

УДК 532.516.5

© 1999 г. Ю.Г. КРАСНИКОВ, В.Р. СОЛОВЬЕВ

НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Предложен аналитический способ приближенного решения уравнений Навье – Стокса, позволяющий последовательно раскрыть нелинейность задачи через цепочку линейных уравнений, и приведено полученное с помощью этого метода решение задачи обтекания цилиндра потоком вязкой несжимаемой жидкости.

Переход в гидродинамических течениях от ламинарного движения к вихревому, а затем к турбулентному является фундаментальной проблемой. В теоретическом плане принято считать, что уравнения Навье – Стокса позволяют описать этот переход, но нелинейность уравнений не позволяет получить аналитическое решение [1]. Применение в этом направлении численных методов дает интересные результаты [2], но здесь возникают большие трудности, связанные с выбором оптимальных численных алгоритмов решения задач и необходимостью доказательства их устойчивости и физического обоснования полученных результатов.

Предлагаемый ниже аналитический метод получения приближенных решений уравнений Навье–Стокса позволяет последовательно учитывать влияние нелинейного инерционного члена на характер течения. В случае обтекания цилиндра получен переход от ламинарного течения к вихревому.

1. Описание способа решения. Рассмотрим уравнения Навье – Стокса с исключенным давлением [1]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\Omega - (\Omega\nabla)\mathbf{V} = \nu\Delta\Omega$$
$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \quad \Omega = \operatorname{rot}\mathbf{V} \quad (1.1)$$

где \mathbf{V} – скорость движения жидкости, Ω – вихрь скорости, ν – кинематическая вязкость. При известном распределении скоростей давление p в жидкости может быть найдено путем решения уравнения Пуассона [1]

$$\Delta p = -\rho \frac{\partial^2 V^i V^a}{\partial x_i \partial x_a} \quad (1.2)$$

где ρ – плотность жидкости.

Решение уравнений (1.1) и (1.2) будем искать в виде функциональных рядов

$$\mathbf{V} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}_n; \quad \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n; \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \quad (1.3)$$

При подстановке рядов (1.3) в нелинейные члены уравнений (1.1) и (1.2) возникает вопрос о перемножении рядов.

Рассмотрим, например, перемножение рядов

$$\sum_n (V_n \nabla) \sum_k \Omega_k$$

В соответствии с теоремой Коши [3] произведения $(V_n \nabla) \Omega_k$ можно располагать в виде различных последовательностей. В частности, удобно составить из них прямоугольную бесконечную матрицу и суммировать их, например, по диагоналям, что соответствует правилу суммирования степенных рядов. Тогда

$$(\nabla \nabla) \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (V_k \nabla) \Omega_{n-k} \quad (1.4)$$

Проделав аналогичную операцию со всеми остальными нелинейными членами уравнений (1.1) и (1.2) и потребовав, чтобы равенство обеспечивалось в отдельности при каждом значении n , получим цепочку уравнений относительно функций V_n, Ω_n, p_n . При $n = 0$ имеем

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial t} + (V_0 \nabla) \Omega_0 - (\Omega_0 \nabla) V_0 - v \Delta \Omega_0 = 0 \quad (1.5)$$

$$\Delta p_0 + \rho \frac{\partial^2 V_0^i V_0^a}{\partial x_i \partial x_a} = 0, \quad \text{div} V_0 = 0, \quad \Omega_0 = \text{rot} V_0 \quad (1.6)$$

В остальных уравнениях при $n \geq 1$ в каждой конечной сумме по k в разложении (1.4) и других подобных разложениях выделим члены с $k = 0$ и $k = n$ и расположим их в левых частях уравнений, а в правые части вынесем оставшиеся суммы по k . В результате получим цепочку уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega_n}{\partial t} + (V_0 \nabla) \Omega_n + (V_n \nabla) \Omega_0 - (\Omega_0 \nabla) V_n - (\Omega_n \nabla) V_0 - v \Delta \Omega_n = \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} [(V_k \nabla) V_{n-k} - (V_k \nabla) \Omega_{n-k}] \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\text{div} V_n = 0, \quad \Omega_n = \text{rot} V_n$$

$$\Delta p_n + \rho \frac{\partial^2 V_0^i V_n^a}{\partial x_a \partial x_i} + \rho \frac{\partial^2 V_n^i V_0^a}{\partial x_a \partial x_i} = -\rho \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 V_k^i V_{n-k}^a}{\partial x_a \partial x_i}$$

