

УДК 532.526.4

© 1999 г. И.И. ВИГДОРОВИЧ

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ С ИНТЕНСИВНЫМ ОТСОСОМ

Исследована асимптотическая структура течения в турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости на плоской проницаемой пластине с распределенным отсосом. Установлен универсальный закон трения, справедливый во всем диапазоне параметров, вплоть до скоростей отсоса, вызывающих реламинаризацию пограничного слоя.

Особенностью турбулентных пристенных течений является наличие двух сильно различающихся характерных поперечных масштабов длины, один из которых связан с внешней областью пограничного слоя, а другой с вязким подслоем. Этот основополагающий факт используется при классическом анализе пристенной турбулентности методами теории размерности, результаты которого – известные соотношения подобия (см., например, [1]).

Другой, также весьма общий подход к аналитическому исследованию турбулентного пограничного слоя, учитывающий существование двух различных характерных масштабов или малого параметра в задаче, основан на применении (к уравнениям пограничного слоя или Рейнольдса) метода срачиваемых асимптотических разложений.

Этим методом в [2–4] без формулировки конкретных гипотез замыкания изучались общая асимптотическая структура пограничного слоя и характер разложений в различных областях. В [5] для замыкания уравнения импульсов использовалась алгебраическая модель турбулентной вязкости; в качестве параметра разложения выбрана обратная величина логарифма числа Рейнольдса. В [6–8], посвященных исследованию турбулентного пограничного слоя с потоком массы на стенке, впервые проведено широкое сопоставление результатов асимптотического анализа с экспериментальными данными.

В [9–11] предложен новый подход к исследованию подобия турбулентных пристенных течений несжимаемой жидкости, который включает в себя формулировку гипотезы замыкания, постулирующей достаточно общий локальный вид связи между касательным напряжением и профилем осредненной скорости, специальную замену переменных в уравнениях пограничного слоя и процедуру построения решения для различных характерных областей течения методом срачиваемых асимптотических разложений при больших значениях логарифма числа Рейнольдса. В результате для пограничного слоя на пластине с умеренным отсосом, а также умеренным и сильным вдувом установлены законы подобия для распределения скорости, компонентов тензора Рейнольдса, трения на стенке.

Продолжение этих исследований для случая сильного отсоса дано в настоящей работе. Для пограничного слоя на пластине с равномерно и неравномерно распределенным отсосом устанавливаются параметры подобия и универсальный закон для распределения трения на стенке. Анализируются условия существования развитого турбулентного и ламинарного режимов течения на пластине далеко вниз по потоку.

Для случая равномерного отсоса универсальный закон трения дан в [12].

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое на плоской гладкой пластине, обтекаемой равномерным потоком. Скорость отсоса, направленную по нормали к поверхности, будем считать переменной по длине пластины $v = v_w(x)$, где x – декартова координата, отсчитываемая от передней кромки.

При формулировке гипотезы замыкания будем исходить из допущения, что в случае, когда уровень пульсаций в набегающем потоке пренебрежимо мал, турбулентное касательное напряжение может быть вычислено по заданному в окрестности рассматриваемой точки полю осредненной скорости и физическим константам жидкости. Для течения в пограничном слое, в котором поперечная составляющая скорости много меньше продольной, а поперечный градиент поля скорости много больше продольного, это означает, что напряжение сдвига в основном определяется некоторым набором частных производных от продольной составляющей осредненной скорости по поперечной координате.

Таким образом, напряжение сдвига $-\rho\langle u'v' \rangle$ в данной точке пограничного слоя зависит от плотности ρ и вязкости ν жидкости, расстояния от стенки y , частных производных от продольной составляющей осредненной скорости u по поперечной координате до порядка $N + 1$ включительно (N – любое), а также некоторой характерной для данного сечения толщины Δ (толщины пограничного слоя), задающей глобальный масштаб турбулентного течения. Тогда из соображений размерности

$$\langle u'v' \rangle = - \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 T \left(R_1^{-1}, \frac{y}{\Delta}, \Pi_1, \dots, \Pi_N \right) \quad (1.1)$$

$$R_1 = \frac{y^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \Pi_n = - \frac{\partial^n \ln(\partial u / \partial y)}{(\partial \ln y)^n}, \quad 1 \leq n \leq N$$

В дальнейшем будем предполагать существование частных производных функции T по всем аргументам.

В рассматриваемой задаче функция тока осредненного течения Ψ удовлетворяет уравнению пограничного слоя с нулевым градиентом давления

$$\Psi_y \Psi_{xy} - \Psi_x \Psi_{yy} = (\langle u'v' \rangle + \nu \Psi_{yy})_y \quad (1.2)$$

$$x > 0, y = 0: \Psi_y = 0, \quad \Psi_x = -v_w(x); \quad y = \infty: \Psi_y = U_e$$

Здесь U_e – скорость невозмущенного набегающего потока.

Перейдем в (1.2) к новым переменным по формулам [9]

$$\Psi = U_e \Delta \Psi(\xi, \eta), \quad \Lambda(\xi) = \frac{dR_\Delta}{dR_x}, \quad \xi = \ln R_\Delta, \quad \eta = \frac{y}{\Delta}$$

$$R_x = \frac{x U_e}{\nu}, \quad R_\Delta = \frac{\Delta U_e}{\nu}$$

Для неизвестных функций $\Psi(\xi, \eta)$ и $\Lambda(\xi)$ получим краевую задачу

$$\Lambda[\Psi_\eta \Psi_{\xi\eta} - \Psi_{\eta\eta}(\Psi + \Psi_\xi)] = \left[(\eta \Psi_{\eta\eta})^2 T \left(R_1^{-1}, \frac{y}{\Delta}, \Pi_1, \dots, \Pi_N \right) + e^{-\xi} \Psi_{\eta\eta} \right]_{\eta}$$

$$R_1 = \eta^2 e^{\xi} \Psi_{\eta\eta}, \quad \Pi_n = - \frac{\partial^n \ln \Psi_{\eta\eta}}{(\partial \ln \eta)^n}, \quad 1 \leq n \leq N \quad (1.3)$$

$$\xi > -\infty, \quad \eta = 0: \Psi_\eta = 0, \quad \Psi + \Psi_\xi = -B/\Lambda; \quad \eta = \infty: \Psi_\eta = 1 \quad (1.4)$$

Здесь $B = v_w/U_e$ – параметр отсоса. Соотношения (1.4) задают граничные условия на пластине и внешней границе пограничного слоя.

Будем искать асимптотическое представление решения задачи (1.3), (1.4) при $\xi \rightarrow \infty$. Введем малый параметр ε и новую независимую переменную $\zeta = \varepsilon\xi$, $1/\zeta = O(1)$.

Скорость отсоса на стенке зададим в виде

$$B = \varepsilon^2 b(\zeta), \quad b(\zeta) = O(1), \quad b'(\zeta) = O(1) \quad (1.5)$$

2. Вязкий подслоя. Далее рассматриваются две характерные области поперек пограничного слоя: внешняя область, где $1/\eta = O(1)$, и вязкий подслоя. В вязкой пристеночной области решение будем искать в переменных стенки

$$y_+ = \frac{yU_e}{\nu} \sqrt{c_f/2}, \quad u_+ = \frac{u}{U_e \sqrt{c_f/2}}, \quad v_w^+ = \frac{B}{\sqrt{c_f/2}} \quad (2.1)$$

Здесь c_f — коэффициент трения на стенке. После подстановки (2.1) в уравнение (1.3) и предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, $y_+ = O(1)$ для первого члена разложения $U_+ = u_+ + O(e^{-\zeta/\varepsilon})$ получим

$$(y_+ U_+')^2 T(R_1^{-1}, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_N) + U_+' = 1 + v_w^+ U_+' \quad (2.2)$$

$$R_1 = y_+^2 U_+', \quad \Pi_n = -\frac{d^n \ln U_+'}{(d \ln y_+)^n}, \quad 1 \leq n \leq N$$

Для уравнения (2.2) имеется одно граничное условие: $U_+(0) = 0$.

