МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1999

УДК 532.59

© 1999 г. Ю.Ф. ОРЛОВ, В.В. ТИРСКИХ

ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ НЕСИММЕТРИЧНЫМ УДАРОМ ПО ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

Решается плоская линейная задача о волнах на свободной поверхности тяжелой жидкости, вызванных несимметричным ударом и погружением плоской пластинки. Исследуется начальная стадия этой формы движения или кратковременный контакт пластинки с жидкостью. Решение ищется в форме интегрального оператора типа потенциала простого слоя, распределенного по проекции пластинки на невозмущенную свободную поверхность. Интегральное уравнение задачи после ряда преобразований сводится к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода типа свертки с периодическим ядром, для которого ранее в [1] найден обратный оператор.

Рассмотрим плоскую линейную задачу о развитии волн на свободной поверхности тяжелой идеальной жидкости, занимающей всю нижнюю полуплоскость, после удара и несимметричного погружения плоской пластинки. Ось x совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, ось y направлена вертикально вверх. В момент времени $t = 0$ пластинка находится на невозмущенной поверхности жидкости, координаты ее концов $-a_0$ и a_0. Начиная с момента времени $t = 0$ пластинка погружается, имея составляющие скорости движения по осям координат $U = dx_0/dt$, $V = dy_0/dt$ и угловую скорость вращения $\omega = d\varphi/dt$, где x_0, y_0 – координаты центра пластинки, φ – мгновенный угол между пластинкой и осью x. В любой момент времени положение пластинки в неподвижной системе координат xy задается уравнением

$$y - f(x, t) = 0$$
$$f(x, t) = y_0(t) + (x - x_0(t))\,\mathrm{tg}\,\varphi(t) \qquad (1)$$

Положения концов пластинки, при этом определяются зависимостями $A(t) = x_0(t) - a$; $B(t) = x_0(t) + a$, $a = a_0 \cos \varphi(t)$.

В задаче об ударе пластинки, форма движения которой определяется уравнением (1), предположение об отсутствии отрыва жидкости в момент, следующий после удара при $U \neq 0$, может привести к решению, недопустимому физически [2]. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $U = 0$.

Рассмотрим начальную стадию погружения пластинки, когда отклонение ее от свободной поверхности мало. Движение жидкости, возникающее при этом, потенциально [2]. Пусть $\Phi(x, y, t)$ – потенциал скорости абсолютного движения жидкости. Начально-краевая задача, описывающая такую форму движения, имеет вид

$$\Delta\Phi = 0, \quad X \in \Omega$$
$$y = 0: \quad \Phi_t + g\eta = P(x, t), \quad A \leqslant x \leqslant B$$
$$\Phi_t + g\eta = 0, \quad x < A, \quad x > B; \quad \Phi_y - \eta_t = 0 \qquad (2)$$
$$\nabla\Phi \to 0, \quad y \to -\infty$$
$$\Phi(x, 0, 0) = \Phi_0; \quad \Phi_t(x, 0, 0) = \Phi_{0t}$$

Здесь Ω – область, занятая жидкостью, g – ускорение силы тяжести, $P(x, t)$ – давление, возникающее на пластинке, отнесенное к плотности жидкости ρ, $\eta = f(x, t)$ – отстояние точек на пластинке от невозмущенной поверхности жидкости (если $A \leqslant x \leqslant B$), $\eta = \eta^{\circ}(x, t)$ – отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня (высота волны, если $x < A$ либо $x > B$).

В (2) f, Φ_0 и Φ_{0t} считаются известными, Φ, η^0 и P необходимо найти.