В уравнения для V_n, Ω_n, p_n в качестве коэффициентов входят функции, V_k, Ω_k, p_k , где $k < n$, а при $n = 0$ присутствуют только функции V_0, Ω_0, p_0 . Таким образом, V_n, Ω_n, p_n находятся последовательно, начиная с $n = 0$. Уравнения (1.5), (1.6) для $n = 0$ идентичны исходным и, казалось бы, решение задачи не стало проще. Однако поскольку граничным и начальным условиям задачи должны удовлетворять функциональные ряды (1.3), то для V_0, Ω_0, p_0 можно взять частное решение уравнений (1.5), (1.6), а выполнение граничных и начальных условий обеспечить за счет следующих членов рядов (1.3). Если такое решение найдено, то величины V_0, Ω_0 будут известными коэффициентами левой части уравнений, которые представляют собой линейные дифференциальные операторы одного и того же вида для всех уравнений цепочки. Таким образом, имеем дело с цепочкой линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных, в которой правые части последующих уравнений "зацепляют" решения предыдущих. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу обтекания цилиндра стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости.

2. Система уравнений для стационарного обтекания цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Решение будем искать в виде функционального ряда для функции тока

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x, y) \quad (2.1)$$

Ось x направлена по потоку слева направо, ось y перпендикулярна потоку. В полярных координатах φ – угол между осью x и радиусом-вектором \mathbf{r} . Введем безразмерные величины: координаты, отнесенные к радиусу цилиндра R_0 , $r = r' / R_0$; компоненты скоростей, отнесенные к скорости набегающего потока U , $V_i = V'_i / U$; безразмерную функцию тока $\Psi = \Psi' / UR_0$, давление $p = p' / \rho U^2$ и число Рейнольдса $Re = UR_0 / \nu$.

Построение решения начнем с плоскопараллельного потока жидкости с постоянной скоростью $V = 1$, которому соответствует функция тока

$$\Psi_0 = y = r \sin \varphi \quad (2.2)$$

Для функции Ψ_0 граничные условия при $r \rightarrow \infty$ совпадают с граничными условиями на весь ряд (2.1), а на поверхности цилиндра – нет. Учитывая, что компоненты скоростей в декартовой и полярной системах координат связаны с функцией тока соотношениями

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (2.3)$$

легко убедиться, что функция (2.2) удовлетворяет уравнению (1.5). С учетом соотношений (2.1), (2.2) и (2.3) цепочка уравнений (1.7) преобразуется к виду

$$\Delta \Delta \Psi_1 - Re \frac{\partial \Delta \Psi_1}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\Delta \Delta \Psi_n - Re \frac{\partial \Delta \Psi_n}{\partial x} = Re \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi_{n-p}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_p}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi_{n-p}}{\partial y} \right), \quad n \geq 2 \quad (2.5)$$

Поскольку при $r \rightarrow \infty$ граничные условия для скорости потока выполняются за счет функции Ψ_0 , для функции Ψ_n при $n \geq 1$ имеем

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} = 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

На поверхности цилиндра составляющие скорости от решения Ψ_0 равны $V_{r0} = \cos \varphi$, $V_{\varphi 0} = -\sin \varphi$, поэтому

$$r = 1: \quad V_{r1} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} = -\cos \varphi, \quad \frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} = 0, \quad V_{\varphi 1} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} = 0, \quad n \geq 2 \quad (2.7)$$

3. Решение для функции Ψ_1 . Уравнение (2.4) относительно функции $\Delta \Psi_1$ приводится к каноническому виду заменой

$$\Delta \Psi_1 = e^{kx} Z(x, y), \quad k = Re/2 \quad (3.1)$$

В результате получается уравнение для функции $Z(x, y)$

$$\Delta Z - k^2 Z = 0 \quad (3.2)$$

Решение (3.2) в полярных координатах должно удовлетворять условию ограни-

ченности при $r \rightarrow \infty$, периодичности и в силу симметрии течения относительно оси x нечетности по углу φ . Таким общим решением является ряд

$$Z(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_n(kr) \sin n\varphi \quad (3.3)$$

где $K_n(kr)$ – модифицированные функции Бесселя, B_n – произвольные постоянные.