В частном случае непроницаемой стенки скорость U_+ имеет асимптотику [9]

$$U_+ = \frac{1}{\kappa} [\ln y_+ + C_0 + O(y_+^{-\alpha})], \quad \alpha > 0, \quad y_+ \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Причем роль постоянной Кармана $\kappa = 0,41$ для заданной гипотезы замыкания играет величина $[T(0, 0, 1, 0, \dots, 0)]^{1/2}$. В соответствии с экспериментальными данными постоянная интегрирования $C_0 = 2,05$.

Рассмотрим общий случай отсоса или ддува на пластине при $v_w^+ \neq 0$. Переходя в (2.2) к переменным t и w по формулам (2.4), получим уравнение (2.5)

$$U_+ = \frac{v_w^+ w^2}{4\kappa^2} - \frac{1}{v_w^+}, \quad y_+ = \frac{e^t}{|v_w^+|} \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 T(R_1^{-1}, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_N) + \frac{2\kappa^2 e^{-t}}{|w|} \frac{dw}{dt} = \kappa^2 \quad (2.5)$$

$$w(-\infty) = \frac{2\kappa}{v_w^+}, \quad R_1 = \frac{|w| e^t}{2\kappa^2} \frac{dw}{dt}$$

$$\Pi_1 = 1 - \frac{d}{dt} \ln \left(|w| \frac{dw}{dt} \right), \quad \Pi_n = -\frac{d^n}{dt^n} \ln \left(|w| \frac{dw}{dt} \right), \quad 2 \leq n \leq N$$

В случае отсоса $2\kappa/v_w^+ \leq w < 0$, при ддуве $w \geq 2\kappa/v_w^+$.

На внешней границе вязкой пристеночной области членами $O(e^{-t})$ и, в частности, вторым вязким слагаемым в левой части уравнения (2.5) можно пренебречь, что дает для функции $z(w) = dw/dt$ уравнение, в которое переменная t явно не входит

$$z^2(w) T(0, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_N) = \kappa^2 \quad (2.6)$$

$$\Pi_1 = 1 - \frac{z}{w} - \frac{dz}{dw}, \quad \Pi_n = -\left(z \frac{d}{dw}\right)^n \ln(|w| z), \quad 2 \leq n \leq N$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнение (2.6) имеет частное решение $z_0(w)$ с асимптотикой

$$z_0 = 1 + 2\omega w^{-1} + O(w^{-2}), \quad w \rightarrow \infty, \quad \omega = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \Pi_1} \ln T(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Отсюда получим

$$t = \int \frac{w}{z_0(w)} dw = w - 2\omega \ln |w| + \Omega \left(\frac{-2x}{w} \right) + c_1, \quad \Omega(x) = O(x), \quad x \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

Здесь c_1 – постоянная интегрирования, зависящая от v_w^+ . Соотношение (2.7) справедливо при больших положительных значениях t , которые могут достигаться либо при $w \rightarrow +\infty$ в случае вдува, либо при больших значениях постоянной c_1 при отсосе.

Возвращаясь в (2.7) к переменным y_+ , U_+ , получим окончательный вид асимптотики решения уравнения (2.2) на внешней границе вязкой пристеночной области

$$\begin{aligned} \ln y_+ + O(y_+^{-\alpha}) &= \frac{2x}{v_w^+} \left(\sqrt{1 + v_w^+ U_+} - 1 \right) - \omega \ln(1 + v_w^+ U_+) + \\ &+ \Omega \left(-v_w^+ / \sqrt{1 + v_w^+ U_+} \right) - C(v_w^+), \quad \alpha > 0, \quad y_+ \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оценка остаточного члена в левой части асимптотического разложения (2.8) получена методом [9]. Кроме постоянной Кармана (2.8) содержит универсальную константу ω , связанную с массопереносом на стенке, а также универсальные функции Ω и C . Соотношение (2.8) является обобщением на случай массопереноса на стенке логарифмического закона для профиля скорости (2.3). Переходя в (2.8) к пределу при $v_w^+ \rightarrow 0$, будем иметь

$$C(v_w^+) = C_0 + O(v_w^+), \quad v_w^+ \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

Оценка порядка остаточного члена в (2.9) следует из того факта, что решение уравнения (2.2) должно быть непрерывно дифференцируемым по параметру v_w^+ .

Соотношение (2.8) выражает известный закон билогарифма для асимптотики профиля скорости на внешней границе вязкого подслоя, который при $\omega = 0$, $\Omega \equiv 0$ был установлен в [13] на основе формулы Прандтля для длины пути перемешивания. Как показывают экспериментальные данные, постоянную ω действительно можно положить равной нулю. Что касается функции Ω , то, как будет показано ниже, при сильном отсосе она играет существенную роль в асимптотическом представлении профиля скорости.

* Величина $1 + v_w^+ U_+$ в соответствии с (2.2) имеет смысл напряжения сдвига, отнесенного к трению на стенке τ_w . Асимптотика (2.8) охватывает три качественно различных случая поведения решения в зависимости от значения $\tau_* = \lim(1 + v_w^+ U_+)$ при $y_+ \rightarrow \infty$. Случай $\tau_* \neq 0$ соответствует умеренным вдуву или отсосу, при которых $\tau_w \sim \tau_e$, где τ_e – касательное напряжение во внешней области пограничного слоя. При $\tau_* \rightarrow \infty$, когда $\tau_w \ll \tau_e$, имеет место сильный околоскритический вдув. Случай $\tau_* = 0$, когда $\tau_w \gg \tau_e$, отвечает сильному отсосу. Эта последняя из трех перечисленных возможностей рассматривается в настоящей работе.

3. Решение для случая умеренного отсоса. При наличии потока массы на стенке в общем случае образуются две характерные области вдоль по потоку. На начальном участке пластины реализуется режим умеренного отсоса, при котором $\tau_w \sim \tau_e$. Реше-

ние для этого случая имеет вид [10]

$$\Lambda(\xi) = \frac{\varepsilon \kappa}{\zeta \sqrt{-f(\infty)}} \left[P(\zeta) - \varepsilon \ln \varepsilon \frac{Q(\zeta)}{\zeta} \right] + O(\varepsilon^2) \quad (3.1)$$

$$\frac{u}{U_e} = 1 + \Lambda(\xi) f'(\eta) + O(\varepsilon^2) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{c_f/2} = & \frac{\varepsilon \kappa Q(\zeta)}{\zeta} - \frac{\varepsilon^2 \kappa P(\zeta)}{\zeta^2} [\ln \varepsilon + R(\zeta)] + \\ & + \frac{\varepsilon^3 \kappa}{\zeta^3} \left\{ \ln^2 \varepsilon + \ln \varepsilon \left[\frac{P^2(\zeta)}{Q(\zeta)} - 4\omega \left(\frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} - 1 \right) + 2R(\zeta) \right] + O(1) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$R_x = \frac{e^\xi}{\Lambda(\xi)} [1 + O(\varepsilon)] = \frac{\zeta \sqrt{-f(\infty)}}{\varepsilon \kappa P(\zeta)} e^{\zeta/\varepsilon} \left[1 + \varepsilon \ln \varepsilon \frac{Q(\zeta)}{\zeta P(\zeta)} + O(\varepsilon) \right] \quad (3.4)$$

$$\left\{ \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} \right\} = 1 \pm b(\zeta) \left(\frac{\zeta}{2\kappa} \right)^2, \quad R(\zeta) = \ln \left[\frac{\kappa Q(\zeta)}{\zeta} \right] + \omega \ln \left[\frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} \right] + \ln \sqrt{-f(\infty)} - A + C_0$$

Функция $f(\eta)$, задающая универсальный профиль скорости во внешней области пограничного слоя, исследована в [9]. Она удовлетворяет следующей краевой задаче и имеет асимптотику на стенке в виде:

$$[(\eta f'')^2 T(0, \eta, \Pi_1, \dots, \Pi_N)]' + \eta f'' = 0 \quad (3.5)$$

$$\Pi_n = -\frac{d^n \ln f''}{(d \ln \eta)^n}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad f(0) = f'(\infty) = 0$$

$$f'(\eta) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{-f(\infty)} [\ln \eta - \ln \sqrt{-f(\infty)} + A + O(\eta^\alpha)], \quad \alpha > 0, \quad \eta \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

В соответствии с экспериментальными данными постоянная $A = 0,24$.