Будем искать решение в классе функций с конечной нормой [3, 4]

$$\|\Phi\|_{W(\Omega)} = \left[\int\limits_{\partial\Omega} |\Phi|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla\Phi|^2 \, dX \right]^{1/2} \tag{3}$$

Фундаментальное решение краевой задачи с условиями из (2) имеет вид [4]

$$G = \frac{q(t)}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r} - \ln\frac{1}{r_1}\right] + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{g}{|m|}}\, e^{|m|y - ixm} \times$$

$$\times \int\limits_0^t q(\tau) e^{|m|\eta(\tau) + im\xi(\tau)} \sin\left(\sqrt{g|m|}\,(t-\tau)\right) d\tau dm \tag{4}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}; \quad r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}$$

Будем искать решение задачи в форме интегрального оператора типа потенциала простого слоя, распределенного на проекции пластинки на ось x

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_A^B q(\xi, t) G(x, \xi, y, 0, t)\, d\xi \tag{5}$$

Интегральное уравнение задачи может быть получено, если в граничном условии в (2) взять функцию Φ по (5) с учетом (4)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \int\limits_{A(\tau)}^{B(\tau)} q(\xi, t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g|m|}\, e^{-im(x-\xi)} \sin\left(\sqrt{g|m|}(t-\tau)\right) dm d\tau d\xi = f_t(x, t) \tag{6}$$

Предполагая, что функции $q(\xi, t)$ и $f_t(x, t)$ допускают Фурье-преобразование по координате x, (6) можно свести к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода типа свертки с периодическим ядром, решение которого дает лемма 3.1 из [1]. Используя эту лемму и свойства преобразований Фурье, получим

$$q(x, t) = f_t(x, t) + \frac{1}{g}\int\limits_{(x)} \frac{dx}{\sqrt{(x-A)(B-x)}} \left\{ \frac{1}{\pi}\int\limits_{A(t)}^{B(t)} \frac{\sqrt{(\xi - A)(B-\xi)}}{\xi - x} [f_{ttt}(\xi, t) + \right.$$

$$\left. + f_{tt}(\xi, 0)\delta_+(t) + f_t(\xi, 0)\delta'_+(t)] d\xi + C_1 \right\} + C_2 \tag{7}$$

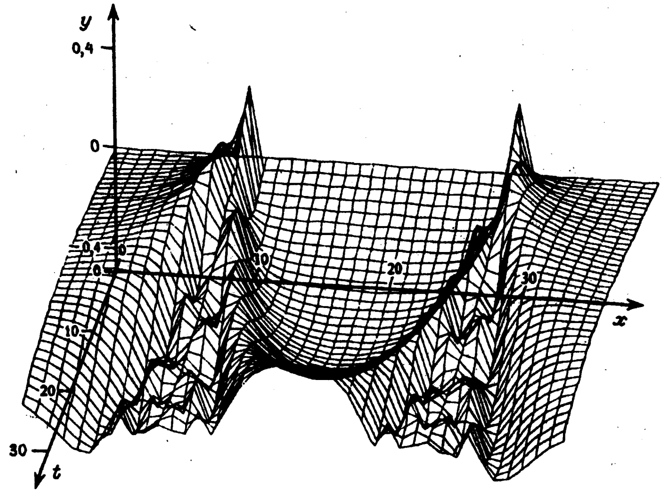
Здесь $\delta_+(t)$, $\delta'_+(t)$ – асимметричная δ-функция Дирака и ее производная, C_1, C_2 – постоянные, которые необходимо определить по начальным условиям.

Если рассматривать задачу о несимметричном ударе по пластинке, находящейся на невозмущенной поверхности жидкости (несимметричный шлепок), то решение ее также дают формулы (5) и (7), причем в (7) в интегральном члене следует оставить только составляющие с δ-функциями Дирака.

