

УДК 533.6.011.8

© 1999 г. В.С. ГАЛКИН, **В.И. НОСИК**

О МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ БАРНЕТТА НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА

На примере задачи о распространении плоских ультразвуковых волн в разреженном газе проведено сопоставление результатов применения асимптотических методов решения кинетического уравнения Больцмана и их модификаций друг с другом и с экспериментом. Предложенная модификация уравнений Барнетта свободна от известных недостатков этих уравнений и обладает примерно такой же областью применимости.

Вывод макроскопических моделей сплошной среды является одной из главных задач кинетической теории газов. Центральное место здесь занимает классический метод Чепмена – Энскога решения кинетического уравнения Больцмана при числе Кнудсена $Kn \ll 1$. Результатом применения этого метода является последовательность систем уравнений Эйлера, Навье – Стокса, Барнетта и т.д. В последние годы вырос интерес к уравнениям Барнетта, обусловленный, в частности, их удачным приложением к задаче о структуре сильной ударной волны [1, 2], когда они существенно расширяют область применимости сплошносредного описания при не малых числах Kn .

Однако применение полной системы уравнений Барнетта затруднено рядом обстоятельств. Эта система имеет более высокий порядок по сравнению с системой уравнений Навье – Стокса, а вопрос о постановке дополнительных граничных условий не решен. Это усугубляется наличием посторонних решений в уравнениях, полученных методом Чепмена – Энскога [3]. Наконец, уравнениям Барнетта свойственна коротковолновая неустойчивость [4]. Чтобы обойти эти проблемы, в уравнения Барнетта вводят дополнительные демпфирующие слагаемые [1, 2], при этом усугубляется проблема дополнительных граничных условий.

В [5] поставлен вопрос о модификациях системы уравнений Барнетта, которые свободны от указанных дефектов и обладают приемлемой точностью. Предложенные модификации апробированы на задаче о структуре ударной волны. Показано, что для сильных ударных волн точность, близкую к точности системы уравнений Барнетта, имеет система усеченных неоднородных уравнений Барнетта. В последних неоднородная часть (все члены с высшими производными и некоторые другие барнеттовы слагаемые) рассчитывается на решении однородных усеченных уравнений, получаемых из полной системы уравнений Барнетта отбрасыванием этой неоднородной части. Порядок системы усеченных неоднородных уравнений и ее свойства при малых отклонениях от равновесия такие же, как и у системы уравнений Навье – Стокса, она не обладает, в частности, коротковолновой неустойчивостью.

В данной работе подход [5] анализируется на решении классической задачи о распространении вынужденных плоских ультразвуковых колебаний в одноатомном газе. Относительная простота задачи, наличие экспериментальных и расчетных данных (см. обзоры [6–8]) позволяют дать наглядное сопоставление результатов применения различных подходов, в том числе методов Чепмена – Энскога и Гильберта.

1. Распространение малых возмущений в газе описывается линеаризованными уравнениями сохранения массы, импульса и энергии. Ограничимся рассмотрением распространения плоских волн с постоянной частотой ω вдоль оси x .

Преобразуем уравнения газодинамики к удобному для решения виду. Для возмущений газодинамических переменных

$$\delta\rho = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \ll 1, \quad \delta T = \frac{T - T_0}{T_0} \ll 1, \quad \delta p = \frac{p - p_0}{p_0} = \delta\rho + \delta T \ll 1, \quad u \ll c \quad (1.1)$$

запишем уравнения неразрывности и энергии в виде

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{3}{2} \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

где $\rho_0, T_0, p_0 = R\rho_0 T_0$ – массовая плотность, температура и давление в невозмущенном газе, R – газовая постоянная, u – скорость газа, c – скорость звука при $\text{Kn} = 0$.

Используя (1.1), (1.2), приведем уравнение сохранения импульса к виду

$$\frac{5}{3c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial x \partial t} = 0 \quad (1.3)$$

Методики макроскопического описания основаны на различных способах замыкания уравнений сохранения, приводящих к различным выражениям для вектора потока тепла q_i и тензора напряжений p_{ij} . Эти методики имеют строгое обоснование при $\text{Kn} \ll 1$. При этом для выбранного межмолекулярного потенциала безразмерное волновое число зависит только от числа Кнудсена

$$\text{Kn} = \frac{\omega \mu_0}{\rho_0} \quad (1.4)$$

равного отношению среднего времени свободного пробега молекул μ_0/ρ_0 (μ – вязкость газа) к характерному времени ω^{-1} .