Для определения функции тока $\Psi_1(r, \varphi)$ нужно в соответствии с (3.1) найти решение уравнения

$$\Delta \Psi_1 = e^{kr \cos \varphi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_n(kr) \sin n\varphi \quad (3.4)$$

Правую часть уравнения (3.4) обозначим через $V(r, \varphi)$ и разложим по собственным функциям оператора однородного уравнения $\sin l\varphi$

$$V(r, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} V_l(kr) \sin l\varphi, \quad V_l(kr) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(r, \varphi) \sin l\varphi d\varphi \quad (3.5)$$

или

$$V_l(kr) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n W_{ln}(kr) \quad (3.6)$$

$$W_{ln}(kr) = \frac{1}{\pi} K_n(kr) \int_0^{2\pi} e^{kr \cos \varphi} \sin n\varphi \sin l\varphi d\varphi$$

Функцию Ψ_1 также представим в виде ряда

$$\Psi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} R_l(r) \sin l\varphi \quad (3.8)$$

После подстановки (3.5) и (3.8) в уравнение (3.4) получим уравнение

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R_l}{\partial r} \right) - \frac{l^2}{r^2} R_l \right] \sin l\varphi = \sum_{l=1}^{\infty} V_l(r) \sin l\varphi$$

Решением являются функции

$$R_l = C_l r^l + D_l r^{-l} + \frac{r^l}{2l} \int r^{-l+1} V_l(r) dr - \frac{r^{-l}}{2l} \int r^{l+1} V_l(r) dr \quad (3.9)$$

Обозначим

$$P_{ln}(r) = \frac{r^l}{2l} \int r^{-l+1} W_{ln}(r) dr, \quad Q_{ln}(r) = \frac{r^{-l}}{2l} \int r^{l+1} W_{ln}(r) dr \quad (3.10)$$

Тогда с учетом (3.6), (3.8) и (3.9) получим

$$\Psi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \sin l\varphi \left\{ C_l r^l + D_l r^{-l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n [P_{ln}(r) - Q_{ln}(r)] \right\} \quad (3.11)$$

Константы C_l, D_l, B_n определяются из граничных условий (2.6), (2.7).

Из ограниченности решения при $r \rightarrow \infty$ следует, что $C_l = 0$ для всех l .

Граничные условия на поверхности цилиндра дают следующую систему уравнений:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left\{ -lD_l + \sum_{n=1}^{\infty} B_n [P'_{ln}(1) - Q'_{ln}(1)] \right\} \sin l\varphi = -\sin \varphi \quad (3.12)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left\{ lD_l + l \sum_{n=1}^{\infty} B_n [P_{ln}(1) - Q_{ln}(1)] \right\} \cos l\varphi = -\cos \varphi$$

Приравнивая в (3.12) коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему уравнений для определения коэффициентов $D_l, B_n, n, l \geq 1$

$$-D_l + \sum_{n=1}^{\infty} B_n [P'_{ln}(1) - Q'_{ln}(1)] = -1, \quad D_l + \sum_{n=1}^{\infty} B_n [P_{ln}(1) - Q_{ln}(1)] = -1, \quad l = 1 \quad (3.13)$$

$$-lD_l + \sum_{n=1}^{\infty} B_n [P'_{ln}(1) - Q'_{ln}(1)] = 0, \quad lD_l + l \sum_{n=1}^{\infty} B_n [P_{ln}(1) - Q_{ln}(1)] = 0, \quad l \geq 2$$

После попарного сложения этих уравнений при одинаковых значениях l из системы (3.13) выделяется система уравнений для определения коэффициентов B_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n [P'_{ln}(1) - Q'_{ln}(1) + P_{ln}(1) - Q_{ln}(1)] = -2, \quad l = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n [P'_{ln}(1) - Q'_{ln}(1) + lP_{ln}(1) - lQ_{ln}(1)] = 0, \quad l \geq 2 \quad (3.14)$$

