

УДК 533.6.011.72:533.7

© 1999 г. О.Г. БУЗЫКИН, В.С. ГАЛКИН, А.Е. ЕРОФЕЕВ, **В.И. НОСИК**

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

На базе уравнений газодинамики в барнеттовом и супербарнеттовом приближениях разработана приближенная математическая модель структуры сильной ударной волны в одноатомном газе. Результаты расчетов профилей температуры и плотности в основной зоне структуры волны практически совпадают с результатами решения уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования.

Метод Чепмена – Энскога решения кинетических уравнений при числах Кнудсена $Kn \ll 1$ является наиболее известным общим методом вывода не только структуры макроскопических моделей, но и получения входящих в них коэффициентов переноса. Общность его результатов определяется тем, что он относится к весьма "продвинутому" нелинейным методам теории возмущений – методу сокращения информации [1]. Характерным его признаком является то, что частные производные по времени представляются некоторыми рядами по Kn с использованием макроскопических законов сохранения.

Подобные методы позволяют получить единые "композитные" результаты, справедливые в гораздо более широком диапазоне определяющих параметров, чем "рафинированные" асимптотические разложения по Kn , например даваемые методом сращиваемых асимптотических разложений. Известным примером "композитного" подхода являются уравнения Навье – Стокса, получаемые во втором приближении метода Чепмена – Энскога, которые имеют неожиданно широкую область применимости по Kn и дают, в частности, единое описание всего поля течения около обтекаемого тела при больших числах Рейнольдса.

Следствием третьего приближения метода Чепмена – Энскога являются уравнения Барнетта. В ряде задач, например в задаче о структуре сильной ударной волны или в задаче о распространении ультразвука, они существенно расширяют область макроскопического описания. Однако в этих, как и в других задачах, проявляются принципиальные недостатки высших приближений метода Чепмена – Энскога – плата за "композитность" метода, связанная с увеличением порядка системы по сравнению с системой уравнений Навье – Стокса (проблема дополнительных граничных условий, неустойчивость к коротковолновым возмущениям [2, 3–5 и др.]).

Поэтому возникает вопрос о модификациях уравнений Барнетта. Известны попытки введения дополнительных внепорядковых по Kn членов, однако при этом усугубляется проблема дополнительных граничных условий [3]. Простейшим выходом из ситуации был бы отказ от метода Чепмена – Энскога в пользу модифицированного метода Гильберта. Однако для ударной волны последний применим только для слабых ударных волн, а в задаче о распространении ультразвука имеет гораздо меньшую область применимости по Kn [4]. Поэтому в работах [4, 5] был поставлен вопрос о модификациях уравнений Барнетта, в которых без потери точности отсутствуют указанные выше принципиальные дефекты.

В [5] для нелинейных задач было предложено применять неоднородные усеченные

уравнения Барнетта. Однородный оператор имеет тот же порядок, что и у системы Навье – Стокса, а при малых отклонениях от равновесия он совпадает с последним. Поэтому, как и для уравнений Навье – Стокса, нет необходимости ставить дополнительные граничные условия, а коротковолновая неустойчивость [2] отсутствует. Для задачи о структуре сильной ударной волны результаты расчетов с использованием полной и неоднородной усеченной системы уравнений Барнетта близки.

В работе [5] рассматривались "мягкие" межмолекулярные потенциалы, в основном максвелловские молекулы. В данной работе предлагается расширить анализ для произвольного степенного потенциала, в частности рассмотреть предельный случай молекул – упругих сфер с целью оценки влияния вида межмолекулярного потенциала.

Основной целью работы является построение на базе барнеттова и супербарнеттова приближений макроскопической модели структуры сильной ударной волны, точность которой при отсутствии принципиальных дефектов превосходила бы точность как полной, так и модифицированной [4, 5] систем уравнений Барнетта.

Кроме того, на основе анализа расчетных данных, полученных методом прямого статистического моделирования и при помощи предложенной макроскопической модели, рассмотрены некоторые вопросы гиперзвукового подобия.

1. Для одномерного стационарного течения одноатомного нейтрального газа запишем уравнения сохранения массы, импульса и энергии в дивергентном виде и проинтегрируем по координате x , направленной вдоль потока. Затем исключим напряжение p_{xx} из уравнения энергии с помощью уравнения импульса и выразим массовую плотность ρ через скорость $u \equiv u_x$. С учетом условий Гюгоньо получим систему

$$L_1(v, \tau) \equiv \frac{4}{3} \eta \frac{dv}{dz} - v - \frac{3}{5M_2^2} \frac{\tau}{v} + \left(1 + \frac{3}{5M_2^2}\right) = \sigma \quad (1.1)$$

$$L_2(v, \tau) \equiv \frac{9}{4M_2^2} \eta \frac{d\tau}{dz} - \frac{9}{10M_2^2} \tau + \frac{v^2}{2} - \left(1 + \frac{3}{5M_2^2}\right) v + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{M_2^2}\right) = \gamma \quad (1.2)$$

$$\eta = \frac{\mu}{\mu_2}, \quad \tau = \frac{T}{T_2}, \quad z = \frac{x}{l_2}, \quad v = \frac{u}{u_2}, \quad l_2 = \frac{\mu_2}{\rho_2 u_2}, \quad M_2 = \frac{u_2}{\sqrt{5/3 RT_2}}$$

$$\sigma = \frac{p_{xx} - p_{xx}^{(1)}}{\rho_2 u_2^2}, \quad \gamma = \frac{q_x - q_x^{(1)}}{\rho_2 u_2^3}$$