Согласно (1.1), (3.2) $\tau_e \sim \rho U_e^2 \Lambda^2$ и, как видно из (3.1), (3.3), $\tau_e \sim \tau_w$.

Асимптотическое решение (3.1)–(3.4) справедливо в общем случае переменной, но достаточно медленно изменяющейся по длине пластины скорости отсоса, которая должна подчиняться последнему условию (1.5). Действительно, дифференцируя (3.1), имеем

$$\frac{d\Lambda}{d\zeta} = -\frac{\varepsilon \kappa}{\sqrt{-f(\infty)} \zeta^2} \left[Q(\zeta) - \frac{\zeta^3}{4\kappa^2} \frac{db(\zeta)}{d\zeta} \right] + Q(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что ограничение $d\Lambda/d\zeta = Q(\varepsilon)$, при котором получено решение (3.1)–(3.4), равносильно условию $db/d\zeta = O(1)$.

Поскольку скорость отсоса на стенке задана как функция x , удобно ввести параметр

$$\beta = 1 + \frac{\kappa d \ln(-B)}{\sqrt{-B} d \ln R_x} = 1 - \frac{\kappa db/d\zeta}{\varepsilon(-b)^{3/2} d \ln R_x / d\zeta} \quad (3.8)$$

характеризующий степень неравномерности отсоса по длине пластины (постоянной по длине пластины скорости отсоса отвечает $\beta = 1$). В соответствии с (1.5), (3.4)

должно быть $\beta = O(1)$, а соотношение (3.7) представим в виде

$$\frac{d\Lambda}{d\zeta} = -\frac{\varepsilon\kappa}{\sqrt{-f(\infty)}\zeta^2} \{Q(\zeta) + 2(\beta - 1)[1 - P(\zeta)]^{3/2}\} + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) \quad (3.9)$$

В зависимости от текущего значения параметра β функция Λ может как возрастать, так и убывать вниз по потоку. В последнем случае при некотором значении переменной ζ , которое является корнем уравнения $P(\zeta) = 0$, главный член разложения (3.1) обращается в ноль, т.е. происходит вырождение профиля продольной скорости и $\tau_w \gg \tau_e$. Будем рассматривать далее окрестность этой особой точки (или линии для функций, зависящих от поперечной координаты), где имеет место сильный отсос. Перейдем в области сильного отсоса к новой переменной $\tau = O(1)$ по формуле

$$\tau = \varepsilon^{-1} [\zeta - 2\kappa / \sqrt{-b(\zeta)}] - k \ln [\varepsilon \sqrt{-b(\zeta)}] \quad (3.10)$$

где k – некоторая, подлежащая определению постоянная.

Подстановка (3.10) в соотношения (3.1), (3.2), (3.9) дает при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\tau = O(1)$

$$\Lambda = \varepsilon^2 \ln \varepsilon \frac{(k+1)b}{2\kappa\sqrt{-f(\infty)}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.11)$$

$$\frac{d\Lambda}{d\zeta} = \frac{\varepsilon b \beta}{2\kappa\sqrt{-f(\infty)}} + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) \quad (3.12)$$

$$\sqrt{c_f/2} = \varepsilon\sqrt{-b} + O(\varepsilon^3 \ln^2 \varepsilon) \quad (3.13)$$

В точке, где обращается в ноль главный член разложения для Λ , должно быть $d\Lambda/d\zeta < 0$. Отсюда на основании (3.12) следует, что в пограничном слое с переменной скоростью отсоса на стенке образование области сильного отсоса по мере роста числа Рейнольдса происходит, если выполнено условие $\beta > 0$, т.е. когда скорость отсоса вниз по потоку либо возрастает, либо не слишком быстро убывает.

Поскольку на основании (3.8), (3.10) $d\beta/d\tau = O(\varepsilon)$, параметр β в области сильного отсоса можно считать постоянным.

4. Внешняя область пограничного слоя при сильном отсосе. Исходя из предельной формы (3.11) решения для случая умеренного отсоса в окрестности особой точки, решение во внешней области пограничного слоя для режима сильного отсоса будем искать в виде

$$\Lambda(\xi) = -\varepsilon^2 b \lambda(\tau) + O(\varepsilon^3) \quad (4.1)$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \Psi_w(\xi) + \eta - \varepsilon^2 b g(\tau, \eta) + O(\varepsilon^3) \quad (4.2)$$

Положим $g(\tau, 0) = 0$, тогда $\Psi_w(\xi)$ задает значение функции тока на стенке; из второго условия (1.4), (1.5), (4.1) следует, что $\Psi_w + d\Psi_w/d\xi = 1/\lambda(\tau) + O(\varepsilon)$.

Величина τ определяется через толщину пограничного слоя, которая при сильном отсосе может изменяться немонотонно. Поэтому удобно перейти к новой независимой переменной Z_x , связанной с расстоянием от передней кромки или с R_x

$$Z_x = (-B)^{1-k/2} \exp\left(\frac{-2\kappa}{\sqrt{-B}}\right) R_x = \varepsilon^{2-k} (-b)^{1-k/2} \exp\left(\frac{-2\kappa}{\varepsilon\sqrt{-b}}\right) R_x \quad (4.3)$$

Дифференцируя соотношения (3.10), (4.3), будем соответственно иметь

$$d\tau = d\xi + [\beta - 1 + O(\varepsilon)] d \ln R_x \quad (4.4)$$

$$d \ln Z_x = [\beta + O(\varepsilon)] d \ln R_x \quad (4.5)$$

В силу определения функции $\Lambda(\xi) dR_x = \Lambda^{-1} de^\xi$, откуда с учетом (3.10), (4.1), (4.3) – (4.5) при $\epsilon \rightarrow 0$ получим уравнение

$$\beta \frac{de^\tau}{dZ_x} = (\beta - 1) \frac{e^\tau}{Z_x} + \lambda(\tau)$$

После замены переменных оно преобразуется к виду

$$Z_x = e^{\beta\chi}, \quad e^\tau = Z_x h(\chi), \quad \frac{dh}{d\chi} + h = \lambda \quad (4.6)$$

Согласно (3.10), (4.3) и второму соотношению (4.6), новая искомая функция имеет простое определение $h = \Delta/(-xB)$. В области сильного отсоса $\tau = O(1)$, $\lambda = O(1)$; из (4.6) следует, что здесь также $\chi = O(1)$, $h = O(1)$. Из (4.4) – (4.6) получаем при $\epsilon \rightarrow 0$ следующую связь между переменными ξ и χ : $d\xi = (\lambda/h)d\chi$.