Если решение для B_n существует, то коэффициенты D_l , определяются уравнениями (3.13). Из (3.10) следует, что для функций $P_{ln}(r), Q_{ln}(r)$ справедливо соотношение

$$P'_{ln}(r) - Q'_{ln}(r) = \frac{l}{r} [P_{ln}(r) + Q_{ln}(r)] \quad (3.15)$$

С учетом (3.15) система (3.14) переписывается в виде

$$p_{11}B_1 + p_{12}B_2 + p_{13}B_3 + \dots + p_{1n}B_n + \dots = 1$$

$$p_{21}B_1 + p_{22}B_2 + p_{23}B_3 + \dots + p_{2n}B_n + \dots = 0$$

.....

$$p_{l1}B_1 + p_{l2}B_2 + p_{l3}B_3 + \dots + p_{ln}B_n + \dots = 0$$

.....

$$p_{ln} = -P_{ln}(1) \quad (3.16)$$

Чтобы определить, какое число уравнений и сколько слагаемых в каждом уравнении бесконечной системы (3.16) необходимо учитывать, требуется анализ матрицы коэффициентов этой системы.

Интеграл в определении (3.7) функции $W_{ln}(r)$ выражается через модифицированные функции Бесселя $I(kr)$ и $K(kr)$ [4], после чего функция $W_{ln}(r)$ приобретает вид

$$W_{ln}(r) = K_n(kr)[I_{n-l}(kr) - I_{n+l}(kr)] \quad (3.17)$$

Подставив (3.17) в выражения (3.10) для функций $P_{ln}(r), Q_{ln}(r)$ и, проведя интегрирование с использованием известных соотношений [4], получим

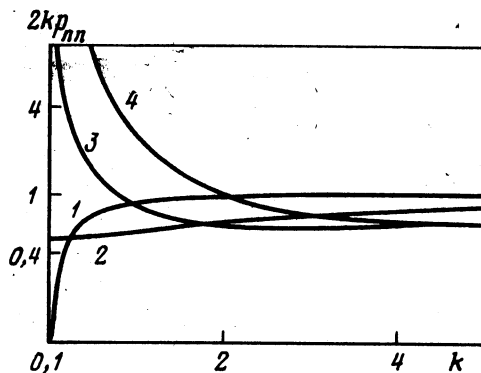
$$P_{ln}(r) = \frac{r^2}{4l(1-l)} \{K_n(kr)[I_{n-l}(kr) - I_{n+l}(kr)] + K_{n-1}(kr)I_{n-l+1}(kr) - K_{n+1}(kr)I_{n+l-1}(kr)\},$$

$l \neq 1$

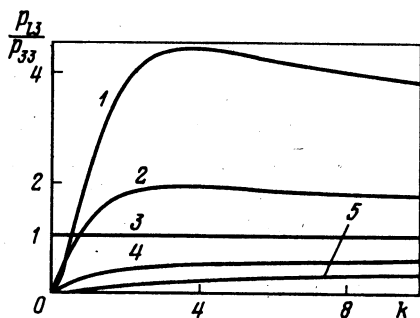
$$P_{11}(r) = -\frac{r}{2k} [K_0(kr)I_0(kr) + K_1(kr)I_1(kr)]$$

$$P_{ln}(r) = \frac{nr}{k} \int \frac{1}{z} K_n(z) I_n(z) dz \approx \frac{nr}{k} \int \frac{dz}{2z\sqrt{n^2+z^2}} = -\frac{r}{2k} \ln \frac{n + \sqrt{n^2+k^2r^2}}{kr} \quad (3.18)$$

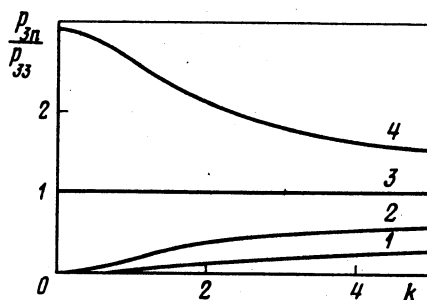
$$Q_{ln}(r) = \frac{r^2}{4l(l+1)} \{K_n(kr)[I_{n-l}(kr) - I_{n+l}(kr)] + K_{n+1}(kr)I_{n-l-1}(kr) - K_{n-1}(kr)I_{n+l+1}(kr)\}$$



Фиг. 1. Зависимости (1-4) отношений диагональных элементов матрицы p_{nn} к своим асимптотическим значениям $k \gg 1$ для $n = 1, 2, 3, 4$



