

УДК 532.51.013.2 : 532.135

© 1999 г. А.Г. ПЕТРОВ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛАСТИНАМИ

Задачи нестационарных вязкопластичных течений сводятся к решению нелинейных краевых задач, представляющих серьезные математические трудности. Трудности связаны с вычислением зависящей от времени границы твердого ядра по дополнительному на ней краевому условию. Краевая задача по форме напоминает известную задачу Стефана для уравнения теплопроводности, но с иным краевым условием на свободной границе. На основе идеи метода Слезкина – Тарга в [1, 2] представлено приближенное решение задачи о торможении вязкопластичной среды. Описание различных подходов к исследованию нестационарных вязкопластичных течений представлено в монографии [3]. В ней приводится единственное точное решение для нестационарного течения между двумя неподвижными пластинами.

Получено четыре многопараметрических семейства точных решений. Подробно исследуются течения между двумя неподвижными пластинами. Первое семейство описывает торможение течения до полной остановки. Второе семейство определяет развитие течения из состояния покоя под действием нарастающего во времени градиента давления.

Третье семейство решений описывает развитие течения из состояния покоя под действием постоянного градиента давления, превышающего пороговое значение. Нижняя пластина неподвижна, а верхняя движется с постоянным ускорением. Четвертое семейство определяет процесс торможения течения при постоянном градиенте давления, меньшего порогового значения. При некоторых значениях параметра обнаружен эффект торможения вязкопластичной среды за счет нарастания области жесткого ядра при неизменном течении в области деформационного течения.

Обнаружены режимы течений, в которых профиль скорости в области деформационного течения не меняется, за исключением тонкого пограничного слоя вблизи границы ядра. Толщина слоя обратно пропорциональна квадрату параметра семейства таких течений.

1. Общая краевая задача. Рассматривается течение вязкопластичной среды (в области $0 \leq z \leq 2h$) между двумя параллельными пластинами $z = 0$, $z = 2h$. Движение среды происходит под действием градиента давления $\partial p / \partial x$, направленного по оси x и зависящего от времени T . Поле скорости среды $u(T, z)$ направлено по оси x , зависит от времени T , поперечной координаты z и в области деформационного течения ($\partial u / \partial z \neq 0$) удовлетворяет уравнениям движения среды

$$\rho \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1)$$

где τ – касательное напряжение на площадке $z = \text{const}$, зависящее определенным образом от скорости деформации $\partial u / \partial z$.

Для вязкопластичного течения характерно наличие твердого ядра, ($\partial u / \partial z = 0$), границы которого $z_1(T)$ и $z_2(T)$ зависят от времени T . Внутри ядра касательное напряжение $|\tau|$ не превосходит предельного напряжения сдвига τ_0 . На границах ядра $\tau(z_1) = \tau_0$, $\tau(z_2) = -\tau_0$. Частицы среды в области ядра движутся с одинаковым ускорением, которое находится из закона Ньютона. Таким образом, в области ядра получим

$$z_1(T) \leq z \leq z_2(T): \quad \partial v / \partial z = 0, \quad |\tau| \leq \tau_0, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial T} = -\frac{2\tau_0}{z_2 - z_1} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.2)$$

Вне ядра скорость деформации отлична от нуля, τ находится из закона Шведова – Бингама и уравнение движения (1.1) принимает следующий вид:

$$0 \leq z \leq z_1, \quad z_2 \leq z \leq 2h: \quad |\tau| \geq \tau_0$$

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial T} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.4)$$

Перейдем к формулировке начальных и граничных условий. В начальный момент $T = 0$ следует задать значения границ ядра и начальное распределение скорости

$$v(0, z) = v_0(z), \quad z_1(0) = z_{10}, \quad z_2(0) = z_{20} \quad (1.5)$$

На пластинах скорость среды совпадает со скоростью движения пластин $u_0(T), u_2(T)$

$$v(T, 0) = u_0(T), \quad v(T, 2h) = u_2(T) \quad (1.6)$$

Условие непрерывности τ на границах ядра с помощью (1.2) и (1.3) запишется в виде

$$v'_z(T, z_1) = v'_z(T, z_2) = 0 \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.2) и (1.4) и непрерывности $\partial v / \partial T$ и $\partial p / \partial x$ следует

$$v''_{zz}(T, z_1) = v''_{zz}(T, z_2) = -\frac{2\tau_0}{\mu(z_2 - z_1)} \quad (1.8)$$

Введем безразмерные переменные: время t , координату Z , градиент давления $P(t)$, скорость $V(t, Z)$ и границы ядра $Z_1(t), Z_2(t)$

$$T = \frac{\rho h^2}{\mu} t, \quad z = Zh, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau_0}{h} P; \quad v = \frac{h\tau_0}{\mu} V, \quad z_1 = Z_1 h, \quad z_2 = Z_2 h \quad (1.9)$$