Подстановка разложений (4.1), (4.2) в уравнение (1.3) с учетом соотношений (4.6) и установленной связи между переменными ξ и χ после предельного перехода $\epsilon \rightarrow 0$, $\chi = O(1)$, $1/\eta = O(1)$ дает для функций $g(\chi, \eta)$ и $h(\chi)$ уравнение в частных производных

$$[(\eta g_{\eta\eta})^2 T(0, \eta, \Pi_1, \dots, \Pi_N)]_\eta + [1 + (h + h')\eta] g_{\eta\eta} = h g_{\chi\eta}$$

$$\Pi_n = -\frac{\partial^n \ln g_{\eta\eta}}{(\partial \ln \eta)^n}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad g(\chi, 0) = g_\eta(\chi, \infty) = 0 \quad (4.7)$$

Начальные условия для уравнения (4.7) следуют из условия сращивания при $\tau = -\infty$ с решением, соответствующим умеренному отсосу на начальном участке пластины. Подставляя в (3.4) соотношения (3.10), (4.1), (4.3), при $\epsilon \rightarrow 0$ получим $Z_x = e^\tau/\lambda$, откуда следует, что $\tau \rightarrow -\infty$, $\lambda \rightarrow \infty$ соответствует $\chi \rightarrow -\infty$, $h \rightarrow \infty$, и начальные условия можно записать в виде

$$h(\chi) \rightarrow \infty, \quad g(\chi, \eta) \rightarrow h(\chi)f(\eta), \quad \chi \rightarrow -\infty \quad (4.8)$$

5. Асимптотика на стенке для решения во внешней области. Уравнение (4.7) имеет первый интеграл в виде

$$(\eta g_{\eta\eta})^2 T(0, \eta, \Pi_1, \dots, \Pi_N) + [1 + (h + h')\eta] g_\eta = hg + (hg)_\chi + G_1 \quad (5.1)$$

$$G_1(\chi) = -h(\chi)g(\chi, \infty) - [h(\chi)g(\chi, \infty)]'$$

Для исследования асимптотики решения уравнения (5.1) на стенке перейдем к новой неизвестной функции $w(\chi, \eta)$ по формуле $g_\eta = G_1 - (w/2\kappa)^2$. При $\eta \rightarrow 0$, $w \rightarrow \infty$ (5.1) запишем в виде

$$(\eta w_\eta)^2 T(0, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_N) = \kappa^2 + O(\eta) \quad (5.2)$$

$$\Pi_n = -\frac{\partial^n \ln(-ww_\eta)}{(\partial \ln \eta)^n}, \quad 1 \leq n \leq N$$

Вблизи стенки членами порядка $O(\eta)$ в (5.2) можно пренебречь, и для искомой функции $z(w) = -dw/d \ln \eta$ получим уравнение, в которое переменная η явно не входит

$$z^2(w)T(0, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_N) = \kappa^2 \quad (5.3)$$

$$\Pi_1 = 1 + \frac{z}{w} + \frac{dz}{dw}, \quad \Pi_n = -\left(-z \frac{d}{dw}\right)^n \ln(wz), \quad 2 \leq n \leq N$$

Поскольку уравнение (5.3) имеет частное решение $z_0(-w)$ (функция z_0 определена в

разд. 2) можно написать

$$-\ln \eta = \int \frac{dw}{z_0(-w)} = w + 2\omega \ln w - \Omega \left(\frac{2\kappa}{w} \right) + c_2 \quad (5.4)$$

Здесь c_2 – постоянная интегрирования; константа ω и функция Ω – те же, что в (2.7).

Возвращаясь в (5.4) к исходным переменным, асимптотику решения уравнения (5.1) вблизи стенки можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\ln \eta + O(\eta^\alpha) &= 2\kappa \sqrt{G_1(\chi) - g_\eta} + \omega \ln[G_1(\chi) - g_\eta] - \\ &- \Omega[(G_1(\chi) - g_\eta)^{-1/2}] + G_2(\chi), \quad \alpha > 0, \quad \eta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Оценка остаточного члена в левой части асимптотического разложения (5.5) получена методом [9]; $G_2(\chi)$ – некоторая функция интегрирования, определяемая начальными и граничными условиями для уравнения (5.1).

При $\chi \rightarrow \infty$ имеет место оценка $g(\chi, \eta) = h(\chi)f(\eta) + O(h') + O(1)$, в справедливости которой можно убедиться непосредственной подстановкой в уравнение (4.7), учитывая при этом, что функция $f(\eta)$ удовлетворяет уравнению (3.5). Переходя в (5.5) к пределу при $\chi \rightarrow \infty$, $h \rightarrow \infty$ и используя асимптотическое представление (3.6) функции $f(\eta)$, задающей начальное условие, получим

$$G_2(\chi) = -2\kappa \sqrt{G_1} - (\omega + 1/2) \ln G_1 + \ln h + A + O(1/h) + O(h'/h), \quad \chi \rightarrow \infty \quad (5.6)$$

6. Сращивание решений для внешней и пристеночной областей. Исходя из (3.13), для режима сильного отсоса при $\chi = O(1)$ ($\tau = O(1)$) коэффициент трения будем искать в виде

$$c_f/2 = -\varepsilon^2 b + \varepsilon^4 b^2 t(\chi) + O(\varepsilon^5) \quad (6.1)$$

Для асимптотического сращивания решений во внешней и пристеночной областях пограничного слоя перейдем в соотношении (2.8), справедливом на внешней границе вязкого подслоя, от переменных стенки y_+ , U_+ к внешним переменным η , g_η по формулам

$$y_+ = \varepsilon^k (-b)^{k/2} \sqrt{c_f/2} \exp\left(\frac{2\kappa}{\varepsilon\sqrt{-b}} + \tau\right) \eta, \quad u_+ = \frac{\Psi_\eta}{\sqrt{c_f/2}}, \quad v_w^+ = \frac{\varepsilon^2 b}{\sqrt{c_f/2}}$$

Учтем при этом, что, согласно (4.2), $\Psi_\eta = 1 - \varepsilon^2 b g_\eta + O(\varepsilon^3)$. Вместо коэффициента трения подставим ряд (6.1). При $\tau = O(1)$, $1/\eta = O(1)$ разложим обе части равенства (2.8) по малому параметру ε до членов порядка единицы включительно. В рассматриваемом случае $v_w^+ = O(\varepsilon)$ и для входящей в (2.8) функции $C(v_w^+)$ достаточно использовать оценку (2.9) $C(v_w^+) = C_0 + O(\varepsilon)$. Приравняем подобные члены, стоящие в правой и левой частях полученного таким образом уравнения. В результате будем иметь

$$k = -2\omega - 1, \quad \tau + \ln \eta = -2\kappa \sqrt{t - g_\eta} - \omega \ln(t - g_\eta) + \Omega[(t - g_\eta)^{-1/2}] - C_0$$

Сопоставив теперь согласно принципу асимптотического сращивания это равенство с асимптотикой (5.5), получим

$$t = G_1(\chi) = -h(\chi)g(\chi, \infty) - [h(\chi)g(\chi, \infty)]' \quad (6.2)$$

$$G_2(\chi) = \tau + C_0 = \beta\chi + \ln h + C_0 \quad (6.3)$$

Соотношения (4.7), (4.8), (6.3) дают полную формулировку краевой задачи для функций $g(\chi, \eta)$ и $h(\chi)$, после решения которой трение на стенке может быть определено по формуле (6.2).

