

УДК 532.516

© 1999 г. В.И. ГРАБОВСКИЙ

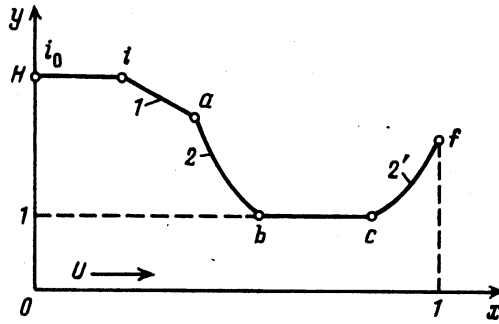
## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУНА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЕ ЕГО МИНИМАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В двумерном приближении рассматриваются вопросы оптимального профилирования зазора плоского газодинамического ползуна. Аналогично известной задаче Рэлея для жидкости и с ее обобщением на газ сформулирована и решена изопериметрическая вариационная задача определения формы зазора, реализующей минимум коэффициента сопротивления ползуна  $C_D$  при заданном коэффициенте его несущей способности  $C_N$ . Сжимаемость газа учтена в рамках степенной баротропной зависимости плотности  $\rho$  от давления  $p$ . Установлена структура оптимального решения.

В теории оптимального профилирования зазоров подшипников основополагающей является работа Рэлея [1], в которой при решении задачи определения формы двумерного ползуна, называемой далее задачей Рэлея, реализующей максимум подъемной силы ("несущей способности") или коэффициента подъемной силы  $C_N$ , в несжимаемой вязкой жидкости было установлено, что максимум  $C_N$  обеспечивает кусочно-постоянный зазор с одной ступенькой. На начальном его участке (участке двустороннего экстремума) высота зазора  $h \equiv h_1 > 1$  удовлетворяет уравнению Эйлера ( $h$  отнесено к минимально допустимой высоте  $h_m$ ). Концевой участок  $h \equiv 1$  является участком краевого экстремума. Ступенчатую структуру решения задача Рэлея имеет и для политропного газа, хотя в этом случае высота зазора на участке двустороннего экстремума не постоянна [2].

Отметим, что решение Рэлея реализует не только максимум  $C_N = C_{NR}$ , но и максимум величины сопротивления  $C_D = C_{DR}$ . Так как вопрос потерь в подшипниках имеет важное практическое значение, то имеет смысл рассмотреть задачу минимизации коэффициента сопротивления ползуна  $C_D$  при фиксированном  $C_N$ . При этом, конечно, значения  $C_N$  будут меньше  $C_{NR}$ . Такая задача для жидкости сформулирована и решена в [3]. Ранее некоторые частные случаи этой задачи для жидкости были рассмотрены в [4]. В данной работе такая задача сформулирована и решена для плоских газовых ползунов. При этом показано, что если  $C_N < C_{NR}$ , то в отличие от решения задачи Рэлея высота оптимального зазора непрерывна, становясь разрывной лишь при  $C_N = C_{NR}$ . Установлены предельные переходы для полученных решений к решениям для жидкости и к решениям задачи Рэлея.

1. Пусть  $x^\circ, y^\circ$  – декартовы координаты, связанные с плоским ползуном, который движется в отрицательном направлении оси  $x^\circ$  над плоскостью  $y^\circ = 0$  с постоянной скоростью  $-U$ . В этой системе координат ползун покоится, а плоскость  $y^\circ = 0$  движется со скоростью  $U > 0$ , как изображено на фиг. 1. Высота зазора  $y^\circ = h^\circ(x^\circ)$ , ограниченного основанием ползуна от точки  $i_0$  до точки  $f$  (или от  $i$  до  $f$ ), может иметь ступеньку при  $x^\circ = x_d^\circ$ . Значениям различных величин, в частности  $h^\circ$ , в точках  $i, d, f, \dots$  будем приписывать соответствующие нижние индексы, а если они рвутся в точке  $d$ , то слева (справа) от нее – дополнительный индекс минус (плюс). За масштабы  $x^\circ$  и  $h^\circ$



Фиг. 1. Схематическая форма оптимального зазора в изопериметрической задаче

возьмем соответственно ширину  $l$  ползуна в направлении  $x^\circ$  и минимально допустимую высоту зазора  $h_m^\circ$  над плоскостью  $y^\circ$ . Давление  $p^\circ$  на входе в зазор и на выходе из него предполагается постоянным и равным  $p_0^\circ$ . Плотность  $\rho^\circ$  будем считать степенной функцией давления

$$\rho^\circ = C p^{\circ n} \quad (1.1)$$

с постоянными  $C$  и  $n$ . Если  $n = 0$ , то  $\rho^\circ \equiv \rho_0^\circ$ , что отвечает несжимаемой жидкости;  $n = 1$  соответствует изотермическому случаю, достаточно близкому к реальным условиям течения в узком зазоре ( $h_m^\circ \ll l$ ) [5]. За масштабы плотности, давления и скорости ниже, а также в (1.1) возьмем соответственно  $\rho_0^\circ$  — плотность газа вне зазора,  $\rho_0^\circ U^2$  и  $U$ . В силу сделанных предположений для безразмерных величин  $u$ ,  $p$  и  $r$  имеем следующие граничные условия:

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, h) = 0, \quad p(0, y) = p(1, y) = p_0, \quad \rho(0, y) = \rho(1, y) = 1 \quad (1.2)$$

где  $p_0$  — известная константа.

Пусть  $\mu^\circ = \mu_0$  — постоянная вязкость газа. Согласно положениям теории смазки, для ламинарного и изотермического режима течения в узком зазоре имеем к дополнению соотношения (1.1) уравнения Рейнольдса и неразрывности [5]

$$\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma^\circ \partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \gamma^\circ = \frac{\mu_0}{h_m^{\circ 2} \rho_0^\circ U} \quad (1.3)$$

После двукратного интегрирования первого уравнения по  $y$  с учетом первых двух условий из (1.2) найдем

$$u(x, y) = 1 - \frac{1 + p'(x) h^2(x) (2\gamma^\circ)^{-1}}{h(x)} y + p'(x) y^2 (2\gamma^\circ)^{-1} \quad (1.4)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по  $x$ . Все величины, составляющие безразмерный комплекс  $\gamma^\circ$ , размерные.

Наконец, умножив уравнение (1.4) на  $r$  из (1.1), проинтегрировав его по  $y$  от  $y = 0$  до  $y = h$  и учтя, что безразмерный расход через зазор  $Q$  постоянен, придем к уравнению

$$L \equiv \pi^n h - k(\pi^{n+1})' h^3 - q = 0 \quad (1.5)$$

$$\pi = \frac{p}{\gamma}, \quad k = \frac{1}{n+1}, \quad q = \frac{2Q}{C_1 \gamma^n}, \quad \gamma = \frac{6\mu_0}{h_m^{\circ 2} \rho_0^\circ U}, \quad Q = \int_0^h \rho u dy, \quad C_1 = C \rho_0^{\circ n-1} U^{2n}$$

Если это уравнение разрешить относительно  $\pi'$ , то оно примет вид

$$\pi' = \frac{h\pi^n - q}{h^3\pi^n} \quad (1.6)$$

Таким образом, задача характеризуется двумя безразмерными критериями:  $\gamma$ , совпадающим с точностью до множителя с известным параметром сжимаемости [5], и  $p_0 = nM^{-2}$ , где  $M = U / \sqrt{\rho_0(n\rho_0)^{-1}}$  – число Маха.

Обозначим через  $N$  несущую способность ползуна – вертикальную силу, действующую на него из-за отличия величины давления в зазоре от  $p_0$ , а через  $X$  – силу испытываемого им сопротивления. Последняя есть сумма силы трения и интеграла сил давления, включающего и силу, действующую на возможную ступеньку, где  $p = p_d$ . Коэффициенты  $C_N$  и  $C_D$  указанных сил введем равенствами

$$C_N = \frac{N}{\gamma\rho_0^\circ U^2}, \quad C_D = \frac{X}{\gamma h_m \rho_0^\circ U^2}$$

Опуская соответствующие преобразования для  $C_D$ , получим следующие интегральные представления:

$$C_N = \int_0^1 (\pi - \pi_0) dx, \quad C_D = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{3h} + h\pi' \right) dx \quad (1.7)$$

В задаче Рэлея ищется такое распределение высоты зазора  $h = h(x)$ , которое при  $\pi$ , определяемом дифференциальным уравнением (1.6) и граничными условиями

$$\pi(0) = \pi(1) = \pi_0 = p_0 \gamma^{-1} \quad (1.8)$$

с фиксированным  $\pi_0$ , реализует максимум  $C_N$ . В задаче, рассматриваемой в данной работе,  $C_N$  фиксируется, а минимизируется сопротивление, т.е.  $C_D$ . В обеих задачах будем считать, что  $h$  ограничено снизу и сверху, что, в согласии с выбором масштаба  $h$ , формулируется в виде неравенств

$$1 \leq h(x) \leq H \quad (1.9)$$

с заданной константой  $H > 1$ . Разумеется,  $C_N \leq C_{NR}$ , где  $C_{NR}$  – коэффициент несущей способности, соответствующий задаче Рэлея, решение которой попутно также будет построено.