Фиг. 2. Зависимости (1-5) отношений элементов p_{l3} третьего столбца к диагональному элементу для $l = 1, 2, 3, 4, 5$



Фиг. 3. Зависимости (1-4) отношений p_{3n} третьей строки к диагональному элементу для $n = 1, 2, 3, 4$

В пределе $kr \gg 1$, после использования асимптотических разложений функций K и I , выражения для функций $P_{in}(r)$ и $Q_{in}(r)$ приобретают более простой вид

$$P_{in}(r) = -\frac{n}{2lk^2} \left[\left(1 - \frac{l(l-1)}{2kr} + o\left(\frac{1}{k^2 r^2}\right) \right) \right], \quad Q_{in}(r) = \frac{n}{2lk^2} \left[\left(1 - \frac{l(l+1)}{2kr} + o\left(\frac{1}{k^2 r^2}\right) \right) \right] \quad (3.19)$$

На фиг. 1 представлены построенные по формулам (3.18) зависимости от величины $k = \text{Re}/2$ отношений диагональных элементов фрагмента матрицы p_{ln} для $l, n \leq 4$ к их асимптотическому пределу (3.19) при $k \gg 1$, равному $1/2k^2$. На фиг. 2, 3 даются отношения элементов матрицы к диагональному элементу p_{ln}/p_{nn} , для матрицы 3×3 . Элементы матрицы, лежащие ниже диагонали, т.е. p_{ln} для $l > n$, в каждом столбце монотонно убывают с ростом l и в каждой строке растут с ростом n , оставаясь строго меньше диагонального элемента. При этом для каждой строки m существует такое значение $k = k_m$, что при $k < k_m$ всеми элементами строки p_{mn} , $n < m$, можно пренебречь по сравнению с диагональным элементом p_{mm}

$$p_{mn} \ll p_{mm}, \quad n < m \quad (3.20)$$

Из элементов p_{mn} , $n < m$, максимальным является элемент $p_{m,m-1}$, соседний с диагональным (фиг. 3). Поэтому для определенности положим, что k_m это такая величина k , при которой элемент $p_{m,m-1}$ в ϵ раз меньше диагонального элемента p_{mm} (прямая l на

Решение (3.24) справедливо при $kr < 1$, когда в разложении функции Ψ_1 (3.11) по гармоникам можно пренебречь слагаемыми ряда с $l \geq 2$. В предельном случае $kr \ll 1$, с учетом того что $u_{r0} = \cos \varphi$, $u_{\varphi 0} = -\sin \varphi$, скорость потока около цилиндра равна

$$\begin{aligned} v_r = v_{r0} + v_{r1} &= \frac{\cos \varphi}{1 - 2 \ln \frac{1}{2} \gamma k} \left[\frac{1}{r^2} - 1 + 2 \ln r \right], \\ v_\varphi = v_{\varphi 0} + v_{\varphi 1} &= \frac{\sin \varphi}{1 - 2 \ln \frac{1}{2} \gamma k} \left[\frac{1}{r^2} - 1 - 2 \ln r \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\ln \gamma = 0,57722$ – постоянная Эйлера. Выражения (3.26) совпадают с классическим решением Лэмба [5] для случая $kr \ll 1$.

4. Второе приближение в задаче обтекания цилиндра. В соответствии с (2.5) уравнение для функции тока Ψ_2 в случае $\Psi_0 = u$ имеет вид

$$\Delta \Delta \Psi_2 - 2k \frac{\partial \Delta \Psi_2}{\partial x} = L(x, y) \quad (4.1)$$

где $L(x, y)$ – известная по решению Ψ_1 функция

$$L(x, y) = 2k \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi_1}{\partial y} \right] = \frac{2k}{r} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial \Delta \Psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \frac{\partial \Delta \Psi_1}{\partial \varphi} \right] \quad (4.2)$$

Подобно решению уравнения (2.4) используем замену

$$\Delta \Psi_2 = e^{kx} Z_2(x, y) \quad (4.3)$$

которая преобразует уравнение (4.1) к виду

$$\Delta Z_2 - k^2 Z_2 = e^{-kx} L(r, \varphi) \quad (4.4)$$

Однородное решение уравнения (4.4) совпадает с решением (3.3) уравнения (3.2). Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения (4.4), разложим функцию $e^{-kx} L(r, \varphi)$ в ряд по собственным функциям оператора однородного уравнения $\sin n\varphi$

$$e^{-kx} L(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \sin n\varphi \quad (4.5)$$

$$a_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-kr \cos \varphi} L(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (4.6)$$