7. Подобие при сильном отсосе. Наряду с переменной Z_x , которая после определения параметра k принимает вид

$$Z_x = (-B)^{\omega+3/2} \exp\left(\frac{-2x}{\sqrt{-B}}\right) R_x = \varepsilon^{2\omega+3} (-b)^{\omega+3/2} \exp\left(\frac{-2x}{\varepsilon\sqrt{-b}}\right) R_x \quad (7.1)$$

введем вторую переменную подобия, образованную по толщине потери импульса θ

$$Z_\theta = (-B)^{\omega-1/2} \exp\left(\frac{-2x}{\sqrt{-B}}\right) R_\theta = \varepsilon^{2\omega-1} (-b)^{\omega-1/2} \exp\left(\frac{-2x}{\varepsilon\sqrt{-b}}\right) R_\theta \quad (7.2)$$

Из соотношения (4.2) для толщины потери импульса будем иметь $\theta/\Delta = -\varepsilon^2 b g(\chi, \infty) + O(\varepsilon^3)$, откуда с учетом (3.10), (4.6), (7.2) получим

$$Z_\theta = -h(\chi) g(\chi, \infty) Z_x + O(\varepsilon) \quad (7.3)$$

Формулировка краевой задачи для функций $g(\chi, \eta)$ и $h(\chi)$, связь между универсальными переменными (7.3) и выражение для функции $t(\chi)$ (6.2) содержат один параметр β , характеризующий степень неравномерности отсоса по длине пластины. Это означает, что имеет место следующее правило подобия для распределения трения и толщины потери импульса на пластине при сильном отсосе:

$$\ln Z_x = \Phi_1(t, \beta) + O(\sqrt{-B}), \quad \ln Z_\theta = \Phi_2(t, \beta) + O(\sqrt{-B}), \quad t = \frac{c_f/2 + B}{B^2} \quad (7.4)$$

Входящие в (7.4) универсальные функции Φ_1, Φ_2 могут быть выражены одна через другую, поскольку из (6.2), (7.3) следует равенство $\beta dZ_\theta/dZ_x = (\beta-1)Z_\theta/Z_x + t$, представляющее собой интегральное соотношение импульсов $dR_\theta/dR_x = c_f/2 + B$, записанное в других переменных.

Экспериментальные данные [14, 15] для распределения трения при равномерном отсосе на пластине в диапазоне $R_x \approx 3,3 \cdot 10^5 - 3,5 \cdot 10^6$, $B \approx -(1-3,6) \cdot 10^{-3}$, соответствующем развитому турбулентному течению в пограничном слое, представлены на фиг. 1 в переменных подобия (7.4). При более интенсивном отсосе, как отмечено в [16], в экспериментах [15] наблюдались переходный и ламинарный режимы течения. Малые значения переменной Z_θ отвечают слабому и умеренному отсосу. В соответствии со сформулированным правилом подобия по мере увеличения Z_θ все экспериментальные точки ложатся на одну кривую.

Экспериментальные данные [14, 15, 17] для распределения толщины потери импульса в переменных подобия приведены на фиг. 2 и также отвечают указанному выше диапазону параметра отсоса, при котором реализуется режим развитого турбулентного течения. Соответствие результатов измерений правилу подобия (7.4) можно считать вполне удовлетворительным.

8. Асимптотический турбулентный пограничный слой с отсосом. Асимптотика решения задачи (4.7), (4.8), (6.3) при $\chi \rightarrow \infty$, которая описывает предельное течение в пограничном слое далеко вниз по потоку, имеет вид

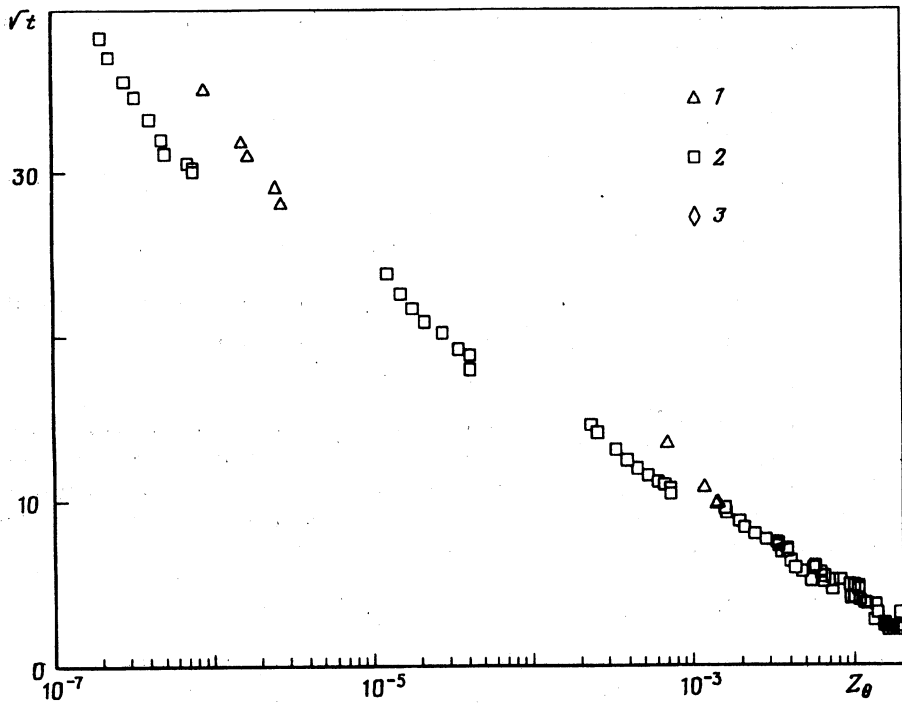
$$g = g(\infty, \eta) + O(Z_x^{-1}), \quad h = \exp(G_2^\infty - C_0) Z_x^{-1} + O(Z_x^{-2})$$

$$t = (\beta-1)g(\infty, \infty) \exp(G_2^\infty - C_0) Z_x^{-1} + O(Z_x^{-2})$$

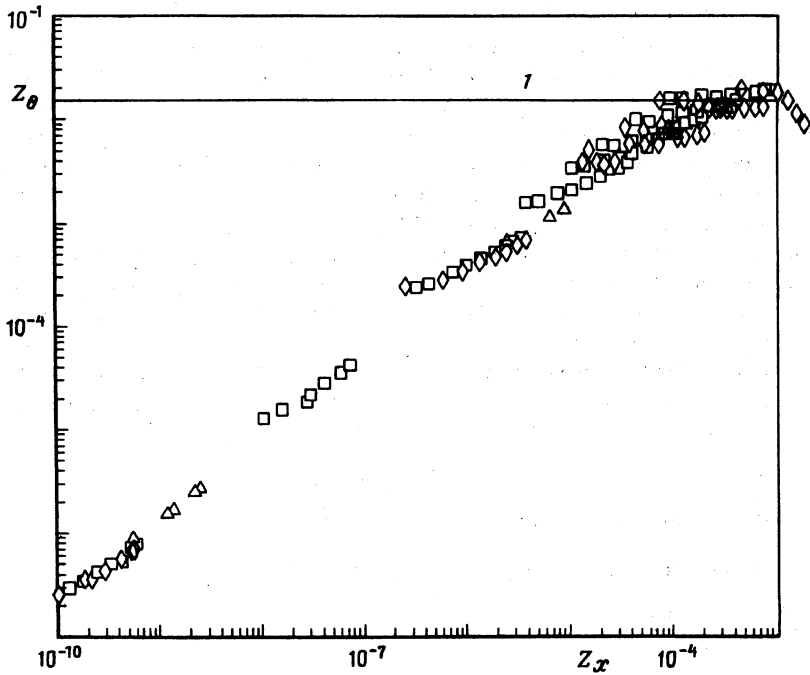
$$[\eta g''(\infty, \eta)]^2 T(0, \eta, \Pi_1, \dots, \Pi_N) + g'(\infty, \eta) = 0$$

$$\Pi_n = -\frac{d^n \ln g''(\infty, \eta)}{(d \ln \eta)^n},$$

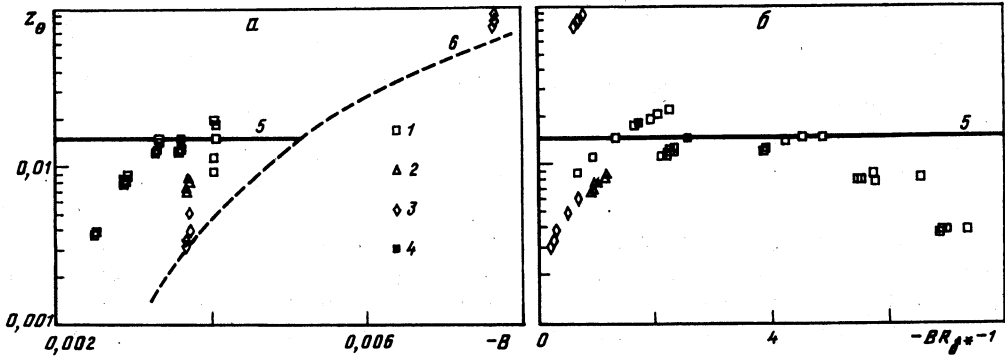
$$1 \leq n \leq N, \quad g(\infty, 0) = \frac{dg(\infty, \infty)}{d\eta} = 0 \quad (8.1)$$