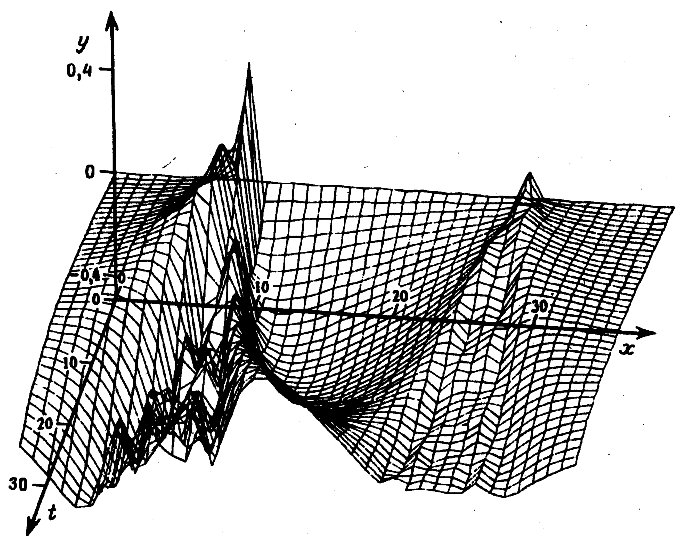
Возьмем в дальнейшем для определенности форму движения пластинки в виде $y_0(t) = -Vt$, $\varphi(t) = \omega t$, $\omega t \leqslant \pi/2$. Тогда из (1) имеем

$$f_t(x, t) = -V + A_1(t)x; \quad f_{tt}(x, t) = A_2(t)x; \quad f_{ttt} = A_3(t)x$$

$$A_1(t) = \frac{\omega}{\cos^2(\omega t)}; \quad A_2(t) = \frac{2\omega^2 \operatorname{tg}(\omega t)}{\cos^2(\omega t)}; \quad A_3(t) = 2\omega^3\left(\frac{1}{\cos^4(\omega t)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\omega t)}{\cos^2(\omega t)}\right) \tag{8}$$



Фиг. 1. Форма волновой поверхности после симметричного шлепка пластинки, $\omega = 0$, $a_0 = 1$, $V = -1$. Масштабы осей x и y (в долях a_0) 10 : 1 и 1 : 1, шкалы t 40 : 1



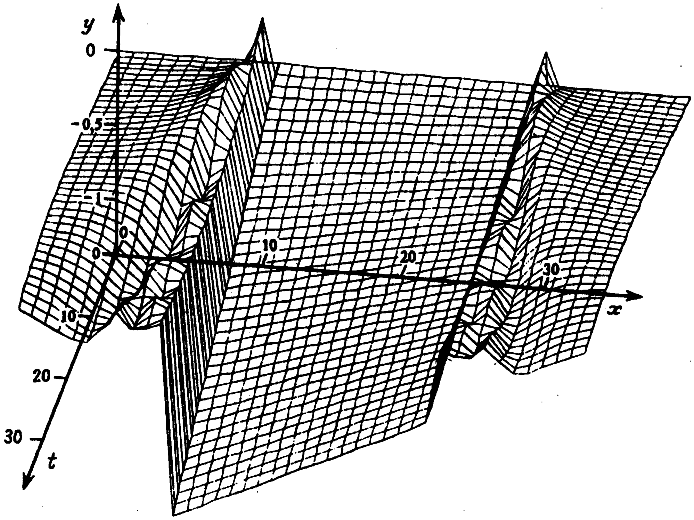
Фиг. 2. Форма волновой поверхности после несимметричного шлепка пластинки, $\omega = 2$. Остальные параметры такие же, как на фиг. 1

Подставляя (8) в (7), получим

$$q(x,t) = -V + A_1 x + \frac{1}{2g}\sqrt{a^2 - x^2}\,[x(A_3 + A_2\delta_+(t) + A_1\delta'_+(t)) -$$

$$-2V\delta'_+(t)] + \frac{1}{g}C_1 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C_2 \qquad (9)$$

По неоднородным начальным условиям, в которых $\Phi(x, 0, 0) = \Phi_0$, где Φ_0 – решение Л.И. Седова задачи при $t = 0$ [2], а $\Phi_t(x, 0, 0) = 0$ (при $t = 0$ свободная поверхность не возмущена), найдем, что $C_1 = C_2 = 0$.