После подстановки (4.2) в (4.6) и выполнения интегрирования с использованием (3.24) и (3.4) для Ψ_1 и $\Delta \Psi_1$ соответственно получим следующие выражения для функций $a_n(r)$:

$$\begin{aligned} a_1(r) &= -\frac{B_1 k^2}{q} K_1 \left[\frac{1}{r^2} + 2f \{ K_1 I_1 + K_0 (2I_0 - I_2) \} \right] \\ a_2(r) &= -\frac{B_1 k^2}{q} K_0 \left[\frac{1}{r^2} - 4f \left\{ K_1 I_1 + \frac{1}{2} K_0 (I_0 + I_2) + \frac{1}{kr} \frac{K_1}{K_0} (K_1 I_1 + K_0 I_0) \right\} \right] \\ a_3(r) &= \frac{B_1 k^2}{q} K_1 \left[\frac{1}{r^2} - 2f \{ K_1 I_1 + K_0 I_2 \} \right], \quad a_n(r) = 0, \quad n \geq 4 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Аргументом всех модифицированных функций Бесселя K_n, I_n является kr . С учетом (4.5), (4.7) уравнение (4.6) преобразуется к виду

$$\Delta Z_2 - k^2 Z_2 = a_1(r) \sin \varphi + a_2(r) \sin 2\varphi + a_3(r) \sin 3\varphi$$

Его решение, записанное в виде

$$Z_2(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \sin n\varphi \quad (4.8)$$

сводится к решению уравнений для $R_n(r)$

$$R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) R_n = a_n(r)$$

которыми являются функции

$$R_n(r) = A_n K_n(kr) + I_n(kr) \int \frac{K_n(kr) a_n(r)}{w_n(r)} dr - K_n(kr) \int \frac{I_n(kr) a_n(r)}{w_n(r)} dr \quad (4.9)$$

$$w_n(r) = K_n(kr) I_n'(kr) - K_n'(kr) I_n(kr) = (kr)^{-1}$$

Решение уравнения (4.3) с учетом (4.8), (4.9) аналогично решению уравнения (3.4) для функции Ψ_1 и после преобразований может быть представлено как

$$\Psi_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sin l\varphi \left\{ F_l r^{-l} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (P_{ln}(r) - Q_{ln}(r)) + N_l(r) \right\} \quad (4.10)$$

Здесь функции P_{ln} , Q_{ln} определяются выражениями (3.18), а функции $N_l(r)$, описывающие нелинейность задачи, имеют вид

$$N_l(r) = \frac{r^l}{2l} \int r^{-l+1} \theta_l(r) dr - \frac{r^{-l}}{2l} \int r^{l+1} \theta_l(r) dr \quad (4.11)$$

Функции $\theta_l(r)$ в (4.11) определены формулами

$$\theta_l(r) = \sum_{n=1}^3 S_n(r) (I_{n-l}(kr) - I_{n+l}(kr)) \quad (4.12)$$

$$S_n(r) = k I_n(kr) \int r K_n(kr) a_n(r) dr - k K_n(kr) \int r I_n(kr) a_n(r) dr \quad (4.13)$$

Коэффициенты A_n , F_l определяются из граничных условий (2.7) на поверхности цилиндра. Вид решения (4.10) для Ψ_2 отличается от (3.11) для Ψ_1 только наличием функций нелинейности $N_l(r)$. Поэтому после исключения из системы алгебраических уравнений, описывающих граничные условия при $r = 1$, членов с коэффициентами F_l получим систему уравнений

$$p_{ln} A_n = \frac{1}{2} (N_l(1) + N_l'(1) l^{-1})$$

отличающуюся от системы (3.16) только правой частью.

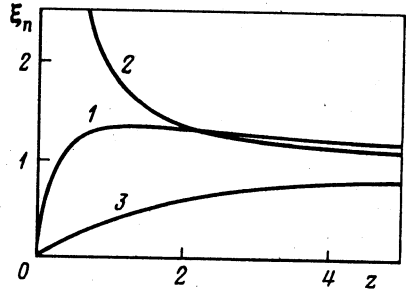
Аналогично в решении для Ψ_2 следует учитывать вторую и, может быть, третью гармонику. Такое ограничение действительно в соответствии с условием (3.20) только при $k \ll k_3 \approx 2$. Поскольку решение для Ψ_1 справедливо при $k \ll k_2 \approx 1,5$, после нахождения Ψ_2 продвинемся по Re в область больших значений в 1,5 раза.