Фиг. 1. Распределение трения на пластине с отсосом в переменных подобия: 1-3 – данные [14, 15, 17]



Фиг. 2. Распределение толщины потери импульса на пластине с отсосом в переменных подобия. Кривая 1 – $Z_\theta = Z_\theta^\infty = 0,015$; остальные обозначения, как на фиг. 1



Фиг. 3. Турбулентно-ламинарный переход в асимптотическом пограничном слое с отсосом: 1-3 – турбулентный, переходный и ламинарный режимы течения по данным [17]; 4 – данные прямого численного моделирования турбулентного режима [18, 19]; 5-6 – теоретические кривые для турбулентного и ламинарного асимптотического пограничного слоя

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой разложений (8.1) в уравнения (5.1), (6.3). Предельное значение функции тока удовлетворяет краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, а функция G_2 тождественно равна постоянной G_2^∞ .

В частном случае равномерного отсоса ($\beta = 1$) первые члены разложений (8.1) являются точным решением краевой задачи (4.7), (6.3).

Соотношения (8.1) описывают асимптотический турбулентный пограничный слой с отсосом, в котором профили скорости и касательного напряжения с помощью одной универсальной функции $g'(\infty, \eta)$ можно представить в виде

$$\frac{U_e - u}{-v_w} = -g'(\infty, \eta) + O(Z_x^{-1}), \quad \frac{\langle u'v' \rangle}{v_u^2} = g'(\infty, \eta) + O(Z_x^{-1}), \quad \eta = -\frac{yB}{\delta^*}$$

где в качестве толщины пограничного слоя выбрана величина $-\delta^*/B$, δ^* – толщина вытеснения.

Согласно (8.1), величина t при всех β стремится к нулю и, следовательно, далеко вниз по потоку $c_f \approx -2B$. Это означает, что c_f вдоль стенки монотонно убывает при $0 < \beta \leq 1$, величина t всюду больше нуля, а толщина потери импульса соответственно монотонно возрастает. При $\beta > 1$ зависимости c_f и t от x немонотонны и имеют точку минимума, а распределение толщины потери импульса – точку максимума. Предел универсальной функции $Z_0(Z_x, \beta)$

$$Z_0(\infty, \beta) = Z_0^\infty = -g(\infty, \infty) \exp(G_2^\infty - C_0)$$

не зависит от параметра β . На основании (7.2) отсюда следует, что в главном члене асимптотика толщины потери импульса имеет степенной вид $R_0 \sim R_x^{1-\beta}$.

На фиг. 3, а даны значения Z_0 , вычисленные по экспериментальным данным [17] для асимптотического турбулентного пограничного слоя с равномерным отсосом. Там же показан результат прямого численного моделирования рассматриваемого течения [18, 19] для одного значения параметра $B = -3,6 \cdot 10^{-3}$. Численное моделирование дает величину постоянной $Z_0^\infty = 0,015$; близкие значения получены в трех из пяти экспериментов [17], что в целом подтверждает сделанный теоретический вывод. Постоянная Z_0^∞ , значение которой принято по результатам прямого численного моделирования, показана на фиг. 3, а линией 5 (прямая $Z_0 = 0,015$ дана также на фиг. 2). Кроме

этого, на фиг. 3, *a* представлены данные измерений для переходного и полностью ламинарного, по оценкам [17], асимптотического пограничного слоя. Известное точное решение для асимптотического ламинарного пограничного слоя с отсосом дает простую формулу для толщины потери импульса $R_\theta = (-2B)^{-1}$, которой соответствует

$$Z_\theta = \frac{1}{2}(-B)^{\omega-3/2} \exp\left(-\frac{2x}{\sqrt{-B}}\right)$$

Эта зависимость при $\omega = 0$ также построена на фиг. 3, *a* линией б.

Проанализируем теперь для рассматриваемого течения условия существования турбулентного или ламинарного режима. Линия 5 на фиг. 3, *a* отвечает развитому турбулентному, а б – ламинарному режиму течения. Для точек, лежащих на кривой 5, увеличение абсолютной величины параметра отсоса соответствует резкому падению числа Рейнольдса R_θ . Как видно из фиг. 3, *a* изменение типа течения начинается при $B \approx -3,7 \cdot 10^{-3}$, что согласуется с [16, 20, 21].

Введем интегральный параметр, характеризующий профиль турбулентного касательного напряжения в пограничном слое

$$\sigma = -\int_0^\infty \frac{\langle u'v' \rangle}{U_e^2} dy$$

Дважды интегрируя уравнение импульсов, для асимптотического пограничного слоя с отсосом можно получить $R_\sigma = -BR_{\delta^*} - 1$, где R_{δ^*} , R_σ – числа Рейнольдса, образованные по толщине вытеснения и величине σ соответственно. На фиг. 3, б рассматриваемые экспериментальные данные построены в переменных $-BR_{\delta^*} - 1$, Z_θ . Ламинарному режиму течения отвечает $R_\sigma = 0$, развитому турбулентному – $R_\sigma \gg 1$, переходный режим, как видно из фиг. 3, б, наблюдается при $R_\sigma \approx 1,5$.

Если отсос вниз по потоку растет, интегральные параметры, характеризующие профили скорости и турбулентного касательного напряжения в пограничном слое, падают, в результате чего происходит реламинаризация течения. Число Рейнольдса R_σ можно предложить в качестве критерия реламинаризации. В этом случае для критического значения параметра отсоса B_* , при котором начинается переход от развитого турбулентного к ламинарному режиму течения, имеем

$$(-B_*)^{3/2-\omega} \exp\left(\frac{2x}{\sqrt{-B_*}}\right) = \frac{R_\sigma^* + 1}{HZ_\theta^\infty} \quad (8.2)$$

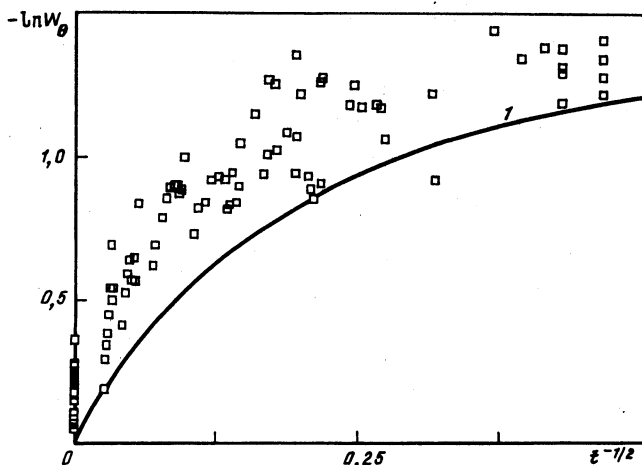
Здесь H – формпараметр пограничного слоя, по результатам [18, 19] равный 1,29. Экспериментальные данные на фиг. 3, б лишь весьма приблизительно позволяют судить о критическом числе R_σ^* . Однако для критического параметра отсоса, полагая в (8.2) $R_\sigma^* = 0$, можно сделать грубую оценку $B_* > -4,7 \cdot 10^{-3}$.