Здесь T – температура, R – газовая постоянная, $p_{xx}^{(1)}$, $q_x^{(1)}$ – значения компонентов тензора напряжения и вектора теплового потока в приближении Навье – Стокса, число Маха M и газодинамические переменные за ударной волной ($x = \infty$) обозначены нижним индексом 2, перед ударной волной ($x = -\infty$) – нижним индексом 1.

Полагая в (1.1), (1.2) $\sigma = 0$, $\gamma = 0$, получим систему уравнений в приближении Навье – Стокса $L_1(v, \tau) = 0$, $L_2(v, \tau) = 0$.

В приближении Барнетта $p_{xx}^{(2)} \equiv p_{xx} - p_{xx}^{(1)}$; $q_x^{(2)} \equiv q_x - q_x^{(1)}$. Используя результаты [6] для $p_{xx}^{(2)}$, $q_x^{(2)}$, приведем σ , γ к виду

$$\sigma = \eta^2 v \left\{ \omega_1 \frac{5M_2^2}{3\tau} v'^2 + \omega_2 \frac{\tau''}{\tau} + \omega_3 \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 + \omega_4 \left[2\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \frac{v''}{v} \right] + \omega_5 \left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \omega_6 \frac{v' \tau'}{v\tau} \right\} \quad (1.3)$$

$$\gamma = \eta^2 v \left(\gamma_1 v' \frac{\tau'}{\tau} + \gamma_2 v'' - \gamma_3 \frac{v'^2}{v} \right), \quad ()' = \frac{d}{dz}$$

$$\omega_1 = 2/3(K_1 - 1/3 K_2 + 1/3 K_6), \quad \omega_2 = 2/3(K_3 - K_2), \quad \omega_3 = 2/3(K_4 + K_5)$$

$$\omega_4 = -\frac{2}{3}K_2, \quad \omega_5 = \frac{2}{3}K_2, \quad \omega_6 = \frac{2}{3}(K_4 - K_2) \quad (1.4)$$

$$\gamma_1 = \theta_1 + \frac{2}{3}(4\theta_2 + \theta_3 + \theta_5), \quad \gamma_2 = \frac{2}{3}(\theta_2 + \theta_4), \quad \gamma_3 = \frac{2}{3}\theta_3$$

Подчеркнем, что слагаемое с коэффициентом ω_4 пропорционально $\partial^2\rho/\partial x^2$. Используя в (1.4) обычно применяемые выражения для $K_n, \theta_m, n = 1-6, m = 1-5$ [6], запишем

$$\omega_1 = (2 - \Theta)\frac{2}{3}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3}, \quad \omega_3 = 2\Theta, \quad \omega_4 = -\omega_5 = \omega_6 = -\frac{4}{3} \quad (1.5)$$

$$\gamma_1 = \frac{109}{8} - \frac{7}{4}\Theta, \quad \gamma_2 = -\frac{7}{4}, \quad \gamma_3 = -2, \quad \Theta = \frac{T}{\mu} \frac{d\mu}{dT}$$

В (1.5) зависимость от вида межмолекулярного потенциала проявляется через Θ . В случае максвелловских молекул ($\Theta = 1$) формулы (1.5) будут точными. По мере увеличения жесткости межмолекулярного взаимодействия точность (1.5) ухудшается. Для предельного случая молекул – упругих сфер ($\Theta = \frac{1}{2}$) имеются [6] более точные, чем (1.5), выражения

$$\omega_1 = 0,899 \times \frac{4}{3}, \quad \omega_2 = 0,390 \times \frac{2}{3}, \quad \omega_3 = 0,6, \quad \omega_4 = -\omega_5 = -1,014 \times \frac{4}{3} \quad (1.6)$$

$$\omega_6 = -0,674 \times \frac{4}{3}, \quad \gamma_1 = 0,849 \times \frac{5}{4}, \quad \gamma_2 = -1,297 \times \frac{7}{4}, \quad \gamma_3 = -1,030 \times 2$$

Вторые сомножители в (1.6) получены из (1.5) при $\Theta = \frac{1}{2}$, первые – характеризуют отличие приближенных значений (1.5) от более точных для молекул – упругих сфер. Сравнение результатов, полученных с использованием (1.5) и (1.6), определит меру неточности (1.5) для таких молекул.