В дальнейшем для краткости (но без потери общности) рассматриваются только волны в положительном направлении x (так что $\alpha > 0$). Иными словами, рассматривается только соответствующая половина корней дисперсионных уравнений.

2. Рассмотрим сначала решение задачи при помощи уравнений, получаемых методом Чепмена – Энскога. В приближении Барнетта выражения для тензора напряжений и вектора потока тепла имеют вид [5–9]

$$\frac{p_{xx}}{\rho_0} = -\frac{4}{3} \frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} K_2 \frac{\mu_0^2}{\rho_0 p_0} \frac{\partial^2 (\delta\rho + \delta T)}{\partial x^2} + \frac{2}{3} K_3 \frac{\mu_0^2}{\rho_0 p_0} \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{q_x}{\rho_0} = -\frac{15}{4} \frac{R}{\rho_0} \mu_0 T_0 \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{2}{3} \theta \frac{\mu_0^2}{\rho_0 p_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \theta = \theta_2 + \theta_4$$

В (2.1) первые слагаемые в правой части соответствуют приближению Навье – Стокса. Обычно используемые выражения для барнеттовых коэффициентов имеют вид

$$K_2 = 2, \quad K_3 = 3, \quad \theta = -21/8 \quad (2.2)$$

Выражения (2.2) являются точными для максвелловских молекул и приближенными (первое приближение по полиномам Сонина) для других межмолекулярных потенциалов. Практически точные формулы для барнеттовых коэффициентов переноса получены в случае молекул – упругих сфер [9]. Однако межмолекулярные потенциалы инертных газов, в которых проводились эксперименты [7], значительно менее жесткие.

Будем искать решения для газодинамических переменных Γ в виде $\Gamma = \Gamma^* \exp(-kx^* + t^*)$, $\Gamma = (\delta\rho, \delta p, \delta T, u)$, $\Gamma^* = \text{const}$ (2.3)

$$k = K \frac{c}{\omega} \equiv \alpha + i\beta, \quad x = \frac{c}{\omega} x^*, \quad t = \frac{t^*}{i\omega}, \quad c = \sqrt{\frac{5}{3} RT_0}$$

Здесь K – волновое число. Частота ω считается заданной, Γ^* не зависит от координаты x и времени t . Запись решения в виде (2.3) используется при экспериментальном исследовании [7].

Проведем преобразования системы (1.2), (1.3), (2.1), (2.2). Исключим из (1.3) и (2.1) производную от $\delta\rho$ при помощи (1.2) и введем новые переменные

$$v = \frac{u}{c} \exp(-t^*), \quad \tau = \delta T \exp(-t^*) \quad (2.4)$$

полагая затем

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = 1, \quad (\dots)^{(n)} = \frac{d^n(\dots)}{dx^{*n}}, \quad n = 1, \dots, 5$$

Полученную систему уравнений для переменных (2.4) удобно записать в следующей форме:

$$v = \tau^{(1)} \left(\frac{3}{2} i - \frac{6}{5} \text{Kn} \right) - \frac{3}{5} \text{Kn} \tau^{(3)} \left[\frac{9}{4} + 3i \text{Kn} - \frac{2}{5} (K_3 - K_2) i \text{Kn} \right] + 3Zv^{(4)} \quad (2.5)$$

$$\tau^{(4)} \left(\frac{9}{10} i \text{Kn} - \frac{6}{5} \text{Kn}^2 \right) + \tau^{(2)} \left(1 + \frac{23}{10} i \text{Kn} \right) + \tau = D(\tau, v) \quad (2.6)$$

$$Z = \frac{2}{25} \left[K_2 + \theta \left(1 + \frac{4}{3} i \text{Kn} \right) \right] \text{Kn}^2$$

$$D(\tau, v) = \frac{4}{15} i \theta \text{Kn}^2 v^{(3)} - \frac{4}{25} (K_3 - K_2) \text{Kn}^2 \tau^{(4)} + 2iZv^{(5)}$$

Подчеркнем, что в этих уравнениях влияние частоты колебаний и параметров среды на решение проявляется через число Kn (1.4), причем в барнеттовом приближении решение, вообще говоря, зависит от вида межмолекулярного потенциала через значения коэффициентов K , θ (и не зависит при использовании (2.2)).