2. Для решения задачи по определению оптимальной формы ползуна  $h(x)$ , обеспечивающей минимум его сопротивления при заданной величине его несущей способности, составим функционал Лагранжа

$$J = \alpha C_D + \beta C_N + \int_0^1 \lambda(x) L dx$$

в котором  $L$  – левая часть уравнения (1.5),  $\lambda$  – переменный, а  $\beta$  – постоянный множители Лагранжа. Задаче Рэлея соответствуют  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$ . В исследуемой задаче, которую в дальнейшем будем называть "изопериметрической" [3],  $\alpha = 1$ , а  $\beta$  – определяемая константа. В обоих случаях при любом допустимом варьировании  $J$  и оптимизируемого функционала из (1.7) их вариации совпадают при любых, по крайней мере ограниченных, множителях Лагранжа. Поэтому для оптимального зазора  $\delta J = \delta C_N \leq 0$  в задаче Рэлея и

$$\delta J = \delta C_D \geq 0 \quad (2.1)$$

в изопериметрической задаче при любых вариациях  $\delta h$ , удовлетворяющих ограничениям (1.9). Проварьировав  $J$  с учетом условий (1.8), непрерывности  $\pi$  в сечении  $d$

возможного скачка (или скачков)  $h$  и известных правил определения вариаций, придем к выражению для  $\delta J$ , справедливому для любого (необязательно оптимального)  $h(x)$  и пока произвольных ограниченных  $\lambda(x)$  и  $\beta$

$$\delta J = \left\{ \frac{1}{2} \alpha (h_- - h_+) + [(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-] \pi^n \right\}_d \Delta \pi_d + X_d \Delta x_d - \Delta q \int_0^1 \lambda dx + \int_0^1 (A_h \delta h + A_\pi \delta \pi) dx \quad (2.2)$$

$$X_d = \frac{\alpha}{6} \left( \frac{1}{h_-} + \frac{1}{h_+} \right) + \lambda_- (h \pi^n - q)_- - \lambda_+ (h \pi^n - q)_+$$

$$A_h = \frac{1}{6} (2h \pi^n - 3q) (\alpha - 6\lambda h^2 \pi^n) h^{-3} \pi^{-n}$$

$$A_\pi = \beta - \frac{1}{2} \alpha h' + \pi^n [n \lambda h \pi^{-1} + (\lambda h^3)']$$

Здесь  $\Delta \pi_d$  и  $\Delta x_d$  – разности  $\pi$  и  $x$  в сечениях скачка  $h$  для проварьированного и не проварьированного зазоров, а  $\delta \pi$  и  $\delta h$  – соответствующие вариации, т.е. разности  $\pi$  и  $h$  для тех же зазоров при фиксированном  $x$ ; коэффициент  $X_d$  преобразован с учетом выражений для  $\pi'_\pm$  из (1.6).

Распоряжаясь произволом в выборе  $\lambda$ , обратим в нуль коэффициент  $A_\pi$ . Это приведет к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для любого участка непрерывности  $h$

$$\beta - \frac{1}{2} \alpha h' + \pi^n [n \lambda h \pi^{-1} + (\lambda h^3)'] = 0 \quad (2.3)$$

В возможных сечениях скачка  $h$  условия, связывающие  $\lambda_{d-}$  и  $\lambda_{d+}$ , получим, приравняв нулю множитель при  $\Delta \pi_d$ , что даст

$$\frac{1}{2} \alpha (h_- - h_+) + [(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-] \pi^n = 0 \quad (2.4)$$

Если таких сечений несколько, то это условие выполняется во всех них. Воспользовавшись (1.6), уравнение (2.3) перепишем в форме

$$\left( \frac{1}{2} \alpha h - \lambda h^3 \pi^n \right)' = \beta + n \lambda q \pi^{-1} \quad (2.5)$$

с непрерывным в силу (2.4) выражением в скобке. Уравнения (2.3) или (2.5) и условий (2.4) в возможных точках разрыва  $h$  для определения  $\lambda$  недостаточно. Недостающее условие получается приравниванием нулю коэффициента при  $\Delta q$  в уравнении (2.2)

$$\int_0^1 \lambda dx = 0 \quad (2.6)$$

Пусть непрерывная, или разрывная, функция  $h(x)$  задана. Тогда, интегрируя уравнение (1.6) для  $\pi$  с заданным  $\pi(0) = \pi_0$  на входе в зазор и подбирая расход  $q$ , можно удовлетворить и второму условию (1.8)  $\pi(1) = \pi_0$  на выходе из зазора, т.е. решить прямую задачу теории газовой смазки. Затем в линейно зависящем от  $\lambda_0 = \lambda(0)$  решении уравнения (2.3) константу  $\lambda_0$  всегда можно найти из условия (2.6), что даст решение так называемой сопряженной задачи для множителя  $\lambda$ . После этого для произвольного, т.е. необязательно оптимального, зазора выражение для вариации  $\delta J$