В [5] проведен анализ точности различных модификаций системы уравнений Барнетта для задачи о структуре ударной волны произвольной интенсивности, свободных от принципиальных дефектов полной системы, для "мягких" межмолекулярных потенциалов с использованием (1.5). Было показано, что для данной задачи наилучшие результаты дает система неоднородных усеченных уравнений Барнетта

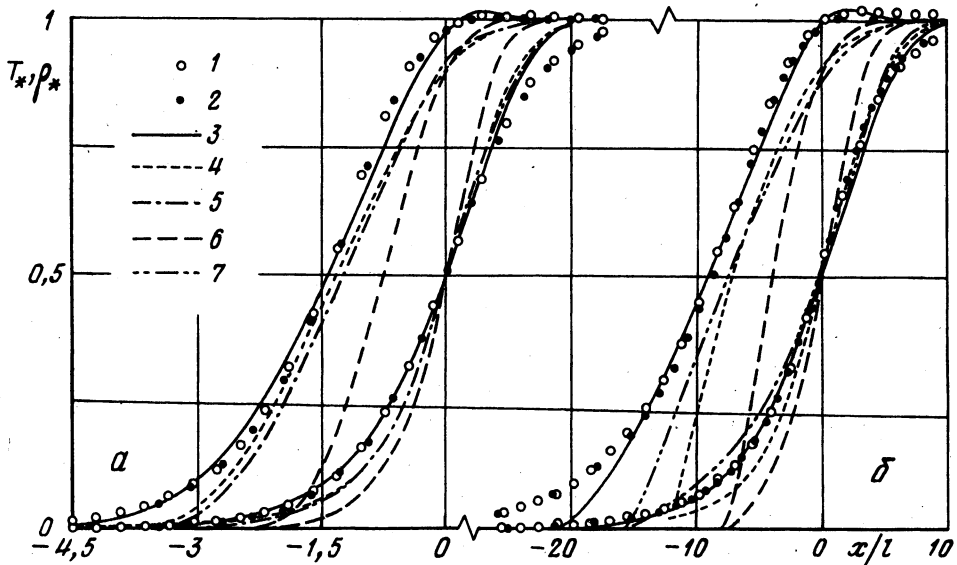
$$L_1(u, \tau) - \eta^2 v \left[\omega_1 \frac{5M_2^2}{3\tau} v'^2 + \omega_5 \left(\frac{v'}{v} \right)^2 - \omega_6 \frac{v' \tau'}{\tau} \right] = \quad (1.7)$$

$$= \eta_0^2 v_0 \left\{ \omega_2 \frac{\tau_0''}{\tau_0} + \omega_3 \left(\frac{\tau_0'}{\tau_0} \right)^2 + \omega_4 \left[2 \left(\frac{v_0'}{v_0} \right)^2 - \frac{v_0''}{v_0} \right] \right\}$$

$$L_2(u, \tau) - \eta^2 v \left(\gamma_1 v' \frac{\tau'}{\tau} - \gamma_3 \frac{v'^2}{v} \right) = \eta_0^2 v_0 \gamma_2 v_0''$$

В неоднородных уравнениях (1.7) правые части вычисляются при помощи усеченных уравнений Барнетта, т.е. из (1.7) с опущенными правыми частями. Важно, что в неоднородную часть входят все барнеттовы слагаемые, содержащие старшие производные. При получении (1.7) в исходных выражениях для барнеттова тензора напряжений и вектора потока тепла [6] производные от давления выражены через производные от плотности и температуры. В неоднородную часть первого уравнения (1.7) включены слагаемые, пропорциональные T'' и ρ'' (с коэффициентами ω_2 и ω_4 соответственно), а также с T^2 .

Представляет интерес апробация (1.7) для предельного случая жестких потенциалов: для молекул – упругих сфер. Как эталонное решение использовалось решение уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования (известно, что такое решение хорошо согласуется с экспериментальными данными). Ввиду недостаточности опубликованных данных была проведена серия расчетов при $M_1 = 5-50$.



Фиг. 1. Профили приведенных температуры T_* (левый пучок кривых) и плотности ρ_* (правый пучок кривых) в ударной волне при $M_1 = 11$ (a – молекулы – упругие сферы, b – максвелловские молекулы); 1, 2 – расчеты методом прямого статистического моделирования данной работы и работы [12] соответственно; 3 – решение для макроскопической модели (2.5); 4, 5 – решение усеченных неоднородных уравнений Барнетта с коэффициентами (1.5), (1.6) соответственно, 6 – решение уравнений Навье – Стокса; 7 – решение приближенных уравнений [12]

Задача решалась методом [7], в котором столкновения частиц проводились на основе принципа мажорантной частоты [8]. Расчетная область разбивалась на ячейки одинакового размера h , определяемого из условия $h = l_{\min}/C$, где l_{\min} – минимальная средняя длина свободного пробега молекул в области течения, C – параметр. На основе результатов работы [9] и на тестовых расчетах, величина C принималась равной 4 или 8. Расчет строился таким образом, чтобы в области течения находилось постоянное число молекул, а ударная волна располагалась примерно в центре расчетной области. Чтобы исключить влияние возможного дрейфа положения волны, использовался алгоритм счета по сериям, в каждой из которых дрейф волны был малым. Результаты расчетов по сериям затем усреднялись, при этом в качестве начала отсчета принималось положение точки профиля плотности газа, в котором нормированная плотность равнялась 0,5. Рассматривался одноатомный газ, взаимодействие молекул в котором определялось на основе модели сфер переменного диаметра [10, 11]. Размер расчетной области изменялся при изменении параметров межмолекулярного взаимодействия и на основе тестовых расчетов принимался равным $15l$ для молекул – упругих сфер и от $100l$ до $500l$, в зависимости от числа Маха, для максвелловских сфер. Число молекул в ячейке в невозмущенной области течения принималось равным 20–30.