Для определения скорости $V(t, Z)$ и границ ядра $Z_1(t), Z_2(t)$ из (1.4)–(1.9) получим краевую задачу

$$0 \leq Z \leq Z_1(t), \quad Z_2(t) \leq Z \leq 2: \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + P(t)$$

$$V(t_0, Z) = V_0(Z), \quad Z_1(t_0) = Z_{10}, \quad Z_2(0) = Z_{20} \quad (1.10)$$

$$V(t, 0) = U_0(t), \quad V(t, 2) = U_2(t)$$

$$V'_z(t, Z_1) = V'_z(t, Z_2) = 0$$

$$V''_{zz}(t, Z_1) = V''_{zz}(t, Z_2) = -\frac{2}{(Z_2 - Z_1)}$$

Краевая задача (1.10) является аналогом задачи Стефана для уравнения теплопроводности. Для свободных границ $Z_1(t), Z_2(t)$ ставятся условия, отличающиеся от условий в задаче Стефана.

Касательное напряжение найдется с помощью (1.2), (1.3) и (1.9)

$$\tau / \tau_0 = 1 + V'_z(t, Z), \quad 0 \leq Z \leq Z_1(t)$$

$$|\tau/\tau_0| \leq 1, \quad Z_1(t) \leq Z \leq Z_2(t) \quad (1.11)$$

$$\tau/\tau_0 = -1 + V_z'(t, Z), \quad Z_2(t) \leq Z \leq 2$$

В [3] приводится точное решение, в котором ядро примыкает к нижней пластине, а давление меняется по специальному закону

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 2a_2\sqrt{t}, \quad P(t) = C/\sqrt{t}$$

В области деформационного течения, примыкающего к верхней пластине $Z_2 \leq Z \leq 2$, решение ищется в виде

$$V(t, Z) = \sqrt{t} \left[-\frac{4}{a_2} f_1(\xi) + 2C \right], \quad \xi = \frac{Z}{2\sqrt{t}}, \quad a_2 \leq \xi \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (1.12)$$

где ξ – автомодельная переменная, для функции $f_1(\xi)$ получена следующая краевая задача:

$$f_1''(\xi) + 2\xi f_1'(\xi) - 2f_1(\xi) = 0, \quad f_1(a_2) = 0, \quad f_1'(a_2) = 1$$

Пластины в этом решении движутся специальным образом, так что их скорости соответствуют значениям $V(t, 0)$, $V(t, 2)$. Вид функции $f_1(\xi)$ приводится в Приложении.

Ниже излагается общий метод построения точных решений. Будут получены несколько серий точных решений, одна из которых существенно обобщает (1.12). Особое внимание будет уделено точным решениям для нестационарных течений между неподвижными пластинами.

2. Метод получения автомодельных решений. Поле скорости в области деформационного течения $0 \leq Z \leq Z_1$ или $Z_2 \leq Z \leq 2$ при $t \geq 0$ ищется в виде

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\sqrt{t})^k f_k(\xi) + \int P(t) dt, \quad \xi = \frac{Z - b_i}{2\sqrt{t}}, \quad Z_i = b_i + 2a_i\sqrt{t}, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

Автомодельная переменная ξ и законы движения границ ядра $Z_i(t)$ подобраны так, что на границе $Z = Z_i(t)$ автомодельная переменная постоянна, $\xi = a_i$, и краевая задача (1.10) становится линейной.

Действительно, подставляя (2.1) в уравнение (1.10), получим обыкновенные дифференциальные по переменной ξ уравнения для функций $f_k(\xi)$

$$f_k'' + 2\xi f_k' - 2kf_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Подчиним функцию f_k следующим условиям на границе $\xi = a_i$:

$$f_k'(a_i) = 0, \quad f_k''(a_i) = 1, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

Функция f_k , определяемая из линейной краевой задачи (2.2)–(2.3), зависит от переменной ξ и параметра a_i : $f_k = f_k(\xi, a_i)$.

С помощью (2.1) и (2.3) левая часть краевого условия (1.10) при $Z = Z_i$ представляется в виде ряда

$$V_z''(t, Z_i) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\sqrt{t})^{k-2} \quad (2.4)$$

Правую часть (1.10) с помощью выражений для Z_i (2.1) можно представить в виде

$$\frac{-2}{Z_2 - Z_1} = \frac{-2}{b_2 - b_1 + (a_2 - a_1)\sqrt{t}}$$

Эту функцию можно разложить в ряды по положительным либо отрицательным

степеням \sqrt{t}

$$\left| \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \sqrt{t} \right| < 1: \quad \frac{-2}{Z_2 - Z_1} = \frac{-2}{b_2 - b_1} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \sqrt{t} \right)^{k-2} \quad (2.5)$$

$$\left| \frac{b_1 - b_2}{(a_2 - a_1)\sqrt{t}} \right| < 1: \quad \frac{-2}{Z_2 - Z_1} = \frac{-2}{a_2 - a_1} \sum_{k=-\infty}^1 \left(\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \right)^{k-1} (\sqrt{t})^{k-2} \quad (2.6)$$