9. Универсальный закон трения. Правило подобия (7.4) несправедливо при слабом отсосе и в частном случае непроницаемой пластины. Для этих условий в [10] получены соотношения, которые запишем в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} W_x \\ W_\theta \end{array} \right\} = \frac{(c_f/2 + B)^{\omega \pm 1/2}}{(c_f/2)^{\omega - 1/2}} \exp \left[\frac{2x}{B} \left(\sqrt{\frac{c_f}{2}} - \sqrt{\frac{c_f}{2} + B} \right) - A + C_0 \right] \left\{ \begin{array}{l} R_x \\ R_\theta \end{array} \right\} = \quad (9.1)$$

$$= 1 + O\left(\sqrt{c_f + B}\right)$$

Используя асимптотическое представление (5.6) вместе с (6.2), (6.3), (7.1), (7.2),



Фиг. 4. Трение на непроницаемой пластине и пластине с отсосом в универсальных переменных: кривая 1 – аппроксимация Паде; остальные обозначения, как на фиг. 1

получим асимптотику универсальных функций (7.4)

$$\Phi_i(t, \beta) = \Phi_i^\infty(t) + O(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty, \quad \chi \rightarrow -\infty \quad (9.2)$$

$$\Phi_i^\infty(t) = -2\kappa\sqrt{t} - (\omega + 3/2 - i)\ln t + A - C_0, \quad i = 1, 2$$

С другой стороны, при $t = O(1)$, $B \rightarrow -0$ из (9.1) имеем

$$\ln W_x = \ln Z_x - \Phi_1^\infty(t) + O(\sqrt{-B}), \quad \ln W_0 = \ln Z_0 - \Phi_2^\infty(t) + O(\sqrt{-B}) \quad (9.3)$$

Зависимости (7.4), (9.1) можно объединить в один универсальный закон трения, справедливый во всем диапазоне изменения скорости отсоса на стенке

$$\ln W_x = \Phi_1(t, \beta) - \Phi_1^\infty(t) + O(\sqrt{c_f + B}), \quad \ln W_0 = \Phi_2(t, \beta) - \Phi_2^\infty(t) + O(\sqrt{c_f + B}) \quad (9.4)$$

При умеренном отсосе, которому соответствует $1/t = O(B)$, (9.4) в силу асимптотических представлений (9.2) совпадает с (9.1). При сильном отсосе, когда $t = O(1)$, равенство (9.4) на основании (9.3) равносильно (7.4). Заметим, что поскольку соотношения (9.4) имеют смысл только при $t > 0$, во всем диапазоне изменения параметра t их можно использовать только при убывающем и постоянном отсосе.

На фиг. 4 результаты измерений [15] даны в форме универсального закона трения (9.4). С относительной погрешностью около 20% экспериментальные данные на фиг. 4 действительно описывают одну кривую. Достоинством переменных W_x , W_0 является то, что они позволяют в аналитическом виде выделить главную часть зависимости между числом Рейнольдса и коэффициентом трения, так что построенная на фиг. 4 эмпирическая функция представляет собой относительно малую добавку к известному главному члену. Поэтому сравнительно небольшой разброс экспериментальных точек на фиг. 4 говорит о весьма хорошем соответствии универсального закона трения и результатов измерений.

Функция, построенная на фиг. 4 по экспериментальным данным, на основании (8.1), (9.2) имеет асимптотику

$$\ln W_0 = (1 - 2\omega)\ln z + Z_0^\infty - A + C_0 + 2\kappa z^{-1} + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty$$

$$\ln W_0 = az + O(z^2), \quad z \rightarrow 0, \quad z = 1/\sqrt{t} = -B/\sqrt{c_f/2 + B} \quad (9.5)$$

Коэффициент a , задающий производную функции в начале координат, в соответствии с экспериментальными данными на фиг. 4 приблизительно равен -8 . Из сопоставления экспериментальных значений на фиг. 4 с асимптотикой на бесконечности (9.5) следует немонотонность зависимости $\ln W_\theta$ от z .

Для приближенного аналитического описания универсальной функции используем двухточечную аппроксимацию Паде [22]. Потребуем, чтобы аппроксимация Паде $P(z)$ удовлетворяла условиям

$$\ln W_\theta = (1-2\omega)\ln P(z) + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty$$

$$\ln W_\theta = (1-2\omega)\ln P(z) + O(z^2), \quad z \rightarrow 0$$

$$P(z) = \frac{1+a_1z+a_2z^2}{1+b_1z} \quad (9.6)$$

Для принятых численных значений входящих в (9.5) постоянных получим $a_1 = 0,75$, $a_2 = 0,8$, $b_1 = 8,75$. Формула (9.6) дана на фиг. 4 линией 1. Имеется удовлетворительное соответствие между экспериментальными точками и аппроксимацией Паде, построенной на основе данных об асимптотике функции на концах интервала. Небольшой сдвиг экспериментальных точек относительно расчетной кривой на фиг. 4 может быть устранен соответствующим увеличением входящей в (9.1) константы $C_0 - A$.

Перенесем функции $\Phi_1^\infty, \Phi_2^\infty$ в левую часть равенств (9.4). После приведения подобных членов получим другую форму универсального закона трения

$$\ln Z_x^* = \Phi_1(t, \beta) + O(\sqrt{c_f + B}), \quad \ln Z_\theta^* = \Phi_2(t, \beta) + O(\sqrt{c_f + B}) \quad (9.7)$$

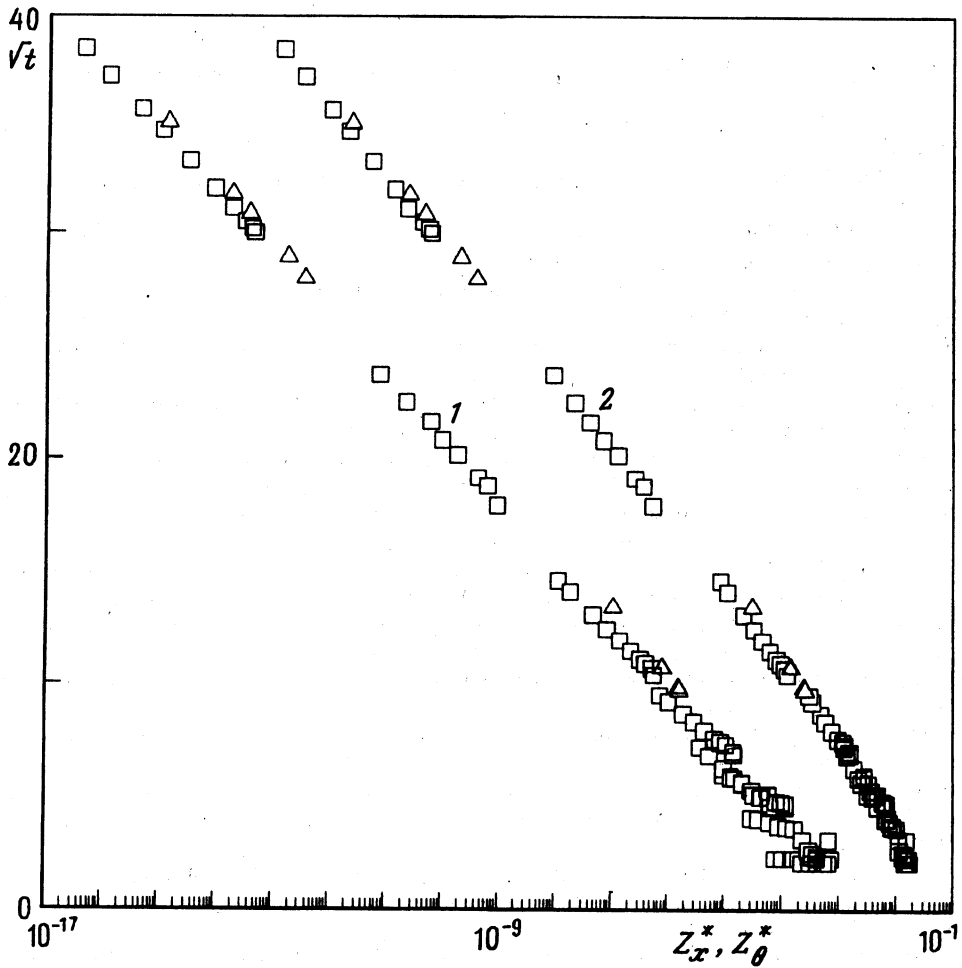
$$\begin{Bmatrix} Z_x^* \\ Z_\theta^* \end{Bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{c_f/2}}{-B} \right)^{1-2\omega} \exp \left(2\kappa \frac{\sqrt{c_f/2}}{B} \right) \begin{Bmatrix} B^2 R_x \\ R_\theta \end{Bmatrix}$$