Зависимости от x/l величин

$$T_* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \quad \rho_* = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad l = \frac{16\mu_1}{5\rho_1\sqrt{2\pi RT_1}} \quad (1.8)$$

при $M_1 = 11$ приведены на фиг. 1. Сравнение полученных результатов с результатами [12] показывает их хорошее согласие. Небольшие отличия объясняются качеством воспроизведения и обработки данных работы [12].

Как и для "мягких" потенциалов, результаты решения уравнений (1.7) для молекул – упругих сфер близки к результатам решения системы уравнений Барнетта [12]. Согласие с результатами решения методом прямого статистического моделирования лучше, чем в случае максвелловских молекул (фиг. 1, б). Объясняется это тем, что для

жестких межмолекулярных потенциалов значительно меньше выражены характерные для максвелловских молекул передние "крылья" профилей T_* , ρ_* .

На фиг. 1, а представлены также результаты решения системы (1.7) с использованием как приближенных (1.5), так и более точных (1.6) значений барнеттовых коэффициентов переноса для молекул – упругих сфер (кривые 4, 5 соответственно). Для профиля плотности результаты применения (1.5) или (1.6) практически неразличимы. В случае профиля температуры результаты использования (1.6) ближе к результатам метода прямого статистического моделирования, чем (1.5). Не очень сильное влияние коэффициентов переноса на профили макропараметров в рассматриваемой задаче позволяет надеяться, что в общем случае реальных, менее жестких межмолекулярных потенциалов обычно используемое приближение (1.5) будет давать приемлемую точность.

2. Успех модификации (1.7) уравнений Барнетта позволяет продолжить поиск макроскопических моделей, обеспечивающих еще более высокую точность расчета структуры сильных ударных волн. При этом желательно, чтобы модель была не только точна, но и не громоздка. Новая модель может быть в принципе получена с помощью выхода за рамки уравнений Барнетта путем отбрасывания ряда членов и добавления новых слагаемых супербарнеттова типа. Попытка такого рода делалась в [12].

Вклад супербарнеттова приближения в напряжение и тепловой поток дается весьма громоздкими выражениями

$$p_{xx}^{(3)} = \frac{\mu^3 R}{3\rho^2 \rho l_2^3} \left[47T'\rho'u' - 40\frac{T}{\rho}\rho'^2u' + 32T\rho''u' - 2T\rho'u'' - 21\frac{\rho}{T}T'^2u' - \frac{\rho}{3} \left(47u''T' + 31u'T'' - 2Tu''' - \frac{16}{3R}u'^3 \right) \right] \quad (2.1)$$

$$q_x^{(3)} = \frac{\mu^3}{21\rho\rho l_2^3} \left[-\frac{9005}{8T}T'u'^2 + \frac{271}{\rho}\rho'u'^2 + \frac{421}{2}u'u'' + \frac{21R}{16\rho} \left(\frac{1834}{T}\rho'T'^2 - \frac{1137}{\rho}T'\rho'^2 + 701T'\rho'' + 397\rho'T'' - 813\frac{\rho}{T^2}T'^3 - 1451\frac{\rho}{T}T'T'' - 157\rho T''' - 82\frac{T}{\rho}\rho'\rho'' - 10T\rho''' + 92\frac{T}{\rho^2}\rho'^3 \right) \right] \quad (2.2)$$

Коэффициенты в этих выражениях в явном виде известны только для максвелловских молекул (см. [13], где исправлены ошибки предыдущих работ).

Был проведен расчет вклада различных слагаемых барнеттова и супербарнеттова приближений в решение. Предварительный отбор оставляемых членов проводился на основе вычислений относительных вкладов всех барнеттовых и супербарнеттовых слагаемых, рассчитанных на сглаженных профилях плотности и температуры, полученных методом прямого статистического моделирования. На следующем этапе проводился подбор коэффициентов при оставленных членах. Оказалось, что при уточнении решения в центральных участках профиля, как правило, теряется точность на "крыльях" профилей. Особенно трудно описать переднюю зону скачка в газе максвелловских молекул. Учет только барнеттовых коэффициентов и их изменение в разумных пределах не дает возможности описания указанной зоны, однако добавление супербарнеттовых слагаемых существенно, в 2 раза, улучшает оценку протяженности этой зоны.