Из тождественного равенства рядов (2.4) и (2.5) находим коэффициенты в (2.1)

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{-4}{b_2 - b_1}, \quad c_k = \frac{-4}{b_2 - b_1} \left(\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \right)^{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots \quad (2.7)$$

Тогда функция $V(t, Z)$, определяемая рядом (2.1) с коэффициентами (2.7), будет удовлетворять уравнению и условиям (1.10) на свободной границе. Полученное точное решение содержит произвольную функцию $P(t)$ и четыре произвольных параметра a_1, a_2, b_1, b_2 . Точное решение соответствует следующим начальным и граничным условиям на пластинах:

$$V(t_0, z), \quad Z_i(t_0) = b_i + a_i \sqrt{t_0}, \quad V(t, 0), \quad V(t, 2)$$

Нетрудно выписать второе разложение точного решения по обратным степеням \sqrt{t} , коэффициенты которого найдутся из тождественного равенства (2.4) и (2.6).

Аналогично можно построить двойственные серии точных решений. При $t \leq 0$ в области деформационного течения $0 \leq Z \leq Z_1$ или $Z_2 \leq Z \leq 2$ ищется в виде

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\sqrt{-t})^k F_k(\eta) + \int P(t) dt, \quad \eta = \frac{Z - B_i}{2\sqrt{-t}}, \quad Z_i = B_i + 2A_i \sqrt{-t}, \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

Формально предлагаемая серия решений отличается от (2.1) тем, что в ней переменные t и ξ заменены соответственно на $-t$ и η , функция f заменена на F и постоянные c_k, a_i, b_i заменены соответственно на C_k, A_i, B_i . Для функции $F_k(\eta)$ получим уравнение, похожее на (2.2)

$$F_k'' - 2\eta F_k' + 2kF_k = 0 \quad (2.9)$$

Условия на границе оставляем такие же, как и (2.3)

$$F_k'(A_i) = 0, \quad F_k''(A_i) = 1, \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

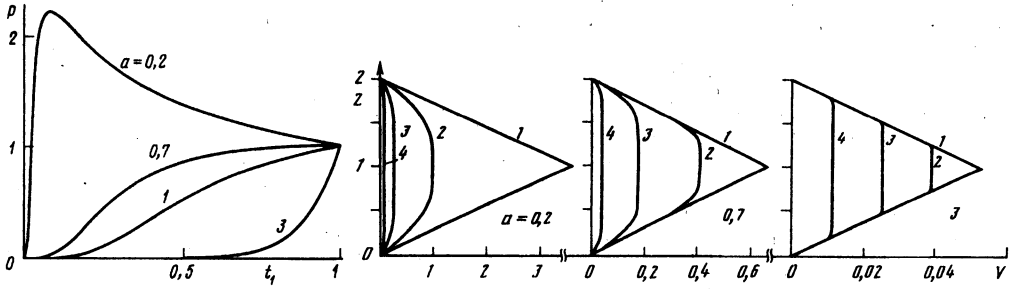
Аналогично функции $f_k = f_k(\xi, a_i)$ функция F зависит от двух аргументов: переменной η и параметра A_i : $F_k = F_k(\eta, A_i)$. Функции f_k и F_k удовлетворяют следующим условиям симметрии: $f_k(-\xi, -a_i) = f_k(\xi, a_i)$; $F_k(-\eta, -A_i) = F_k(\eta, A_i)$. Их вид приводится в приложении.

Коэффициенты в (2.8) находятся по формулам, аналогичным (2.7)

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{-4}{B_2 - B_1}, \quad C_k = \frac{-4}{B_2 - B_1} \left(\frac{A_1 - A_2}{B_2 - B_1} \right)^{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots \quad (2.11)$$

Следует выделить 4 вырожденных случая $b_1 = b_2, B_1 = B_2, a_1 = a_2, A_1 = A_2$. В этих случаях ряды (2.1) и (2.8) превращаются в одночленные выражения. Анализ этих наиболее простых решений представляется ниже.

3. Серия точных решений при отсутствии ядра в начальный момент времени. В первой серии точных решений принимаем $b_1 = b_2 = b$. Тогда точное решение (2.1)



Фиг. 1. Зависимости $P(t_1)$, $t_1 = t/t_0$ при $a = 0,2; 0,7; 1; 3$

Фиг. 2. Профили скорости в моменты времени $t_1 = t/t_0 = 0; 1/16; 1/4; 9/16; 1$ (кривые 1-4) при $a = 0,2; 0,7; 3$