В нулевом приближении по числу Kn , соответствующем приближению Эйлера, из (2.6) при $\text{Kn} = 0$ получаем дисперсионное соотношение

$$k^2 = -1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad (2.7)$$

В первом (навье-стоксовом) приближении, опуская в (2.6) правую часть, для определения k имеем

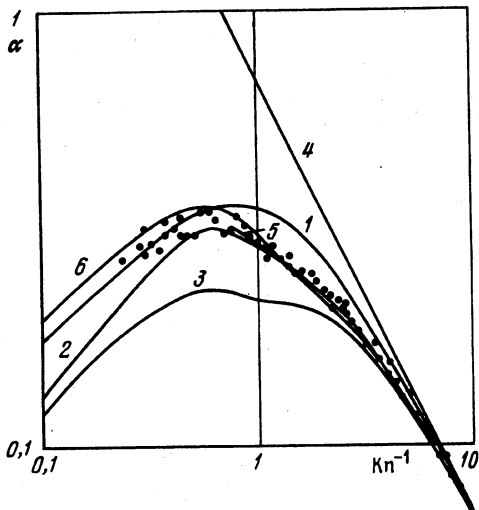
$$L(k) \equiv k^4 \left(\frac{9}{10} i \text{Kn} - \frac{6}{5} \text{Kn}^2 \right) + k^2 \left(1 + \frac{23}{10} i \text{Kn} \right) + 1 = 0 \quad (2.8)$$

Для второго (барнеттова) приближения дисперсионное уравнение имеет вид

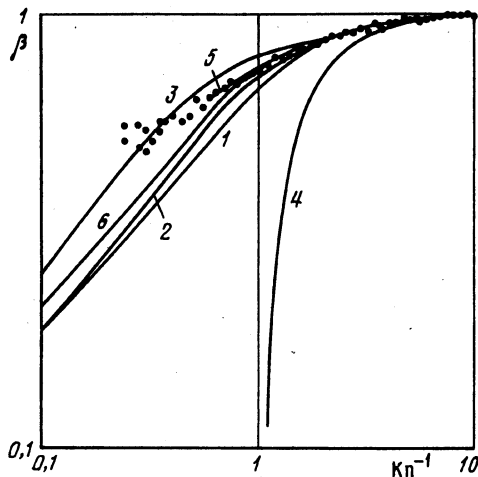
$$k^6 \sigma_1 + k^4 \sigma_2 \text{Kn}^2 + L(k) = 0 \quad (2.9)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{125} \text{Kn}^3 [8 \text{Kn} \theta (K_3 - K_2) - 45 K_2 i], \quad \sigma_2 = \frac{4}{25} \left(\theta + K_3 - \frac{5}{2} K_2 \right)$$

Для максвелловских молекул это уравнение приведено в [7] и с ошибкой в [6]. В третьем (супербарнеттовом) приближении порядок дисперсионного уравнения повышается до восьми.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимость коэффициента поглощения α от обратного числа Кнудсена. Точки – эксперимент [7], кривые – расчет: 1 – приближение Навье – Стокса, 2 – приближение Барнетта, 3 – супербарнеттово приближение [7], 4 – "рафинированное" приближение Барнетта (2.10), 5 – учет 17 членов разложения (3.5) [12], 6 – модификация приближения Барнетта (4.5)

Фиг. 2. Зависимость коэффициента β , обратно пропорционального фазовой скорости, от обратного числа Кнудсена. Обозначения см. на фиг. 1

Каждое из перечисленных уравнений имеет корень, соответствующий звуковой моде. Значения α и β для этого корня представлены на фиг. 1, 2. Экспериментальные данные для инертных газов заимствованы из [7]. Расчетные данные для приближения Барнетта получены при использовании (2.2), в случае супербарнеттово приближения рассматривались только максвелловские молекулы [7].