Подбор коэффициентов при оставленных членах σ и γ проводился по наилучшему приближению профилей макропараметров к полученным методом прямого статистического моделирования. В результате приемлемую точность можно получить,

учитывая следующие слагаемые в σ и γ :

$$\sigma = \frac{\mu^2}{\rho\rho_2 u_2^2 l_2^2} \left(\alpha_1 u'^2 + \alpha_2 \frac{\mu R}{\rho l_2} T' \rho' u' \right) \quad (2.3)$$

$$\gamma = \frac{\mu^2}{\rho\rho_2 u_2^3 l_2^2} \left(\beta_1 \frac{u' T'}{T} + \beta_2 u'' - \beta_3 \frac{\mu R}{\rho T^2 l_2} T'^3 \right)$$

Для коэффициентов α_i, β_i на основе сравнения расчетных данных с результатами применения метода прямого статистического моделирования рекомендуются следующие значения для максвелловских молекул и для молекул – упругих сфер соответственно:

$$\alpha_1 = 4\omega_1, \quad \alpha_2 = 1,25 \times 47/3, \quad \beta_1 = 0,75\gamma_1, \quad \beta_2 = 3\gamma_2, \quad \beta_3 = 1,00 \times 813/16 \quad (2.4)$$

$$\alpha_1 = 4\omega_1, \quad \alpha_2 = 1,75 \times 47/3, \quad \beta_1 = 0,75\gamma_1, \quad \beta_2 = 3\gamma_2, \quad \beta_3 = 0,15 \times 813/16$$

В (2.4) коэффициенты $\omega_1, \gamma_1, \gamma_2$ рассчитываются по формулам (1.5). Большое различие коэффициентов в β_3 объясняется сильным влиянием члена, пропорционального кубу первой производной от температуры, на решение в передней зоне. Напомним, что коэффициенты супербарнеттова приближения (2.1), (2.2) известны только для максвелловских молекул. В формулах (2.4) отличаются только коэффициенты именно при супербарнеттовых членах.

Таким образом, с учетом (2.3), (2.4) вместо (1.7) в безразмерных переменных будем иметь следующую неоднородную систему:

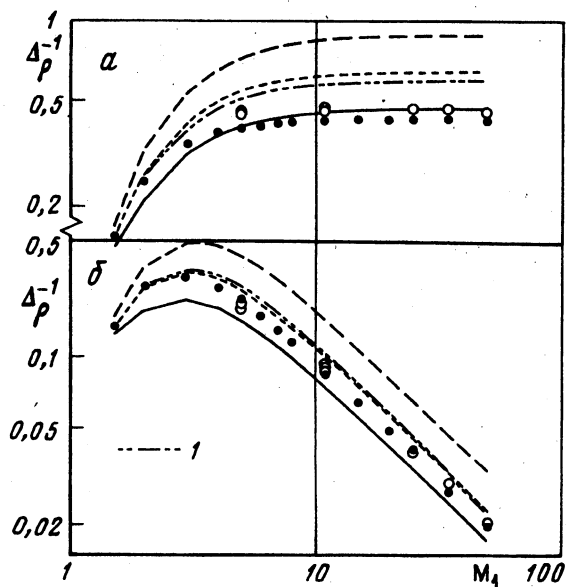
$$L_1(\nu, \tau) - \frac{5}{3} M_2^2 \frac{\eta^2 \nu}{\tau} \left(\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\eta \tau'}{\tau \nu^2} \right) \nu'^2 = 0 \quad (2.5)$$

$$L_2(\nu, \tau) - \frac{\eta^2 \nu}{\tau} \left(\beta_1 \nu' \tau' - \beta_3 \frac{\nu \eta}{\tau^2} \tau'^3 \right) = \eta_0^2 \nu_0 \beta_2 \nu_2''$$

Операторы L_1, L_2 определены в (1.1), (1.2), а η_0, ν_0 рассчитываются при помощи однородной системы, т.е. (2.5) без правой части. Аналогично (1.7) система (2.5) имеет тот же порядок, что и система Навье – Стокса, она устойчива к коротковолновым возмущениям. В то же время она гораздо менее громоздка, но в левой части нелинейность усиливается. При решении (2.5) применялась методика [5].

Точность (2.5) иллюстрируется на фиг. 1. Результаты (2.5) кардинально уточняют результаты (1.7), особенно в передней зоне профиля температуры. В центральных и задних участках профилей они практически совпадают с решением уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования. Недостатком является заброс профилей выше $T_* = 1$, однако он практически не превышает аналогичной особенности в поведении решения методом прямого статистического моделирования. Попытки ликвидации этих забросов приводят к ухудшению точности модели в центральной зоне ударной волны. Предложенная в [12] модификация (кривая 7 на фиг. 1, б) дает заметно худшее приближение к решению уравнения Больцмана, как и полная система уравнений Барнетта.

Модель (2.5) предназначена для больших чисел Маха. При $M_1 \approx 5$ модель дает неплохие результаты, с ростом числа Маха ее точность растет. Приближение (2.5) значительно лучше согласуется с результатами метода прямого статистического моделирования, чем результаты решения (1.7) или полной системы уравнений Барнетта в диапазоне $M_1 = 5-50$.