примет вид

$$\delta J = X_d \Delta x_d + \int_0^1 A_h \delta h dx \quad (2.7)$$

$$X_d = \frac{\alpha(h_+ - h_-)}{6h_+ h_-^3 \pi^n} [3qh_+ - h_-(3h_+ - h_-)\pi^n] + \lambda_+ h_-^{-3} (h_+ - h_-) F =$$

$$= \frac{\alpha(h_+ - h_-)}{6h_- h_+^3 \pi^n} [3qh_- - h_+(3h_- + h_+)\pi^n] + \lambda_- h_+^{-3} (h_+ - h_-) F$$

$$F = h_+ h_- (h_+ + h_-) \pi^n - (h_+^2 + h_+ h_- + h_-^2) q$$

где оба эквивалентных представления коэффициента  $X_d$  получены из соответствующего коэффициента из (2.2) после исключения либо  $\lambda_-$ , либо  $\lambda_+$  с использованием справедливого на скачках  $h$  условия (2.4).

Для задачи Рэлея, в которой  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$ , анализ (2.7) показывает, что в общем случае оптимальный зазор может состоять из трех участков. Это – два участка краевого экстремума, где  $h \equiv 1$  и  $h \equiv H$ , и один участок  $l$  двустороннего экстремума, на котором высота зазора определяется условием обращения в нуль коэффициента  $A_h$ , т.е. равенством

$$2h\pi^n - 3q = 0 \quad (2.8)$$

На участке краевого экстремума, где  $h \equiv 1$ , допустимые  $\delta h$  в силу (1.9) неотрицательны, а на участке краевого экстремума, на котором  $h \equiv H$ , допустимые  $\delta h$  также в силу (1.9) неположительны. Так как в задаче Рэлея  $\delta J = \delta C_N$ , а при оптимальном зазоре отвечающие его допустимому варьированию  $\delta C_N$  – неположительны (допустимое варьирование оптимального зазора может вести только к уменьшению  $C_N$ ), то условия оптимальности для этих участков имеют вид неравенств

$$\lambda(3q - 2H\pi^n) \geq 0$$

на участке, где  $h \equiv H$ , и

$$\lambda(3q - 2\pi^n) \leq 0 \quad (2.9)$$

на участке, где  $h \equiv 1$ .

Разные участки могут стыковаться с разрывом и без разрыва  $h$ . Для оптимальной "разрывной" стыковки и в задаче Рэлея, и в изопериметрической задаче необходимо, чтобы в сечении скачка  $h$  обращался в нуль коэффициент при  $\Delta x_d$  из (2.7)

$$X_d = 0 \quad (2.10)$$

В задаче Рэлея, где  $\alpha = 0$ , из условий (2.10) и (2.4) следует, что разрывная стыковка участка двустороннего экстремума с любым из участков краевого экстремума возможна только тогда, когда в сечении  $d$  множитель  $\lambda$  обращается в нуль

$$\lambda_{d-} = \lambda_{d+} = 0 \quad (2.11)$$

В силу (2.8) и (1.6) на участке двустороннего экстремума имеем

$$\pi' = \frac{1}{3} \left( \frac{2\pi^n}{3q} \right)^2, \quad h = \frac{3}{2} q \pi^{-n} \quad (2.12)$$

и, следовательно, при  $n > 0$  в направлении течения  $\pi$  растет, а  $h$  уменьшается. Для несжимаемой жидкости ( $n = 0$ ), как известно, на участке двустороннего экстремума  $h \equiv \text{const}$ , а  $\pi$  растет по линейному закону.

В изопериметрической задаче, в которой  $\alpha = 1$ , обращение в нуль  $A_h$  возможно не только в силу равенства нулю его первого сомножителя в (2.2), что по-прежнему соответствует участку двустороннего экстремума 1, но и из-за обращения в нуль второго сомножителя, что приводит к появлению нового участка 2 двустороннего экстремума. На нем будем иметь

$$6\lambda h^2 \pi^n = 1 \quad (2.13)$$

В соответствии с этим и в силу (2.3) высота зазора на нем определяется уравнением

$$h' = 3\beta + n \frac{q}{2h^2 \pi^{n+1}} \quad (2.14)$$

В изопериметрической задаче, поскольку определяется минимум функционала, на участках краевого экстремума должны выполняться неравенства

$$(1 - 6\lambda H^2 \pi^n)(2H\pi^n - 3q) \leq 0 \quad (2.15)$$

$$(1 - 6\lambda \pi^n)(2\pi^n - 2q) \geq 0$$

где первое неравенство соответствует участку  $h \equiv H$ , а второе — участку  $h \equiv 1$ .