имеет только один коэффициент, отличный от нуля: $c_1 = -8/(a_2 - a_1)$

$$Z_1 = b + 2a_1\sqrt{t}, \quad Z_2 = b + 2a_2\sqrt{t}, \quad \xi = \frac{Z-b}{2\sqrt{t}} \quad (3.1)$$

$$V(t, z) = \int P(t)dt - \frac{4\sqrt{t}}{a_2 - a_1} f_1(\xi, a_i) \quad (3.2)$$

$$0 \leq Z \leq Z_1: \quad i=1, \quad Z_2 \leq Z \leq 2: \quad i=2, \quad Z_1 \leq Z \leq Z_2: \quad f_1 = 1/2$$

$$\frac{\tau(t, Z)}{\tau_0} = (-1)^{i+1} - \frac{2}{a_2 - a_1} \frac{\partial f_1(\xi, a_i)}{\partial \xi} \quad (3.3)$$

$$0 \leq Z \leq Z_1: \quad i=1, \quad Z_2 \leq Z \leq 2: \quad i=2$$

Внутри ядра $Z_1 \leq Z \leq Z_2$ напряженное состояние среды не определено и подчинено условию $|\tau/\tau_0| \leq 1$. Решение (3.1)–(3.3) содержит три произвольных параметра b, a_1, a_2 и существенно обобщает известное решение (1.12) с одним параметром.

Течение между двумя неподвижными пластинами. Полагаем в серии (3.1)–(3.3) $V(t, 0) = V(t, 2)$, тогда из (3.1)–(3.2) получим

$$a_2 = -a_1 = a, \quad b = 1, \quad \int P(t)dt = \frac{2\sqrt{t}}{a} f_1\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, a\right) \Rightarrow P(t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \exp\left(a^2 - \frac{1}{4t}\right) \quad (3.4)$$

В результате получим из (3.1)–(3.3) течение между двумя неподвижными пластинами под действием градиента давления (3.4). На отрезке времени $t \in (0, t_0)$, $t_0 = 1/(4a^2)$ функция $P(t)$ меняется от значения $P(0) = 0$ до значения $P(t_0) = 1$.

При $t = 1/2$ функция (3.4) имеет абсолютный максимум, равный $P_{\max} = \exp(a^2)/(a\sqrt{2}e)$. Если $t_0 \leq 1/2$ ($a \geq \sqrt{2}/2$), то функция $P(t)$ монотонно возрастает на отрезке $t \in (0, t_0)$. При $t_0 > 1/2$ ($a < \sqrt{2}/2$) функция $P(t)$ не монотонна. На фиг. 1 представлены функции $P(t)$ при $a = 0,2; 0,707; 1; 3$.

Поле скорости (3.2) в области $(0, Z_1)$ выражается через функцию $f_1(\xi, -a)$, $\xi = (Z - 1)/(2\sqrt{t})$, которая по свойству симметрии равна $f_1(\xi, a)$, $\xi = (1 - Z)/(2\sqrt{t})$, откуда найдем

$$0 \leq Z \leq Z_1 = 1 - 2a\sqrt{t}; \quad 1 + 2a\sqrt{t} = Z_2 \leq Z \leq 2, \quad 0 \leq t \leq t_0:$$

$$V(t, Z) = \frac{2\sqrt{t}}{a} \left[f_1\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, a\right) - f_1(\xi, a) \right], \quad a \leq \xi = \frac{1-Z}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (3.5)$$

$$Z_1 = 1 - 2a\sqrt{t} \leq Z \leq 1 + 2a\sqrt{t} = Z_2: V(t, Z) = \frac{2\sqrt{t}}{a} \left[f_1\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, a\right) - \frac{1}{2} \right] \quad (3.6)$$

Ширина ядра увеличивается по закону $4a\sqrt{t}$. В начальный момент $t = 0$ профиль скорости имеет вид треугольника (фиг. 2)

$$0 \leq Z \leq 1: V(0, Z) = \frac{\exp(a^2)}{a} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \text{Erf}(a) \right] Z \quad (3.7)$$

С течением времени область твердого ядра увеличивается, а движение среды замедляется. Таким образом, представленное решение описывает процесс торможения среды от треугольного профиля скорости при $t = 0$ до полной остановки при $t = t_0$.

Интересно, что при $a < 0,7$ на последнем отрезке времени движения градиент давления может превышать пороговое значение $P(t) > 1$. В этом случае торможение происходит по инерции.

Касательное напряжение в области деформационного течения находится из (3.3) с учетом (3.5)

$$\tau(t, Z) = \pm 1 + \frac{\partial V}{\partial Z}, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\exp(a^2)}{a} (\text{Erf } \xi - \text{Erf } a) \quad (3.8)$$

Обозначение специальной функции Erf взято из [4]. При достаточно большом значении параметра a справедлива асимптотика

$$\frac{\partial V}{\partial Z} \approx \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2a\xi} \exp(a^2 - \xi^2), \quad a^2 \gg 1 \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что при $a^2 \gg 1$ профиль скорости линейный $V = Z/(2a^2)$ всюду, кроме тонкого пограничного слоя вблизи границы ядра $\xi = a$. Толщина пограничного слоя определяется из оценки $\delta(\xi^2) = 2a\delta\xi \sim 1$. Откуда с помощью (3.5) находим толщину пограничного слоя δZ , в котором происходит гладкий переход от линейного профиля с наклоном $\partial V/\partial Z = 1/(2a^2)$ к профилю с нулевым наклоном $\partial V/\partial Z = 0$ $\delta Z \sim \sqrt{t/t_0}/a^2$.