Для построения картины, соответствующей решению (4.10), выполним интегрирование выражений (4.13) для функций $S_n(r)$. Сложный вид функций $a_n(r)$ (4.7) не позволяет получить точное аналитическое решение этой задачи. Для проведения приближенных вычислений представим $a_n(r)$ в виде

$$a_1 = -\frac{B_1 k^2}{q} K_1(z) \left[\frac{k^2}{z^2} + \frac{2f(k)}{z} \xi_1(z) \right], \quad a_2 = -\frac{B_1 k^2}{q} K_0(z) \left[\frac{k^2}{z^2} - \frac{4f(k)}{z} \xi_2(z) \right],$$

$$a_3 = \frac{B_1 k^2}{q} K_1(z) \left[\frac{k^2}{z^2} - \frac{2f(k)}{z} \xi_3(z) \right], \quad z = kr \quad (4.14)$$

Фиг. 5. Функции $\xi_n(z)$: 1-3 для $n = 1, 2, 3$



Функции $\xi_n(z)$ есть отношения сумм произведений функций $I_l(z)K_n(z)$ в выражениях (4.7) для $a_n(r)$ к их соответствующим асимптотическим значениям при $z \rightarrow \infty$

$$\xi_1(z) = z[K_1 I_1 + K_0(2I_0 - I_2)], \quad \xi_2(z) = z \left[K_1 I_1 + \frac{1}{2} K_0(I_0 + I_2) + \frac{K_1}{z K_0} (K_1 I_1 + K_0 I_0) \right]$$

$$\xi_3(z) = z[K_1 I_1 + K_0 I_2]$$

Здесь опущен аргумент z у модифицированных функций Бесселя. Графики функций $\xi_n(z)$ представлены на фиг. 5. При $z > 1$ функции $\xi_n(z)$ слабо зависят от z и стремятся к единице при $z \rightarrow \infty$.

Выражения для функций $S_n(z)$ с учетом (4.14) перепишутся в виде

$$S_1(z) = -S_{1k}(z) - 2S_{1f}(z), \quad S_2(z) = -S_{2k}(z) + 4S_{2f}(z), \quad S_3(z) = S_{3k}(z) - 2S_{3f}(z)$$

$$S_{nk}(z) = \frac{B_1 k^3}{q} \left[I_n \int K_n K_{n-2} \frac{1}{z} dz - K_n \int I_n K_{n-2} \frac{1}{z} dz \right]$$

$$S_{nf}(z) = \frac{f(k) B_1 k}{q} \left[I_n \int K_n \xi_n K_{n-2} dz - K_n \int I_n \xi_n K_{n-2} dz \right], \quad n = 1, 2, 3 \quad (4.15)$$

С помощью соотношений [4] интегралы в (4.15) для $S_{nk}(z)$ берутся точно

$$S_{nk}(z) = \frac{B_1 k^3}{2qz} K_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, 3$$

Но для $S_{nf}(z)$ интегрирование точно выполнить не удастся из-за сложного вида функций $\xi_n(z)$.

Качественный вид решения для функции Ψ_2 можно получить в асимптотическом пределе при $z \gg 1$, тогда выражения (4.12) для функций θ_l после преобразований приобретают вид

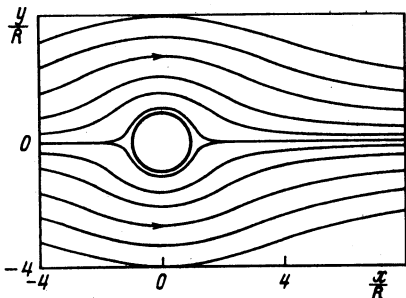
$$\theta_l = -\frac{3l B_1 k}{2qz^3} \left[\frac{3k^2}{z} + 4f \ln z \right]$$

где q и f определяются формулами (3.25).