Фиг. 2. Зависимости безразмерной обратной толщины ударной волны Δp^{-1} от числа M_1 (*a* – молекулы – упругие сферы, *б* – максвелловские молекулы), *1* – решение уравнений Барнетта [12]. Остальные обозначения см. на фиг. 1

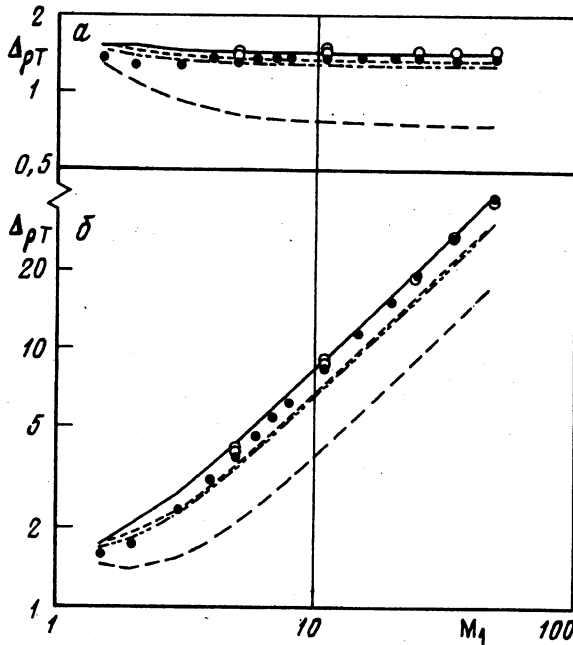
Характерной особенностью данной модели, как и модификации (1.7), является наличие крутого переднего фронта ударной волны. В то же время результаты метода прямого статистического моделирования показывают, что вместо этого фронта имеется пологое переднее "крыло", особенно выраженное для максвелловских молекул. Его наличие имеет кинетический характер, так как обусловлено быстрыми молекулами. Поэтому данный эффект не может быть описан в рамках макроскопического описания, имеющего локальный характер.

На фиг. 2 приведены зависимости от M_1 величины $\Delta p = \delta/l$, где δ – толщина ударной волны, определенная по максимуму производной ρ' (средняя длина свободного пробега l определена в (1.8)). В целом результаты применения модели (2.5) значительно ближе к результатам метода прямого статистического моделирования, чем результаты решения (1.7) и тем более уравнений Навье – Стокса.

Аналогичный вывод справедлив и для другого важного параметра – отнесенного к l расстояния между профилями приведенной плотности и температуры Δ_{pT} . Зависимости Δ_{pT} от M_1 приведены на фиг. 3. Для молекул – упругих сфер значения, даваемые методом прямого статистического моделирования и системами уравнений (1.7) и (2.5), практически постоянны при $M_1 > 5$.

Подчеркнем, что на фиг. 2, 3 в случае молекул – упругих сфер для модификации (1.7) использовалось приближение (1.5). Как отмечалось выше, модель (2.5), как и модификация (1.7), дает более точные результаты в случае молекул – упругих сфер, чем в случае максвелловских молекул. Поскольку реальные межмолекулярные потенциалы обладают характеристиками, промежуточными между этими предельными случаями, для реальных межмолекулярных потенциалов точность макроскопической модели (2.5) должна быть выше, чем для максвелловских молекул.

3. Модель (2.5) и результаты расчетов методом прямого статистического моделирования были использованы для проверки условий гиперзвуковой стабилизации и приближенного правила пересчета структуры ударной волны для других межмолекулярных потенциалов.



Фиг. 3. Зависимости безразмерного расстояния $\Delta\rho T$ между профилями ρ_* и T_* от числа M_1 (a – молекулы – упругие сферы, δ – максвелловские молекулы). Обозначения см. на фиг. 2

Для молекул – упругих сфер при фиксированных ρ_1, T_1 для достаточно больших чисел M_1 профили макропараметров перестают зависеть от M_1 [14] (см. также фиг. 2, 3, a). Такой простой результат несправедлив для "мягких" потенциалов. Действительно толщина ударной волны δ порядка характерной средней длины свободного пробега внутри ударной волны

$$l_c \approx \frac{\mu_c}{\rho_c \sqrt{RT_c}}, \quad \mu_c = \mu(T_c)$$

Так как плотность меняется лишь в 6 раз, то можно положить $\rho_c \approx \rho_1$. В то же время T_c порядка температуры торможения. Для степенных межмолекулярных сил $F = r^\nu$, где r – расстояние между молекулами (для максвелловских молекул $\nu = 5$, для упругих сфер $\nu = \infty$), имеем