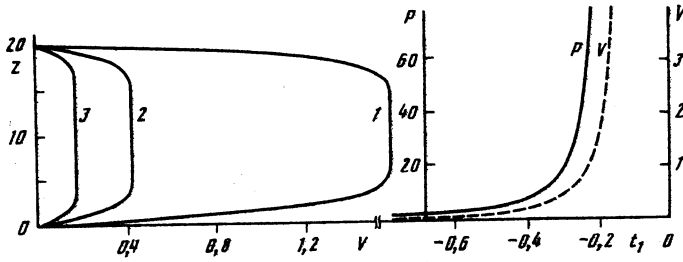
Таким образом, при достаточно большом значении параметра a профиль скорости в каждый момент времени имеет вид трапеции. Верхнее основание с постоянным замедлением приближается к нижнему, а наклон боковых сторон остается неизменным. В окрестности середины между пластинами происходит нарастающее с течением времени "отверждение" среды. Вблизи пластин деформационное течение остается неизменным (фиг. 2, $a = 3$).

4. Двойственная серия точных решений при отсутствии ядра в конечный момент времени. Полагая $B_1 = B_2 = B$, получим в ряде (2.8) единственный отличный от нуля коэффициент, равный $C_1 = -8/(A_2 - A_1)$. Решение на отрезке времени $-t_0 \leq t \leq 0$ получится формальной заменой в формулах (3.1)–(3.3) a_1, a_2, b, f, t на $A_1, A_2, B, F, -t$ соответственно. Эта серия содержит также 3 параметра B, A_1, A_2 и описывает другой по сравнению с предыдущей серией физический процесс. Ширина ядра будет убывать с течением времени и в конечный момент времени $t = 0$ обратится в ноль.

Течение между двумя неподвижными пластинами. В этом случае следует принять $A_2 = -A_1 = A, B = 1$

$$\int P(t) dt = \frac{2\sqrt{-t}}{A} F_1\left(\frac{1}{2\sqrt{-t}}, A\right), \quad P(t) = \frac{1}{2A\sqrt{-t}} \exp\left(-A^2 - \frac{1}{4t}\right) \quad (4.1)$$

Течение начинается из состояния покоя в момент времени $t = t_0 = -1/(4A^2)$, когда давление $P(t)$ превышает пороговое значение $P(t) \geq 1$. Происходит разгон течения под



Фиг. 3. Профили скорости в моменты времени $t_1 = t/t_0 = -0,4; -0,3; -0$, при $A = 1$ (кривые 1-3) (а) и зависимости $P(t_1)$, $t_1 = t/t_0$ и скорости ядра $V(t_1)$ (б)

действием увеличивающегося во времени градиента давления на интервале $t \in (-t_0, 0)$. При этом $P(t)$ и скорость $V(t, Z)$ возрастают неограниченно: $1 \leq P(t) < \infty$, $0 \leq V(t, Z) < \infty$.

Поле скорости в области деформационного течения $0 \leq Z \leq Z_1 = 1 - 2A\sqrt{-t}$; $1 + 2A\sqrt{-t} = Z_2 \leq Z \leq 2$ представляется в виде

$$\eta = \left| \frac{1-Z}{2\sqrt{-t}} \right|, \quad A \leq \eta \leq \frac{1}{2\sqrt{-t}}, \quad V(t, Z) = \frac{2\sqrt{-t}}{A} \left[F_1 \left(\frac{1}{2\sqrt{-t}}, A \right) - F_1(\eta, A) \right] \quad (4.2)$$

Ядро заполняет область $1 - 2A\sqrt{-t} = Z_1 \leq Z \leq Z_2 = 1 + 2A\sqrt{-t}$, ширина которой уменьшается по закону $4A\sqrt{-t}$. Скорость в ядре на интервале $t \in (-t_0, 0)$ возрастает по закону

$$V(t, Z) = \frac{2\sqrt{-t}}{A} \left[F_1 \left(\frac{1}{2\sqrt{-t}}, A \right) + \frac{1}{2} \right] \quad (4.3)$$

В начальный момент времени $t = -t_0$ среда покоится. С течением времени скорость каждой точки среды внутри области быстро растет и стремится к бесконечности при $t \rightarrow -0$ (фиг. 3).

Касательное напряжение в области деформационного течения определяется формулой

$$\tau(t, Z) = \pm 1 + \frac{\partial V}{\partial Z}, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\exp(-A^2)}{A} (\operatorname{Erfi}(\eta) - \operatorname{Erfi}(A))$$

Обозначение специальной функции Erfi взято из [4].