Если  $\lambda_+$  или  $\lambda_-$  из (2.13) подставить в формулу для  $X_d$  из (2.7) с  $\alpha = 1$ , то, как можно показать,  $X_d = 0$  только при  $h_{d+} = h_{d-}$ . Это означает, что участок двустороннего экстремума 2 стыкуется с другими участками непрерывным образом.

Таким образом, решение изопериметрической задачи состоит в определении  $\pi$ ,  $h$  и  $\lambda$  на каждом из указанных выше участков интегрированием соответствующих уравнений и констант  $\beta$ ,  $q$  из граничных и интегральных условий задачи. При этом учитываются условия сшивания на стыках участков, а также проверяются условия (2.15) в каждой точке участков. Итак, имеем для каждого из участков с учетом соответствующих преобразований (см. фиг. 1): участок краевого экстремума  $h \equiv H$

$$\pi' = \frac{H\pi^n - q}{H^3 \pi^n}, \quad \lambda' + n\lambda \pi^{-1} H^{-2} + \beta \pi^{-n} H^{-3} = 0$$

участок двустороннего экстремума 1

$$h = \frac{3}{2} q \pi^{-n}, \quad \pi' = \frac{4}{27} \pi^{2n} q^{-2}, \quad \lambda' + \frac{8}{3} (9\beta q + n\pi^{n-1}) \pi^{2n} (3q)^{-4} = 0$$

участок двустороннего экстремума 2

$$h' = 3\beta + n \frac{q}{2h^2 \pi^{n+1}}, \quad \pi' = \frac{h\pi^n - q}{h^3 \pi^n}, \quad \lambda = \frac{1}{6} h^{-2} \pi^{-n}$$

участок краевого экстремума  $h \equiv 1$

$$\pi' = 1 - q\pi^{-n}, \quad \lambda' + n\lambda \pi^{-1} + \beta \pi^{-n} = 0$$

В точках стыковки всех участков  $\pi$ ,  $\lambda$ ,  $h$  и соответственно  $\pi'$  непрерывны. Производные  $\lambda'$  и  $h'$ , естественно, рвутся в точках стыковки участков краевого экстремума с участками 1 и 2. Граничные условия (1.8) для выписанной системы и интегральное соотношение (2.6) замыкают задачу. При  $n = 0$  задача до конца решается в аналитическом виде [3]. При  $n = 1$  функции  $\pi(x)$ ,  $h(x)$  и  $\lambda(x)$  также имеют аналитические выражения, но интегральное соотношение (2.6) не обладает этим свойством (из-за участка двустороннего экстремума 2). Необходимо привлекать численный метод решения. При других значениях  $n$  исследование задачи становится еще более сложным.

$\pi_0$	$h_i$	$h_{d-}$	$x_d$	$\pi_d$	$q$	$C_{NR}$	$C_{DR}$	$m$
0,01	4,88	1,50	0,495	0,030	0,033	0,0144	0,128	3,8
0,1	2,39	1,54	0,614	0,156	0,159	0,0303	0,141	1,1
1	1,91	1,79	0,702	1,068	1,275	0,0342	0,142	1,0
"0"	1,87	1,87	0,718	—	1,244	0,0344	0,141	—

При построении решения изопериметрической задачи участок двустороннего экстремума 2 играет ключевую роль. На нем  $\pi$  может убывать с ростом  $x$ , что может обеспечить выполнение условия  $\pi(1) = \pi_0$  даже при отсутствии участка краевого экстремума с  $h \equiv 1$ , обладающего тем же свойством. Последнее имеет место, если получающаяся в результате интегрирования уравнений участка 2 функция  $h(x) > 1$  вплоть до  $x = 1$ . В таких случаях  $x_b = 1$ , а  $\pi_b = \pi_0$ . При этом примыкающая к  $x = 1$  концевая часть этого участка может быть расширяющейся при падающей на ней функции  $\pi(x)$ . Расширяющийся участок двустороннего экстремума (2') может возникать и при присутствии участка краевого экстремума  $h \equiv 1$ , когда на нем нарушается условие оптимальности (2.15).