При $Kn \rightarrow 0$ результаты различных приближений стремятся к газодинамическим значениям, т.е. $\alpha \rightarrow \frac{7}{10} Kn$, $\beta \rightarrow 1$, согласуясь друг с другом и с экспериментальными данными. При увеличении Kn наблюдается отклонение расчетных данных от экспериментальных, происходящее при разных Kn для различных приближений. В свободномолекулярном пределе ($Kn \geq 5$) α и β перестают зависеть от Kn [6], здесь расчетные и экспериментальные данные кардинально различаются, что не удивительно: метод Чепмена – Энскога применим, строго говоря, только при малых Kn .

Из представленных данных видно, что уравнения Навье – Стокса имеют неожиданно широкую область применимости. В то же время уравнения Барнетта вносят существенное уточнение, особенно для α в интервале $0,3 \leq Kn \leq 1,7$. Супербарнеттовы уравнения дают существенно худшие результаты.

Уравнения (2.7)–(2.9) наглядно иллюстрируют известный факт, что успех метода Чепмена – Энскога объясняется содержащимися в решении внепорядковыми слагаемыми. Действительно, разложим решение уравнения (2.9) в ряд по $Kn \ll 1$. В результате получим соответствующее приближению Барнетта "рафинированное", т.е. не содержащее внепорядковых членов, решение

$$\alpha = \frac{7}{10} Kn + O(Kn^3), \quad \beta = 1 - \gamma Kn^2 + O(Kn^4), \quad \gamma = \frac{141}{200} - \frac{\sigma_2}{2} \quad (2.10)$$

В выражении для α первый член дается приближением Навье – Стокса, а для расчета следующего члена разложения нужен учет не только барнеттова, но и супербарнеттово приближений. Первый член для β соответствует приближению Эй-

лера, во второй член вклад дают навье-стоксово и барнеттово приближения. В третий член разложения дает вклад и приближение, следующее за супербарнеттовым. Таким образом, имеет место "перемешивание" членов различных приближений метода Чепмена – Энскога. Аналогичный факт ранее отмечен в теории пограничного слоя [9, 10] – некоторые барнеттовы члены уравнений сохранения имеют тот же порядок величины, что и не учитываемые в уравнениях Прандтля навье-стоксовы члены.

Отбрасывание внепорядковых слагаемых ухудшает точность при не малых числах Kn (см. кривые 4 на фиг. 1, 2, полученные при помощи (2.10)). Для максвелловских молекул $\gamma = 215/200$, т.е. барнеттово слагаемое $-\sigma_2/2$ увеличивает навье-стоксово значение $141/200$ в 1,5 раза. Результаты расчета по (2.10) совпадают с экспериментальными данными с учетом их разброса только при $Kn \leq 0,2$.

Обратимся теперь к другим корням уравнений (2.8), (2.9). Второй корень уравнения (2.8) соответствует так называемой тепловой (или диффузионной) моде. Число граничных условий на колеблющейся пластине позволяет решить задачу с учетом этой моды, однако отсутствуют расчетные и экспериментальные данные, характеризующие "статус" этой моды при не малых числах Kn [6, 7]. Приближение Барнетта добавляет еще один корень. Из обсуждения в [6, 7] следует, что возникновение этого корня – следствие известного дефекта высших приближений метода Чепмена – Энскога, а именно наличия посторонних решений [3]. Заметим, что при $Kn \rightarrow 0$ эти моды быстро затухают, однако при $Kn \sim 1$ они сравнимы со звуковой модой. Наличие дополнительных корней является серьезным дефектом уравнений высших приближений метода Чепмена – Энскога. Следовательно, желательна их модификация.

3. Простейшей модификацией было бы переразложение по Kn цепочки уравнений метода Чепмена – Энскога относительно уравнений Эйлера. В результате в более высоких приближениях получим цепочку неоднородных уравнений Эйлера. Такую же цепочку дает метод Гильберта [3, 9]. Поэтому дальнейшее изложение является иллюстрацией применимости метода Гильберта. Отметим, что строгое доказательство того, что в любом приближении по Kn такое переразложение дает именно цепочку уравнений метода Гильберта, отсутствует. Но для дальнейшего важно, что такое доказательство имеется для приближения Барнетта (см., например, [11]). Итак, будем искать решение для газодинамических переменных в виде

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots, \Gamma_n \approx Kn^n$$