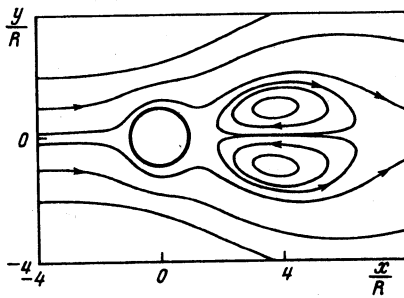
Интегрирование (4.11) дает простые формулы для функций нелинейности N_l

$$N_1(r) \approx \frac{3B_1 f}{2qk^2 r} \ln^2 kr, \quad N_l(r) \approx \frac{6B_1 f}{qk^2 r} \frac{l}{l^2 - 1} \ln kr, \quad l \geq 2 \quad (4.16)$$

Выражения (4.16) справедливы при $kr \gg 1$. Решение для Ψ_2 , как отмечалось выше, имеет физический смысл только при сохранении в нем первых двух-трех гармоник ($l \leq 3$), т.е. при $k < 2$. Эти условия можно использовать в диапазоне изменения k от 1 до 1,5 ($Re = 2-3$) и полученное решение может претендовать на роль качественной иллюстрации течения. Коэффициенты A_n , F_l решения (4.10) для функции Ψ_2 ,



Фиг. 6. Картина линий тока вокруг цилиндра при $Re = 0,1$ ($\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$)



Фиг. 7. Картина линий тока вокруг цилиндра при $Re = 2,6$ ($\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2$), соответствующая асимптотическому пределу Ψ_2

найденные из условия выполнения граничных условий (2.7) при $r = 1$ с учетом (4.16), равны

$$A_1 = -\frac{B_1 f}{q}(4 + \ln k), \quad A_2 = -\frac{1}{4} \frac{B_1 f}{q} \left(-\frac{7}{2} + \ln k \right), \quad A_3 = \frac{3}{4} \frac{B_1 f}{q} (1 + 2 \ln k) \quad (4.17)$$

$$F_1 = -\frac{3}{2} \frac{B_1 f}{qk^2} \ln k (\ln k - 2), \quad F_2 = -2 \frac{B_1 f}{qk^2} (\ln k - 1), \quad F_3 = -\frac{3}{4} \frac{B_1 f}{qk^2} (\ln k - 1)$$

Картина линий тока течения $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2$, построенная по формулам (2.2), (3.24), (4.10) с коэффициентами (4.17) и функциями нелинейности N_l (4.16), представлена на фиг. 6, 7. При малых значениях числа Рейнольдса ($Re \ll 1$), когда вкладом Ψ_2 можно пренебречь, течение описывается формулами (2.2), (3.24) и имеет безвихревой характер (фиг. 6). С учетом Ψ_2 картина течения резко меняется: появляются присоединенные вихри за цилиндром (фиг. 7). Полученный результат качественно соответствует данным эксперимента [6]. Возможно, что в такой тип решения вносят вклад более высокие приближения, поскольку решения для любых функций Ψ_n имеют один и тот же вид (4.10) и отличаются друг от друга только функциями N_l .

Заключение. Представление искомым функций в виде функциональных рядов позволяет свести задачу решения нелинейных уравнений Навье – Стокса к решению цепочки попарно зацепляющихся линейных однородных уравнений в частных производных. Нелинейность исходных уравнений последовательно раскрывается в правых частях уравнений цепочки. В отличие от метода итераций, обсуждаемого, например, в [1], предлагаемая процедура дает всю систему уравнений, описывающих нелинейные эффекты исследуемого течения, что удобно для анализа решения.

В случае обтекания цилиндра из этой системы уравнений ясно видно, какие гармоники решения присутствуют в каждом последующем приближении. Решение цепочки уравнений описывает переход от ламинарного течения к вихревому. При выборе в качестве нулевого приближения функции тока набегающего потока в первом приближении получается уравнение Озеена и решение Лэмба для случая $Re \ll 1$. Более высокие приближения описывают течение при больших значениях числа Re . Из вида решения следует, что каждое последующее приближение дает незначительное продвижение по числу Re , так что для $Re > 1$ потребуются несколько первых членов ряда.

Анализ асимптотического решения во втором приближении показал, что высшие приближения могут описывать зарождение и развитие вихрей за цилиндром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994. 442 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959. Т. 2, 807 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамцова М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Т. 2. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
6. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1935. 305 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.IV.1998