3. Учет сжимаемости даже в принятом выше "баротропном" приближении существенно усложняет оптимальное профилирование ползунов и в задаче Рэлея, и в изопериметрической задаче. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, усложняются уравнения и условия, которые описывают течение в зазоре и оптимальное распределение его высоты  $h(x)$ . Причем в отличие от случая несжимаемой жидкости [3] построение оптимальных решений включает численное интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений. Во-вторых, решение для газа уже зависит и от безразмерного комплекса  $\pi_0$

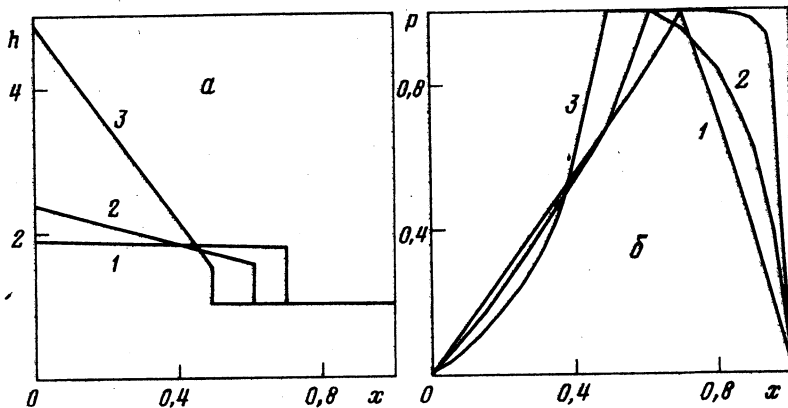
$$\pi_0 = \frac{p_0^\circ}{\gamma p_0^\circ U^2} = \frac{n}{\gamma M_U^2}, \quad M_U = \frac{U}{a_0}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{p_0^\circ}{\rho_0^\circ}} \quad (3.1)$$

в котором число Маха  $M_U$  определено по скорости ползуна и скорости звука  $a_0$  вне зазора. Появление такого параметра приводит к тому, что для газа результаты решения задачи Рэлея и изопериметрической задачи не удается представить в универсальном, т.е. не зависящем от  $\gamma$ , виде, как в случае жидкости [3].

Построение оптимальных форм ползунов, разумеется, не сводится к численному интегрированию уравнений разд. 2, а включает достаточно сложный анализ различных конфигураций ползунов, который здесь не приводится. Представляются результаты, полученные для наиболее реального изотермического течения, которому в (1.1) отвечает  $n = 1$ . Диапазон возможных значений безразмерного комплекса  $\gamma$ , когда существенны свойства газа, определяется неравенством  $\gamma \gg 1$  ( $\pi_0 \ll 1$ ). При  $\gamma \rightarrow 0$  полученные решения для газа переходят в решения для жидкости [3]. Ввиду предположения о малости конвективных членов в уравнениях движения газа всюду в области течения в зазоре должно выполняться неравенство  $M < 1$ , где  $M$  — текущее число Маха. Соответственно должно быть и  $M_U < 1$ . Геометрический параметр задачи  $H \geq 1$ . При  $H \rightarrow \infty$  он становится несущественным. Расчеты, результаты которых приводятся далее, выполнены для  $\pi_0 = 1, 0,1$  и  $0,01$ . Используя определения  $\pi_0$  и  $M_U$  из (3.1), нетрудно найти пары значений  $\gamma$  и  $M_U$ , которым отвечают выбранные  $\pi_0$ .

Некоторые результаты решения задачи Рэлея для выбранных значений  $\pi_0$  и  $H$ , не влияющем на решение, представлены в табл. 1, а соответствующие им графики — на фиг. 2: изменение по  $x$  высоты зазора  $h$  и величины приведенного давления

$$P = (p - p_0)/(p_m - p_0) = (\pi - \pi_0)/(\pi_m - \pi_0)$$



Фиг. 2. Формы оптимальных зазоров (а) и распределение давления в них (б) в задаче Рэлея. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют  $\pi_0 = 1, 10^{-1}$  и  $10^{-2}$

где  $p_m$  и  $\pi_m$  – максимальные значения  $p$  и  $\pi$ , в данном случае совпадающие с  $p_d$  и  $\pi_d$ . В масштабе фиг. 2, б распределение  $P(x)$  для  $\pi_0 = 1$  не отличается от  $P(x)$  для жидкости [3]. Фигура 2 и приведенные выше данные демонстрируют сходимость решения задачи Рэлея для газа к решению для жидкости с ростом  $\pi_0$ .

В задаче Рэлея оптимальный зазор состоит из двух участков: двустороннего экстремума 1 и краевого экстремума  $x \equiv 1$ , причем в отличие от жидкости участок двустороннего экстремума от точки  $i$  до точки  $d$  – сужающийся. Наряду с данными  $h_i$  и  $h_d$ , которые демонстрируют это сужение, в табл. 1 приведены абсцисса сечения  $d$  скачкообразного уменьшения высоты зазора, давление  $\pi_d$  в этом сечении, безразмерный расход  $q$  и коэффициенты  $C_{NR}$  и  $C_{DR}$ . Сформулированное выше требование  $M < 1$  вместе с приведенной величиной  $m = M_1/M_U$ , где  $M_1$  – максимальная величина  $M$ , реализующаяся на выходе из зазора, дает представление о возможных значениях  $M_U$ . Сравнение некоторых представленных решений с решениями [2], где решалась задача Рэлея для газа, показало их совпадение.