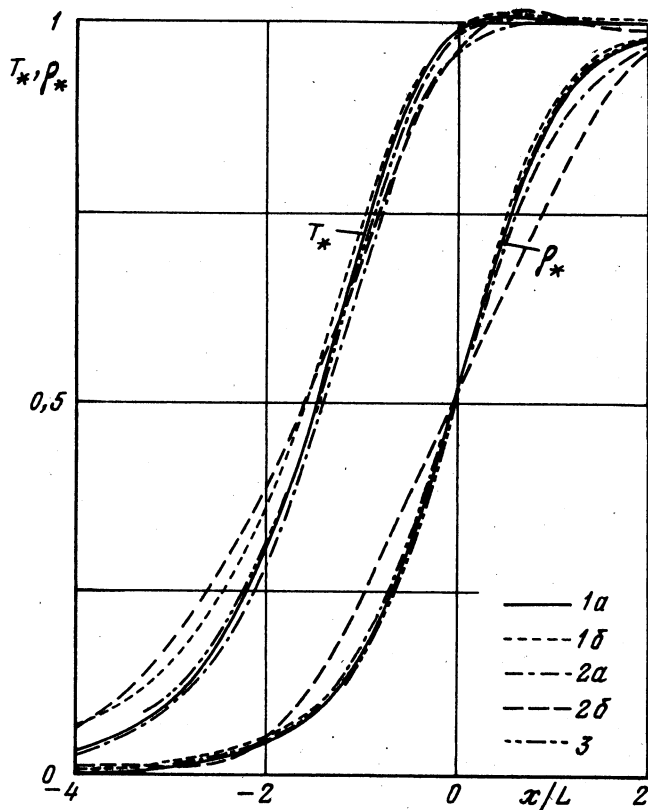
$$\frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^m, \quad m = \frac{1}{2} + \frac{2}{\nu-1}, \quad \frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{1}{3} M_1^2 \approx M_1^2$$

Поэтому для сильной ударной волны получим

$$\delta \approx l\alpha(\nu) M_1^{4/(\nu-1)} \quad (3.1)$$

Аналогичная оценка приведена, например, в [14]. В результате для максвелловских молекул толщина ударной волны δ пропорциональна M_1 .

Необходимо было проверить применимость закона (3.1) для профилей не только плотности [14], но и температуры и попытаться получить подходящее выражение для $\alpha(\nu)$. Расчетный анализ результатов, полученных методом прямого статистического моделирования, показал, что эффективным является применение следующего выра-



Фиг. 4. Сглаженные зависимости T_* и ρ_* от x/L , рассчитанные методом прямого статистического моделирования; 1 – $M_1 = 50$; 2 – $M_1 = 5$; (а – молекулы – упругие сферы, б – максвелловские молекулы), 3 – $M_1 = 11$, аргон ($\nu = 9$, [12])

жения для характерного масштаба структуры сильной ударной волны:

$$L = l \left(\frac{M_1}{M_*} \right)^{4/(\nu-1)}, \quad M_* \approx 2 \quad (3.2)$$

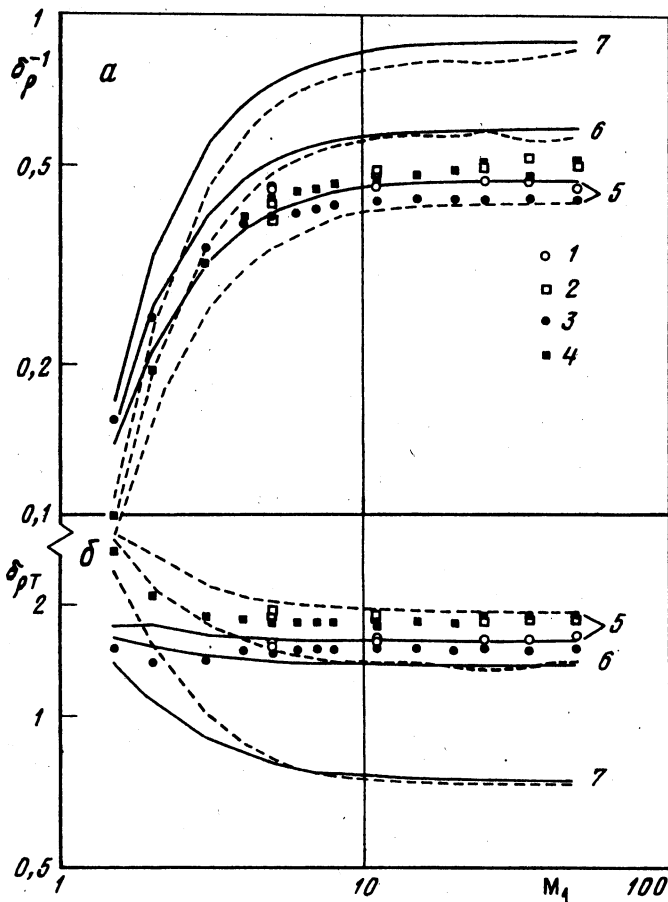
Для молекул – упругих сфер этот масштаб равен средней длине свободного пробега перед волной l .