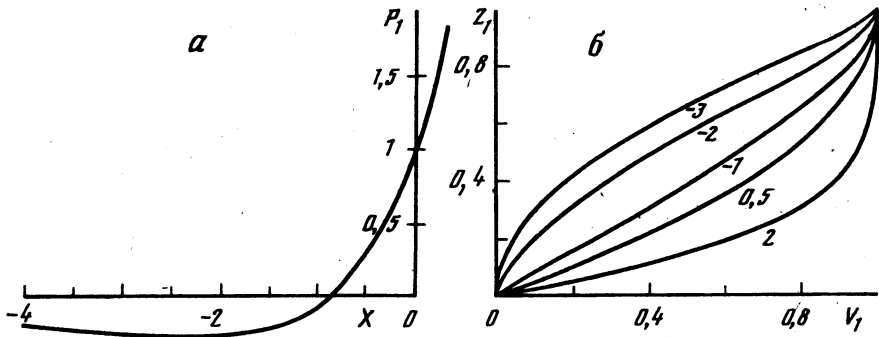
5. Серия точных решений с постоянной шириной ядра. Во второй серии точных решений примем в законе движения границ ядра (2.1) равными параметры a_1 и a_2

$$Z_i = b_i + 2a\sqrt{t}, \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

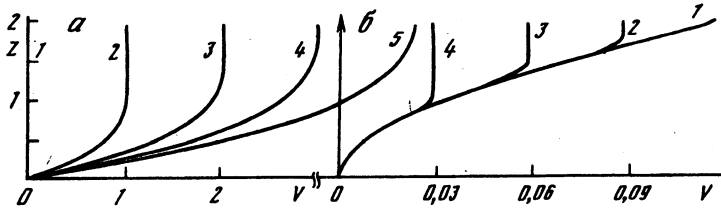
Ширина ядра постоянна $\Delta Z = Z_2 - Z_1 = b_2 - b_1$ и не зависит от времени, а область ядра сдвигается пропорционально \sqrt{t} . Правая часть $-2/(Z_2 - Z_1)$ в граничном условии в (1.10) содержит множитель t^0 . Следовательно, точное решение представляется в виде (2.1) при $k = 2$ и соответствующем выборе постоянной c_2 .

Автомодельные переменные в первой $0 \leq Z \leq Z_1$ и второй $Z_2 \leq Z \leq 2$ деформационных областях обозначим соответственно через ξ_1 и ξ_2

$$\xi_i = (Z - b_i)/(2\sqrt{t}), \quad i = 1, 2 \quad (5.2)$$



Фиг. 4. Функция перепада давления $P/P_* = P_1(X)$ (а). Профили скорости $V_1 = V/V_0$, $Z_1 = Z/Z_0$ при $a = 2, 0,5$ $A = 1; 2; 3$ и $P_1 = 193; 1, 59; -0,069; -0,2; -0,0761$ соответственно (б)



Фиг. 5. Развитие течения из состояния покоя при $a = 1$, $P/P_* = 5,06$, (а). Профили скорости $V(t, Z)$ при $t/t_0 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ (кривые 1-5) (а). Торможение течения при $A = 3$, $P/P_* = 0,076$ при $t/t_0 = -1; -0,75; -0,5; -0,25; 0$ (кривые 1-5) (б)

Поле скорости будет выражаться через функцию f_2

$$V(t, z) = \int (P(t)dt - \frac{8t}{b_2 - b_1} f_2(\xi_i, a_i)) \quad (5.3)$$

$$0 \leq Z \leq Z_1: i=1, \quad Z_2 \leq Z \leq 2: i=2, \quad Z_1 \leq Z \leq Z_2: f_2 = 1/4$$

Аналогично с помощью (2.8) строится двойственная ко второй серия с заменой в (5.1)–(5.3) t на $-t$. Границы ядра представляются в виде

$$Z_i = B_i + 2A\sqrt{-t}, \quad i=1,2 \quad (5.4)$$

и вводятся автомодельные переменные в первой и второй областях деформационного течения

$$\eta_i = (Z_i - B_i)/(2\sqrt{-t}), \quad i=1,2 \quad (5.5)$$

Тогда решение представляется в виде

$$V(t, Z) = \int P(t)dt + \frac{8t}{B_2 - B_1} F_2(\eta_i, A_i) \quad (5.6)$$

$$0 \leq Z \leq Z_1: i=1, \quad Z_2 \leq Z \leq 2: i=2, \quad Z_1 \leq Z \leq Z_2: F_2 = -1/4$$

6. Течения второй серии при постоянном градиенте давления. Рассмотрим подробнее частный случай, когда нижняя пластина $Z = 0$ неподвижна, а градиент давления постоянный и не зависит от времени.

