_1} u_a(x) n(x, l_2, t) dx, \quad S \frac{dn^-}{dt} = -l_1 \int_0^{l_1} u_a(x) n(x, 0, t) dx \quad (2.1)$$

где $u_a(x) = u_y(x) - \delta V \rho g$, а S — площадь вертикального сечения резервуара. На фиг. (3) приведено решение системы (2.1) для начального условия $n^-(0) = n^+(0) = 1$.

Практический интерес представляет вопрос об оптимальных размерах установки, при которых имеет место эффективный перенос агрегатов в верхний резервуар. Так как величина потока агрегатов через поперечное сечение канала растет с увеличением разности температур стенок канала θ , то интенсивность перераспределения агрегатов будет возрастать с увеличением θ . Максимум θ при этом ограничен условием $Re < Re_{cr}$, $Re = g \beta \theta l_1^3 / v^2$. Для оценки величины Re_{cr} можно использовать значение $Re_{cr} \approx 1580$ [4], соответствующее бесконечно длинному каналу.

Длина канала должна быть достаточной для обеспечения эффективного переноса агрегатов, движущихся в потоке жидкости, направленном вниз, в восходящий поток жидкости. На фиг. 4 представлен график зависимости безразмерного потока агрегатов $Q_x^* = Q_x / Q_\infty$ через вертикальную плоскость, разделяющую потоки агрегатов, двигающихся в противоположных направлениях, от безразмерной длины канала $l_2^* = l_2 / l_1$. Здесь $Q_\infty = Q_x$ при $l_2/l_1 = 100$. Существует такое характерное значение длины канала l_s^* , что дальнейшее ее увеличение ($l_2^* > l_s^*$) не приводит к существенному увеличению переноса агрегатов в канале из потока, двигающегося вниз, в восходящий поток.

На фиг. 5 изображена зависимость линий уровня безразмерного потока $Q_x^{**} = Q_x g^{-1} v \cdot 10^4$ от безразмерных параметров $\pi_x = l_1 g^{1/3} v^{-2/3} \cdot 10^{-1}$ и $\pi_t = \theta \beta \cdot 10^2$. Выше пунктирной линии обозначена область значений параметров, соответствующая $Re > Re_{cr}$, т.е. неустойчивому течению в канале. Для увеличения переноса агрегатов в восходящий поток в канале выгоднее увеличивать его ширину, оставаясь при этом в области параметров, соответствующих ламинарному течению.

Заключение. Объясняется обнаруженный экспериментально эффект переноса тяжелых агрегатов магнитной жидкостью из нижнего в верхний резервуар установки. Перенос обусловлен перераспределением агрегатов под действием горизонтальной термомагнитной силы в канале установки, сносящей агрегаты в восходящий поток жидкости. Приведены оценки параметров установки, влияющих на эффективность описанного процесса.

Автор выражает искреннюю признательность С.И. Чернышенко и Е.В. Чижонкову за полезное обсуждение вопросов, рассмотренных в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Налетова В.А., Тимонин Г.А., Шкель И.А. О силе, действующей на тело в неоднородно нагретой намагничивающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 76–83.
2. Lukashevich M.V., Naletova V.A., Tyatyushkin A.N., Tsurikov S.N., Shkel' I.A. Redistribution of ferromagnetic particle concentration in a magnetic fluid // J. Magn. and Magn. Mater. 1990. V. 85. № 1–3. P. 216–218.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
4. Терсенов С.А. Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени: Препринт. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1978. 58 с.

Москва
E-mail address: lushnik @ mcsme. anp. ru

Поступила в редакцию
23.VI.1998