В нулевом приближении из (2.5), (2.6) получим

$$\tau_0^{(2)} + \tau_0 = 0, \quad \nu_0 = \frac{3}{2} i \tau_0^{(1)}$$

откуда

$$\tau_0 = \Gamma_0^* \exp(-ix^*), \quad \nu_0 = \frac{3}{2} \Gamma_0^* \exp(-ix^*) \quad (3.1)$$

В первом приближении из (2.6) с учетом (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \tau_1^{(2)} + \tau_1 &= -\frac{1}{10} i Kn (23\tau_0^{(2)} + 9\tau_0^{(4)}) = \frac{7}{5} i Kn \Gamma_0^* \exp(-ix^*) \\ \tau_1 &= \Gamma_1^* \exp(-ix^*) - \frac{7}{10} Kn x^* \Gamma_0^* \exp(-ix^*) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Наконец, во втором, аналогичном барнеттовому, приближении

$$\begin{aligned} \tau_2^{(2)} + \tau_2 &= -\frac{23}{10} Kn i \tau_1^{(2)} - \frac{9}{10} i Kn \tau_1^{(4)} + \frac{6}{5} Kn^2 \tau_0^{(4)} + D_0(\tau_0, \nu_0) \\ \tau_2 &= \Gamma_2^* \exp(-ix^*) - \frac{7}{10} Kn x^* \Gamma_1^* \exp(-ix^*) + \frac{49}{200} Kn^2 x^{*2} \Gamma_0^* \exp(-ix^*) + \\ &+ i Kn^2 x^* \Gamma_0^* \gamma \exp(-ix^*) \end{aligned}$$

В результате решение можно записать в виде

$$\tau = (\Gamma_0^* + \Gamma_1^* + \Gamma_2^*) \exp(-ix^*) - \frac{7}{10} \text{Kn} x^* \exp(-ix^*) (\Gamma_0^* + \Gamma_1^*) + \frac{49}{200} \Gamma_0^* \text{Kn}^2 x^{*2} \exp(-ix^*) + \Gamma_0^* \gamma \text{Kn}^2 x^* \exp(-ix^*) \quad (3.3)$$

Метод Гильберта дает только одну – звуковую моду. Известный его недостаток [3, 9] – появление "вековых" слагаемых, т.е. членов, пропорциональных степеням x^* . Сама форма решения (3.3) отличается от экспоненциальной формы (2.3). В данном случае легко исправить эти дефекты метода: с погрешностью $O(\text{Kn}^3)$ при фиксированном x^* имеем

$$\tau \approx \tau^* \exp \left\{ -x^* \left[\frac{7}{10} \text{Kn} + i(1 - \gamma \text{Kn}^2) \right] \right\} \quad (3.4)$$

Отрезок ряда по Kn в (3.4), как и следовало ожидать, совпадает с (2.10). Форма решения такая же, как и в методе Чепмена – Энскога, но как отмечалось в разд. 2, точность решения при не малых числах Kn очень низкая.

Анализ разложения безразмерного волнового числа k по Kn проведен в [12]. Решение полученного из линеаризованного уравнения Больцмана дисперсионного уравнения в случае максвелловских молекул представлялось в виде отрезка ряда по Kn

$$\alpha = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_{2n+1} \text{Kn}^{2n+1}, \quad \beta = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_{2n} \text{Kn}^{2n} \quad (3.5)$$

соответствующего звуковой моде. Первые члены совпадают с (2.10). При этом коэффициенты a_m настолько быстро возрастают с ростом m , что практическая применимость (3.5) ограничена интервалом $\text{Kn} < 0,25$. Для улучшения сходимости для $N = 16$ было применено известное преобразование Шенкса, что улучшило согласие полученного таким образом эталонного решения с экспериментальными данными (кривые 5 на фиг. 1, 2). Заметим, что метод Чепмена – Энскога в приближении Барнетта позволяет получить лучшую точность более простым способом.

Итак, можно сказать, что метод Гильберта не позволяет получить приемлемую модификацию высших приближений методов кинетической теории. По сравнению с методом Чепмена – Энскога они обладают большей простотой, но и гораздо меньшей областью применимости.