Зависимость $\rho_*(x/L)$ (фиг. 4) при $M_1 \geq 10$ является практически универсальной для $\nu = 5, 9, \infty$ (расчетные данные для $\nu = 9$ заимствованы из [12]). Более того, в пределах разброса имеющихся данных можно считать универсальной и зависимость $T_*(x/L)$, причем кривые для $\nu = 9$ и $\nu = \infty$ практически совпадают. На фиг. 4 приведены лишь данные для $M_1 = 5$ и 50, так как при $M_1 = 11, 25, 35, 50$ кривые сливаются.

На фиг. 5 представлены зависимости от M_1 приведенных геометрических параметров структуры ударной волны

$$\delta_{\delta}^{-1} = \Delta_{\rho}^{-1} \left(\frac{L}{l} \right), \quad \delta_{\rho T} = \Delta_{\rho T} \left(\frac{l}{L} \right)$$

Из фиг. 4, 5 видно, что при $M_1 = 5$ законы гиперзвуковой стабилизации выполняются с заметной погрешностью. Для $M_1 \geq 8$ приведенные параметры структуры вол-



Фиг. 5. Зависимости приведенной обратной толщины ударной волны (а) и приведенного расстояния между профилями температуры и плотности (б) от числа Маха M_1 ; 1-4 – метод прямого статистического моделирования (1-2 – настоящая работа, 3-4 – работа [12]); 5 – макроскопическая модель (2.5); 6 – уравнения Барнетта [12]; 7 – уравнения Навье – Стокса (1, 3 и сплошные линии – молекулы – упругие сферы, 2, 4 и штриховые линии – максвелловские молекулы)

ны перестают зависеть от M_1 , что согласуется с выводами [14], сделанными для профиля ρ_* при $v = \infty$. Из сравнения данных на фиг. 2, 3 и 5 следует эффективность закона подобия, основанного на введении масштаба (3.2).

Заключение. Для газа из молекул – упругих сфер подтверждены выводы об эффективности системы усеченных неоднородных уравнений Барнетта, апробированной ранее для "мягких" межмолекулярных потенциалов [5]. Сравнение результатов позволяет сделать вывод, что для реальных межмолекулярных потенциалов приемлемую точность обеспечивают известные приближенные выражения барнеттовых коэффициентов переноса.

Предложена более точная, чем [5], макроскопическая модель структуры сильной ударной волны в одноатомном газе, основанная на модификации уравнений барнеттова и супербарнеттова приближений. Результаты расчета по предложенной макроскопической модели в пределах существующего разброса данных хорошо согласуются с результатами метода прямого статистического моделирования и значительно отли-

чаются от того, что дают уравнения Барнетта и тем более Навье – Стокса. Полученная система уравнений имеет такой же порядок, что и система уравнений Навье – Стокса, она устойчива к коротковолновым возмущениям. Точность полученной модели в диапазоне чисел Маха 5–50 практически совпадает с точностью решения уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования, за исключением переднего "крыла" профиля температуры. Поведение последнего определяется нелокальными эффектами, которые не могут быть строго описаны в рамках макроскопического подхода.

Показано, что для произвольных степенных межмолекулярных потенциалов при числах Маха набегающего потока более 8 имеет место подобие профилей приведенных плотности и температуры. Получено выражение для характерного масштаба структуры ударной волны, учитывающее различные степенные зависимости межмолекулярного потенциала, которое в сочетании с гиперзвуковой стабилизацией дает единый закон подобия.

Работа выполнена при финансовой поддержке российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01244 и грант поддержки ведущих научных школ 96-15-96063).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 255 с.
2. *Бобылев А.В.* О методах Чепмена – Энскога и Грэда решения уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 71–75.
3. *Галкин В.С., Шавалиев М.Ш.* Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена – Энскога // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 3–28.
4. *Галкин В.С., Носик В.И.* О модификации уравнений Барнетта на примере задачи о распространении звука // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 126–133.
5. *Бузыкин О.Г., Галкин В.С., Носик В.И.* Модификации уравнений Барнетта и задача о структуре ударной волны // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 164–176.
6. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
7. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.
8. *Иванов М.С., Рогозинский С.В.* Статистическое моделирование течений разреженного газа на основе принципа мажорантной частоты // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 2. С. 315–320.
9. *Ерофеев А.И.* Численное исследование влияния скорости вращательной релаксации на структуру ударной волны в азоте // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 4. С. 159–167.
10. *Власов В.И.* Расчет методом Монте-Карло потока тепла между параллельными пластинами в разреженном газе // Учен. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 4. С. 46–51.
11. *Ерофеев А.И.* О моделировании межмолекулярного взаимодействия при решении уравнения Больцмана методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 6. С. 171–175.
12. *Lumpkin F.E., Chapman D.R.* Accuracy of the Burnett equations for hypersonic real gas flows // AIAA Paper. 1991. № 0171. 17 p.
13. *Шавалиев М.Ш.* Супербарнеттовские поправки к тензору напряжений и тепловому потоку в газе из максвелловских молекул // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 168–171.
14. *Bird G.A.* Aspects of the structure of strong shock waves // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 5. P. 1172–1177.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1997