На основании (9.3) при $t = O(1)$ переменные Z_x, Z_θ и Z_x^*, Z_θ^* совпадают. Однако в отличие от правила подобия (7.4), справедливого только в области сильного отсоса, универсальный закон (9.7) описывает экспериментальные данные во всем диапазоне скоростей отсоса. Об этом свидетельствует фиг. 5, на которой в переменных (9.7) представлены те же данные, что и на фиг. 1. Универсальные переменные построены по расстоянию от передней кромки и толщине потери импульса. В обоих случаях соответствие экспериментальных данных, представленных на фиг. 5, закону подобия (9.7) очень хорошее.

Универсальный закон трения в форме (9.7) в отличие от (9.4) пригоден во всем диапазоне изменения параметра t для всех законов отсоса.

Заключение. На начальном участке пластины реализуется режим умеренного отсоса, при котором касательное напряжение сохраняет один порядок величины поперек всего слоя. Во внешней области распределения скорости и компонентов тензора Рейнольдса подчиняются условиям автомодельности (справедлив универсальный закон дефекта скорости), а по мере приближения к стенке профиль скорости имеет участки с логарифмической и билогарифмической асимптотикой.

Если по мере движения от передней кромки вниз по потоку скорость отсоса на стенке не убывает слишком быстро, умеренный отсос переходит в сильный, который характеризуется резким падением величины касательного напряжения во внешнем подслое, при том что порядок этой величины на стенке сохраняется прежним. Профили скорости и других параметров во внешней области не удовлетворяют условию автомодельности, а продольный градиент скорости на стенке в отличие от режима



Фиг. 5. Распределение трения на пластине с отсосом в универсальных переменных: 1 – Z_x^* , 2 – Z_θ^* ; остальные обозначения, как на фиг. 1

умеренного отсоса влияет на течение уже в первом приближении. Логарифмическая область при сильном отсосе отсутствует. Сохраняется лишь подобласть с билигарифмической асимптотикой профиля скорости. Если скорость отсоса вниз по потоку возрастает, зависимость трения от продольной координаты имеет минимум.

Предельной формой течения далеко вниз по потоку является асимптотический пограничный слой, профили скорости и других параметров в котором автомодельны. В то же время распределение, например, толщины потери импульса существенно зависит от закона отсоса – этот параметр увеличивается, остается постоянным или стремится к нулю в зависимости от того, убывающей, постоянной или возрастающей является абсолютная величина скорости отсоса. В последнем случае при достижении некоторых критических параметров в слое должно наблюдаться явление реламинизации.

Автор благодарит А.Б. Стронга (Университет Ватерлоо, Канада) за любезно предоставленные экспериментальные данные.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95-01-00988 и 98-01-00154).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 694 с.
2. Yajnik K.S. Asymptotic theory of turbulent shear flows // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Pt 2. P. 411–427.
3. Сычев В.В., Сычев Вик.В. О структуре турбулентного пограничного слоя // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 593–599.
4. Пономарев В.И. Асимптотический анализ турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости // Учен. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. Вып. 3. С. 42–50.
5. Bush W.B., Fendell F.E. Asymptotic analysis of turbulent channel and boundary-layer flow // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. Pt 4. P. 657–681.
6. Silva-Freire A.P. An asymptotic approach for shock-wave / transpired turbulent boundary layer interactions // ZAMP. 1988. V. 39. № 4. P. 478–503.
7. Silva-Freire A.P. An asymptotic solution for transpired incompressible turbulent boundary layers // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1988. V. 31. № 5. P. 1011–1021.
8. Silva-Freire A.P. An extension of the transpired skin-friction equation to compressible turbulent boundary layers // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1988. V. 31. № 11. P. 2395–2398.
9. Вигдорovich И.И. Асимптотическое исследование при больших числах Рейнольдса турбулентного пограничного слоя на плоской пластине // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 106–117.
10. Вигдорovich И.И. Универсальный закон дефекта скорости для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом и отсосом // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 4. С. 443–448.
11. Вигдорovich И.И. Универсальный закон трения для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 1. С. 39–43.
12. Вигдорovich И.И. Универсальный закон трения для турбулентного пограничного слоя на пластине с отсосом // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 1. С. 42–46.
13. Stevenson T.N. A law of the wall for turbulent boundary layers with suction or injection // CoA Rept. Aero. 1963. № 166; J. Roy. Aeronaut. Soc. 1964. V. 68. № 642. P. 431.
14. Simpson R.L., Moffat R.J., Kays W.M. The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental skin friction with variable injection and suction // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1969. V. 12. № 7. P. 771–789.
15. Depooter K. The measurement of wall shear stress on a porous plate with mass transfer using a floating element technique and the investigation of various indirect measuring methods. PhD Thesis. Canada: Univ. Waterloo, 1973. 159 p.
16. Depooter K., Brundrett E., Strong A.B. The calibration of Preston tubes in transpired turbulent boundary layers // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1978. V. 100. № 1. P. 10–16.
17. Watts K.C., Brundrett E., Nicoll W.B., Strong A.B. Design and construction of a wind tunnel for mass transfer studies in incompressible boundary layers // Trans. ASME. Ser. I. J. Fluids Eng. 1974. V. 96. № 4. P. 311–316.
18. Mariani P., Spalart P., Kollmann W. Direct simulation of a turbulent boundary layer with suction // Proc. Int. Conf. Near-Wall Turbulent Flows / Ed. R.M.C. So et al. Amsterdam: Elsevier, 1993. P. 347–356.
19. Antonia R.A., Spalart P.R., Mariani P. Effect of suction on the near-wall anisotropy of a turbulent boundary layer // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 1. P. 430–432.
20. Watts K.C., Brundrett E. Turbulence and momentum properties of zero pressure gradient boundary layers with suction on a flat plate // Turbulent Boundary Layers. Joint ASME-CSME Conf. Niagara Falls. N.Y., 1979. P. 145–151.
21. Watts K.C., Brundrett E. Experimental and predicted properties of suction induced asymptotic boundary layers // Turbulent Boundary Layers. Joint ASME-CSME Conf. Niagara Falls. N.Y., 1979. P. 159–164.
22. Бейкер Дж., мл., Грейс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VIII.1997