4. Для получения более точных результатов естественно изменить "базис", относительно которого проводится переразложение цепочки уравнений метода Чепмена – Энскога [5], используя для этого уравнения Навье – Стокса, так как в данном линейном случае система неоднородных усеченных уравнений Барнетта [5] превращается в систему неоднородных уравнений Навье – Стокса. В результате получается последовательность неоднородных линеаризованных уравнений Навье – Стокса.

При таком подходе из (2.6) вместо барнеттова уравнения имеем неоднородное уравнение

$$\tau^{(4)} \left(\frac{9}{10} i \text{Kn} - \frac{6}{5} \text{Kn}^2 \right) + \tau^{(2)} \left(1 + \frac{23}{10} i \text{Kn} \right) + \tau = D_N (\tau_N, v_N) \quad (4.1)$$

Входящие в D_N величины τ_N, v_N рассчитываются при помощи уравнений Навье – Стокса. Из (2.5), (2.6) имеем

$$\tau_N = \tau_N^* \exp(-k_N x^*), \quad v_N = \tau_N \frac{3i}{2k_N} \left(1 + \frac{3}{2} i k_N^2 \text{Kn} \right) \quad (4.2)$$

где k_N – корни навье-стоксова дисперсионного соотношения (2.8), т.е. решения уравнения

$$L(k_N) = 0 \quad (4.3)$$

Подставляя (4.2) в правую часть (4.1), используя (4.3) для исключения членов со старшими степенями k_N и определение σ_2 в (2.9), найдем

$$D_N = -\tau_N^* \text{Kn}^2 k_N^4 E \exp(-k_N x^*), \quad E = \sigma_2 - \frac{9}{25} i \text{Kn} k_N^2 K_2$$

Решение уравнения (4.1) при этом запишется в виде

$$\tau = \left(C - \frac{1}{2} k_N^5 \text{Kn}^2 E \left[2 + k_N^2 \left(1 + \frac{23}{10} i \text{Kn} \right) \right]^{-1} \tau_N^* x^* \right) \exp(-k_N x^*) \quad (4.4)$$

Это решение, как и решение уравнений Навье – Стокса, имеет две моды. В отличие от метода Гильберта слагаемое в (4.4), пропорциональное x^* , не приводит к расходимости, так как $x^* \exp(-\alpha_N x^*) \rightarrow 0$ при $x^* \rightarrow \infty$. Однако для сопоставления с экспериментальными и расчетными данными приведем (4.4) к экспоненциальному виду аналогично (3.3), (3.4). Окончательно имеем

$$\tau = \tau^* \exp(-k_m x^*), \quad k_m = k_N + \delta k \equiv \alpha_m + i\beta_m \quad (4.5)$$

$$\delta k = \frac{2}{25} k_N^5 \text{Kn}^2 \left(\theta + K_3 - \frac{5}{2} K_2 - \frac{9}{4} i \text{Kn} k_N^2 K_2 \right) \left[2 + k_N^2 \left(1 + \frac{23}{10} i \text{Kn} \right) \right]^{-1} \quad (4.6)$$

Формулы (4.5), (4.6) дают дисперсионное соотношение, найденное при помощи неоднородного уравнения Навье – Стокса. Однако при этом понадобилось приведение решения к экспоненциальному виду. Подчеркнем, что вместо этого можно было бы искать приближенное решение в форме (4.5), предполагая $\delta k \ll k_N$.

Легко видеть, что полученная формула для k_m следует из (2.9), если решение последнего искать в виде $k_m = k_N + \delta k$ путем линеаризации по барнеттовым коэффициентам относительно (2.8). Такая аппроксимация в явном аналитическом виде дает зависимость от барнеттовых коэффициентов и поэтому особенно удобна в случае смеси газов.

Результаты расчета α_m и β_m для звуковой моды показаны кривыми б на фиг. 1, 2. Значения β_m близки к барнеттовым в области хорошего согласия последних с экспериментом. Этот вывод справедлив и для α_m в наиболее важном интервале $0,3 \ll \text{Kn} \ll 1,7$ (см. разд. 2), где приближение Барнетта значительно уточняет приближение Навье – Стокса. При больших Kn значение α_m ближе к навье-стоксовому.