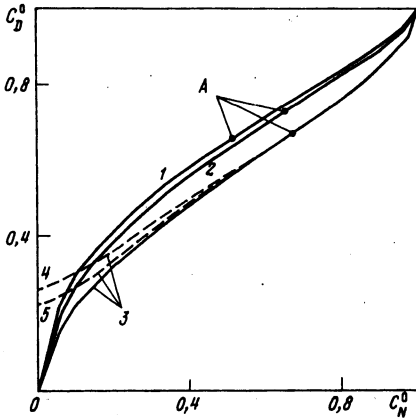
В последней строке табл. 1 для сравнения приведены аналогичные параметры задачи Рэлея для жидкости. Жидкость не описывается уравнением (1.1). Поэтому нуль в первом столбце, получающийся, если положить  $p_0 = 0$  взят в кавычки, а  $\pi_d$  и  $m$  не указаны. В рамках же уравнения (1.1) жидкости отвечает не  $\pi_0 = 0$ , а  $\pi_0 \rightarrow \infty$ , получающееся при  $M_U \rightarrow 0$ . Построенные решения справедливы для любых  $H \geq h_i$ , так как при таких  $H$  ограничение на высоту зазора сверху оказывается несущественным.

Рассмотрение полученных для тех же  $\pi_0 = 1, 0,1$  и  $0,01$  результатов решения изопериметрической задачи начнем с фиг. 3, иллюстрирующей зависимости оптимальных относительных значений  $C_D^0 = C_D/C_{DR}$  от заданных  $C_N^0 = C_N/C_{NR}$ . Сплошные кривые соответствуют решениям задачи, когда несущественно верхнее ограничение. Сплошная кривая 1 ( $\pi_0 = 1$ ) близка к соответствующей кривой для жидкости [3]. Как и для жидкости, части кривых, лежащие ниже точек А, соответствуют оптимальным формам ползуна для изопериметрической задачи с  $h(x) > 1$ , т.е. без участка краевого экстремума  $h \equiv 1$ , когда нижнее ограничение не существенно. Легко показать аналитически, что часть кривых ниже точек А можно описать зависимостью

$$C_N^0 = kC_D^{0^2}, \text{ где } k = \text{const для каждой кривой.}$$

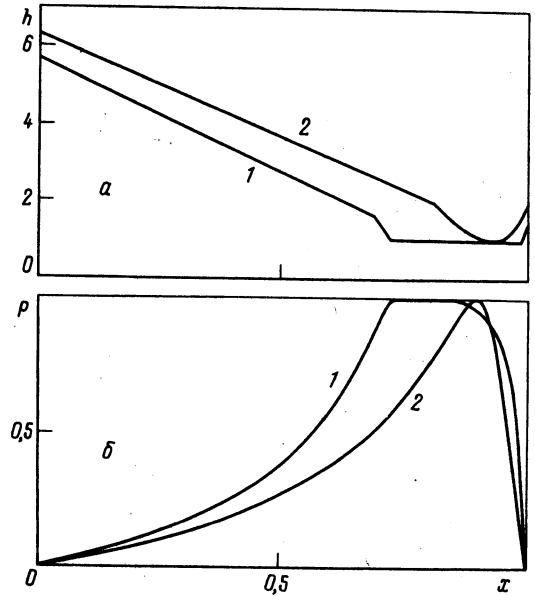
Участки кривых над точками А отвечают зазорам, содержащим участок  $h \equiv 1$ . В согласии с определением  $C_N^0$  и  $C_D^0$ , все сплошные кривые приходят в точку





Фиг. 3

Фиг. 3. Минимальные значения приведенного коэффициента сопротивления ползуна  $C_D^0$  в зависимости от заданных значений приведенного коэффициента несущей способности  $C_N^0$ . Кривые 1, 2, 3, соответствуют  $\pi_0 = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ , сплошные кривые —  $H = \infty$ , 4 —  $H = 5$ , 5 —  $H = 6$



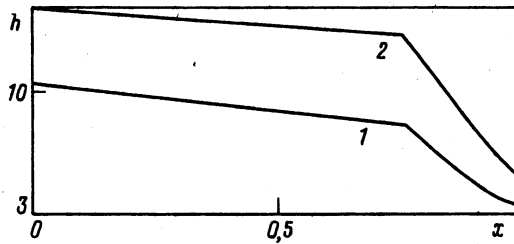
Фиг. 4

Фиг. 4. Деформация формы оптимального зазора (а) и соответствующего ему распределения давления (б) с ростом  $q$  при  $H = \infty$  и  $\pi_0 = 10^{-2}$  (кривые 1 и 2 соответствуют  $q = 0,038$  и  $0,042$ )

$C_N^0 = C_D^0 = 1$ . Для  $C_N^0 = 1$  решения задачи Рэля и изопериметрической задачи совпадают, а высота оптимального зазора при  $x = x_d$  уменьшается скачком до единицы.