Параметры течения задаются следующим образом: $b_1 = 0$, $b_2 = \Delta Z \geq 2$ в серии (5.1)–

(5.3) на отрезке времени $t \in (-t_0, 0)$, $t_0 = 1/a^2$ и $B_1 = 0$, $B_2 = \Delta Z \leq 2$ в серии (5.4)–(5.6) на отрезке времени $t \in (0, t_0)$, $t_0 = 1/a^2$. Тогда поле скорости в деформационной области представляется в виде

$$V(t, Z) = t(P_{\pm} - \Phi_{\pm}), \quad 0 \leq Z \leq Z_{\pm}(t)$$

$$\Phi_{+} = \frac{8}{\Delta Z} f_2\left(\frac{Z}{2\sqrt{t}}, a\right), \quad P_{+} = \frac{2}{\Delta Z} [1 + 2a \exp(a^2) \operatorname{Erf}(a)]$$

$$Z_{+} = 2a\sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq t_0 = 1/a^2 \quad (6.1)$$

$$\Phi_{-} = -\frac{8}{\Delta Z} F_2\left(\frac{Z}{2\sqrt{-t}}, A\right), \quad P_{-} = \frac{2}{\Delta Z} [1 - 2A \exp(A^2) \operatorname{Erfi}(A)]$$

$$Z_{-} = 2A\sqrt{-t}, \quad -t_0 = -1/A^2 \leq t \leq 0$$

В ядре, примыкающем к верхней пластине, скорость изменяется линейно со временем по закону

$$V(t, Z) = t(P - P_{*}), \quad P_{*} = 2/\Delta Z, \quad Z_{\pm}\sqrt{t} \leq Z \leq 2 \quad (6.2)$$

Верхняя пластина движется со скоростью ядра (6.2) с постоянным ускорением или замедлением в зависимости от того, больше или меньше значение градиента давления $P = P_{\pm}$ своего порогового значения P_{*} . При $P > P_{*}$ течение начинается из состояния покоя и ускоряется. При $P < P_{*}$ в начальный момент времени $t = -t_0$ течение имеет некоторый профиль скорости и замедляется до полной остановки в момент времени $t = 0$.

Градиент давления $P = P_{\pm}$ (6.1) можно представить на одном графике (фиг. 4, а), $X = a^2$ при $X > 0$ либо $X = -A^2$ при $X < 0$, $P_1 = P/P_{*}$. Функция $P_1(X)$ принимает наименьшее значение $-0,284$ при $X = -2,26$, $A = \sqrt{2,26} = 1,5$. Каждому значению параметра X соответствует одно значение $P_1 \geq -0,284$ и решение, определяющее либо разгон течения при $P_1 > 1$ ($X > 0$), либо торможение при $-0,284 \leq P_1 < 1$ ($X < 0$). Для каждого отрицательного значения $0 > P_1 > -0,284$ существует два решения, соответствующих двум параметрам X : $X < -2,26$, $-2,26 < X < 0$. Все профили скорости деформационной области в различные моменты времени аффинно подобны и определяются функциями $f_2(a, \xi)$ или $F_2(A, \eta)$ и соответствующим значением градиента давления P_1 . На фиг. 4, б изображено несколько профилей этого семейства при $a = 2, 0,5$ $A = 1; 2; 3$. Соответствующие им значения градиента давления $P_1 = 1,93; 1,59; -0,069; -0,2; -0,0761$ можно найти по графику фиг. 4, а. На каждом профиле указано значение параметра a при ускорении течения, либо параметра $-A$ при замедлении. По вертикальной оси откладывается Z/Z_0 , а по горизонтальной $V(t, Z)/V_0$, $V_0 = V(t, Z_0)$. Профили при $X > -1,2$; $A < 1,1$; $a \geq 0$ – выпуклые, при $X < -1,2$ профили имеют точку перегиба. В пределе $X \rightarrow \infty$ профиль скорости имеет форму параболы.

На фиг. 5, а представлено развитие течения из состояния покоя при $a = 1$, $P/P_{*} = 5,06$. На фиг. 5, б представлен процесс торможения течения при значении параметра $A = 3$, $P/P_{*} = 0,076$, $t/t_0 = -1; -0,75; -0,5; -0,25; 0$. В последний момент времени $t = 0$ среда останавливается.

При достаточно большом значении параметра A процесс торможения происходит при отсутствии градиента давления ($P = 0$). Происходит постепенное "отверждение" среды. "Отверждение" распространяется от верхней движущейся пластины по направлению к нижней. Область деформационного течения примыкает к нижней пластине. Профили скорости имеют форму одной и той же параболы с осью, совпадающей с нижней пластиной. Таким образом, в области деформационного течения никаких

изменений не происходит. Уменьшается лишь ширина этой области. Аналогичный эффект был описан ранее (см. фиг. 2, $a = 3$).