Легко получить приближенные значения α и β для звуковой моды, более близкие к барнеттовым. Для этого барнеттовы слагаемые в (2.9) рассчитываются на решении уравнений Навье – Стокса. В результате имеем

$$L(k) = -k_N^6 \sigma_1 - k_N^4 \delta_2 \text{Kn}^2 \quad (4.7)$$

Решение уравнения (4.7) близко к решению уравнения (2.9) там, где последнее хорошо согласуется с экспериментом.

Заключение. Для звуковой моды, исследовавшейся экспериментально, метод Чепмена – Энскога дает аппроксимации безразмерного волнового числа $k(\text{Kn})$, содержащие внепорядковые по числу Кнудсена члены. Последние приводят к тому, что приближение Навье – Стокса имеет весьма широкую область применимости, вплоть до чисел Кнудсена, близких к единице, для β и $\text{Kn} < 0,2$ для α . Приближение Барнетта расширяет область применимости макроскопического описания для α вплоть до $\text{Kn} \approx 1,7$, однако вследствие повышения порядка дисперсионного уравнения дает лишнюю моду, статус которой не определен, а постановка краевых условий не ясна.

Метод Гильберта приводит к цепочке неоднородных уравнений Эйлера, решение которой содержит "вековые" слагаемые, пропорциональные положительным степеням координаты x . При фиксированном x и $Kn \ll 1$ такое решение можно преобразовать к экспоненциальному виду, который совпадает с решением метода Чепмена – Энскога, если в нем отбросить внепорядковые слагаемые разложения $k(Kn)$ в ряд по степеням Kn . Однако отрезок такого ряда, соответствующий приближению Барнетта, имеет гораздо меньшую область применимости по Kn , чем формулы для $k(Kn)$, полученные при помощи уравнений Навье – Стокса и тем более Барнетта.

Рассмотрена модификация метода Чепмена – Энскога, в которой вместо уравнений Барнетта решаются неоднородные уравнения Навье – Стокса. При этом число мод такое же, что и в приближении Навье – Стокса. Приближенное решение уравнений ищется в экспоненциальном виде, так как именно в таком виде представлены известные экспериментальные данные и решения кинетических уравнений. Показано, что точность такой модификации близка к точности решения уравнений Барнетта во всей области применимости последних. Полученное решение имеет вид, удобный для обобщения на случай смесей газов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01244).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhong X., MacCormack R.W., Chapman D.R.* Stabilization of the Burnett equations and application to hypersonic flows // *AIAA Journal*. 1993. V. 31. № 6. P. 1036–1043.
2. *Zhong X., Furumoto G.H.* Augmented Burnett equation solutions over axisymmetrical blunt bodies in hypersonic flow // *J. Spacecraft and Rockets*. 1995. V. 32. № 4. P. 588–595.
3. *Cercignani C.* The Boltzmann equation and its applications. N.Y.: Springer, 1988. 455 p.
4. *Бобылев А.В.* О методах Чепмена – Энскога и Грэда решения уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 71–75.
5. *Бузыкин О.Г., Галкин В.С., Носик В.И.* Модификация уравнений Барнетта и задача о структуре ударной волны // Изв. РАН. МЖТ. 1998. № 3. С. 164–176.
6. *Sherman F.S., Talbot L.* Experiment versus kinetic theory for rarefied gases // *Rarefied Gas Dynamics*. London: Pergamon Press, 1960. P. 161–191.
7. *Greenspan M.* Transmission of sound waves in gases at very low pressures // *Physical Acoustics. Properties of gases, liquids and solutions*. N.Y.; L.: Acad. Press, 1965. V. 2. Pt A. P. 1–45.
8. *Foch J.D., Ford G.W.* The dispersion of sound in monatomic gases // *Studies in Statistical Mechanics*. Amsterdam: North-Holland, 1970. V. 5. P. 101–231.
9. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
10. *Галкин В.С.* Об эффектах скольжения при обтекании тел гиперзвуковым слаборазреженным потоком // Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 27–36.
11. *Галкин В.С.* Вывод уравнений медленных течений смесей газов из уравнения Больцмана // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 4. С. 40–47.
12. *Foch J.D., Losa M.F.* Improved kinetic theory of sound propagation // *Phys. Rev. Lett.* 1972. V. 28. № 20. P. 1315–1317.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1997