Фиг. 3. Форма волновой поверхности после несимметричного удара и погружения пластинки, $\omega = 0{,}4$. Остальные параметры такие же, как на фиг. 1, 2

Форма свободной поверхности после удара и начала движения определяется из условия в (2). Подставляя (9) в (5), где учтена зависимость (4), и взяв производную по времени, получим после вычисления некоторых интегралов

$$\eta^{\circ}(x,t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{[\pi V a_0 \cos(mx) J_1(a_0 m) - \omega a_0^2 \sin(mx) J_2(a_0 m)]\frac{\sin(\sqrt{gm}\,t)}{\sqrt{gm}} - \right.$$
$$-\int\limits_0^t \left[2V\frac{\sin(a_0 m\cos(\omega\tau))}{m}\cos(mx) + \left[\frac{2\omega}{\cos^2(\omega\tau)}(a_0\cos(\omega\tau)\cos(a_0 m\cos(\omega\tau)) - \right.\right. \tag{10}$$
$$-\frac{1}{m}\sin(a_0 m\cos(\omega\tau))) + \frac{2\pi}{g}\omega^3 a_0^2\left(\frac{2}{\cos^2(\omega\tau)} - 1\right)\times$$
$$\left.\left.\left.\times J_2(a_0 m\cos(\omega\tau))\right]\frac{\sin(mx)}{m}\right]\cos(\sqrt{gm}\,(t-\tau))\,d\tau\right\}dm$$

Здесь $J_1(\cdot)$, $J_2(\cdot)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го порядков.

В случае несимметричного шлепка в (10) следует в подынтегральной функции опустить внутренний интеграл по τ. По формуле (10) были выполнены расчеты формы свободной поверхности после несимметричного шлепка пластины, параметры движения которой определялись величинами $a_0 = 1$; $|V| = 1$; $\omega = 0$; 2; $0 \leqslant t \leqslant 1$. Получившаяся форма свободной поверхности в координатах x, t представлена на фиг. 1, 2. Если рассматривать глиссирование плоской поверхности с шириной на транце $2a_0$ как непрерывную последовательность шлепков, то результат, представленный на фиг. 1 и 2, можно рассматривать как схему формирования волнового следа за глиссирующей поверхностью. Из этих рисунков видно, как формируется волновой гребень в диаметральной плоскости и волновые валики от кромок пластинки. Фигура 2 дает волновую систему после удара при наличии угловой скорости, что характерно при движении глиссирующей поверхности на циркуляции. На фиг. 3 изображен рельеф свободной поверхности по тем же координатам после удара и погружения плоской пластинки с указанными выше параметрами для $\omega = 0{,}4$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Видно, что во все время погружения с кромок пластинки сходят брызговые струи, которые с некоторого момента времени формируют волновые валики, отходящие от пластинки.

Заключение. В рамках линейной модели удается описать характер волнообразования после несимметричного удара по пластинке, плавающей на свободной поверхности тяжелой жидкости, и выявить влияние вращения пластинки на форму волновых систем с различных ее сторон. Решение может быть полезным при использовании в нестационарной аналогии установившегося глиссирования несущих поверхностей, так как просто может быть обобщено на задачу об ударе слабоискривленных контуров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов Н.Г., Орлов Ю.Ф., Черепенников В.Б., Шлаустас Р.Ю.* Регулярные асимптотические алгоритмы в механике. Новосибирск: Наука, 1989. 273 с.
2. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
3. *Garipov R.M.* On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness // Arch. Rat. Mech. 1967. V. 24. № 5. P. 352–362.
4. *Кузнецов Н.Г., Мазья В.Г.* Асимптотические разложения для поверхностных волн, вызванных кратковременными возмущениями // Асимптотические методы. Прикладные задачи механики. Новосибирск: Наука, 1986. С. 103–138.

Иркутск

Поступила в редакцию
23.IV.1998