7. Приложение. Краевую задачу (2.2), (2.3) удобно записать в виде

$$f_k'' + 2\xi f_k' - 2k f_k = 0, \quad f_k'(a) = 0, \quad f_k''(a) = 1 \quad (7.1)$$

Решение (7.1) имеет вид

$$f_k(\xi, a) = (-1)^k \alpha_k \exp(a^2) (q_{k-1}(a) h_k(\xi) - h_{k-1}(a) q_k(\xi))$$

$$\alpha_k = 1/(k!2^k)$$

$$h_k(\xi) = \exp(-\xi^2) \frac{d^k}{d\xi^k} \exp(\xi^2), \quad q_k(\xi) = \exp(-\xi^2) \frac{d^k}{d\xi^k} (\exp(\xi^2) \operatorname{Erf}(\xi)), \quad \operatorname{Erf}(\xi) = \int_0^\xi \exp(-x^2) dx$$

Функции $h_k(\xi)$, $q_n(\xi)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 2\xi; \quad h_{n+1} = 2\xi h_n + 2n h_{n-1}$$

$$q_0 = \operatorname{Erf}(\xi), \quad q_1 = 2\xi \operatorname{Erf}(\xi) + \exp(-\xi^2); \quad q_{n+1} = 2\xi q_n + 2n q_{n-1}$$

Для производных справедливы формулы

$$h_n' = 2n h_{n-1}, \quad q_n' = 2n q_{n-1}$$

Решение двойственной краевой задачи (2.9), (2.10)

$$F_k'' - 2\eta F_k' + 2k F_k = 0, \quad F_k'(A) = 0, \quad F_k''(A) = 1$$

представляется по аналогичным формулам

$$F_k(\eta, A) = -\alpha_k \exp(A^2) (Q_{k-1}(A) H_k(\eta) - H_{k-1}(A) Q_k(\eta))$$

$$H_k(\eta) = (-1)^k \exp(\eta^2) \frac{d^k}{d\eta^k} \exp(-\eta^2)$$

$$Q_k(\eta) = (-1)^k \exp(\eta^2) \frac{d^k}{d\eta^k} (\exp(-\eta^2) \operatorname{Erfi}(\eta))$$

$$\operatorname{Erfi}(\eta) = \int_0^\eta \exp(x^2) dx$$

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2\eta, \quad H_{n+1} = 2\eta H_n - 2n H_{n-1}$$

$$Q_0 = \operatorname{Erfi}(\eta), \quad Q_1 = 2\eta \operatorname{Erfi}(\eta) - \exp(\eta^2); \quad Q_{n+1} = 2\eta Q_n - 2n Q_{n-1}$$

Для производных справедливы формулы

$$H_n' = 2n H_{n-1}, \quad Q_n' = 2n Q_{n-1}$$

Функции $H_k(\eta)$ являются известными полиномами Эрмита, $h_k(\eta)$ – полиномами Эрмита мнимого аргумента.

Для вычисления функций $\operatorname{Erf}(\xi)$ и $\operatorname{Erfi}(\eta)$ полезны разложения для малых и больших значений аргументов соответственно [4]

$$\operatorname{Erf}(\xi) = \exp(-\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(3/2)_n}, \quad \operatorname{Erfi}(\eta) = \exp(\eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\eta^{2n+1}}{(3/2)_n},$$

$$\operatorname{Erf}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \exp(-\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)_n}{\xi^{2n+1}}, \quad \operatorname{Erfi}(\eta) = \frac{1}{2} \exp(\eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{\eta^{2n+1}}$$

Последние два ряда имеют смысл асимптотических рядов.

Заключение. Представлены решения уравнений движения вязкопластичной среды в виде рядов. Решения содержат четыре произвольных параметра и определяют течение среды между двумя параллельными пластинами с начальными условиями достаточно общего вида. Найдены связи между четырьмя параметрами, при которых ряды производятся в одно слагаемое. Получены четыре аналитических решения с тремя произвольными параметрами, выраженных через функцию ошибок и элементарные функции.

Исследованы следующие течения между двумя неподвижными пластинами: торможение течения из некоторого начального состояния до полной остановки и развитие течения из состояния покоя под действием нарастающего во времени градиента давления.

Исследованы различные течения между неподвижной пластиной и пластиной, движущейся с постоянным ускорением или замедлением под действием постоянного перепада давления: развитие течения из состояния покоя под действием перепада давления, превышающего пороговое значение и торможение течения при постоянном перепаде давления, меньшего порогового значения.

Описан эффект торможения вязкопластичной среды за счет нарастания области жесткого ядра при отсутствии изменения профиля скорости в области деформационного течения. Обнаружены режимы течений, в которых профиль скорости в области деформационного течения не меняется, за исключением тонкого пограничного слоя вблизи границы ядра. Толщина слоя обратно пропорциональна квадрату параметра семейства таких течений.

Автор благодарит Д.М. Климова за внимание к работе и полезные замечания, А.Г. Куликовского и А.А. Бармина за обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01862).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И., Ишлинский А.Ю. Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 497–502.
2. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. 359 с.
3. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.XII.1997