Сплошные кривые фиг. 3 построены без учета возможного ограничения на  $h$  сверху, т.е. формально при отсутствии такого ограничения, чему соответствует  $H = \infty$ . На самом же деле  $H = \infty$  только при  $C_N^0 = C_D^0 = 0$ , а для любой точки сплошных кривых  $H \geq h_i(\pi_0, C_N^0) < \infty$ . Чем ближе точка к началу координат, тем больше  $h_i$ . Если же величина  $H$  конечна и фиксирована, то при  $C_N^0$ , меньших некоторого значения, оптимальный ползун содержит горизонтальный входной участок краевого экстремума  $h(x) \equiv H$ , а  $C_D^0(C_N^0)$  для такого ползуна отличается от значения для ползуна без этого ограничения. На фиг. 3 для  $\pi_0 = 0,01$  две такие зависимости изображены штриховыми кривыми. Их пересечение с осью ординат, где  $C_N^0 = 0$ , дает оптимальный зазор постоянной высоты  $h(x) \equiv H$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

Эволюцию формы оптимального ползуна в изопериметрической задаче можно проследить также, начиная от решения задачи Рэля, характеристики которого приведены выше. Сделаем это для  $\pi_0 = 0,01$ , чему соответствует  $q = q_R = 0,033$ . При таком  $q$  решение изопериметрической задачи, отвечая максимально возможному  $C_N = C_{NR}$  (или  $C_N^0 = 1$ ), совпадает с решением задачи Рэля. Уменьшение  $C_N$  от значения  $C_{NR}$  достигается увеличением высоты зазора вне участка  $h \equiv 1$  и сокращением длины этого участка, что сопровождается увеличением расхода  $q$ . Фигура 4, а по-



Фиг. 5. Формы оптимальных зазоров при не-  
существенности как верхнего, так и нижнего  
ограничений (кривые 1 и 2 соответствуют  $q =$   
 $= 0,07$  и  $0,1$ )

казывает, как изменится оптимальная форма ползуна при переходе к  $q = 0,038$  и  $0,042$ .  
На фиг. 4, б даны получающиеся для этих форм распределения давления  $P(x)$ .

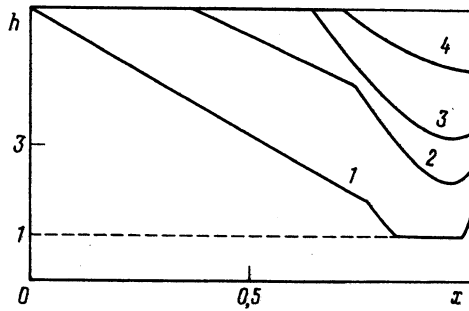
Качественное различие решений изопериметрической задачи для газа и жидкости,  
во-первых, связано с формой участков 1 и 2. Для жидкости участок 1 – горизон-  
тальный, а участок 2 – наклонный прямолинейный. Для газа первый из них, оставаясь  
прямолинейным (при  $n = 1$ ), становится сужающимся, а второй, оставаясь сужаю-  
щимся, становится выпуклым (в сторону зазора). Второе, более существенное раз-  
личие состоит в том, что при  $q_R < q < q_*$  на выходе из зазора появляется рас-  
ширяющийся участок двустороннего экстремума 2', форма которого определяется  
теми же уравнениями, что и для участка 2. Эти участки сначала разведены участком  
краевого экстремума  $h \equiv 1$ . При некотором  $q = q_*$ , в данном случае при  $q = 0,042$ ,  
участки 2 и 2' соединяются, образуя единый сужающийся-расширяющийся участок 2.  
На фиг. 3 такому ползуну отвечает точка А сплошной кривой для  $\pi_0 = 0,01$ . Ниже  
точки А, т.е. при  $q > 0,042$ , ограничение на  $h$  снизу, как уже отмечалось, не влияет на  
решение изопериметрической задачи.

Дальнейшую эволюцию решения с ростом  $q$  демонстрирует фиг. 5 с кривыми 1 и 2,  
соответствующими  $q = 0,07$  и  $0,1$ , причем при  $q \geq q_{**} = 0,07$  участок 2 становится  
полностью сужающимся. В примерах, изображенных на фиг. 4 и 5, максимум давления  
 $P_m$  (и  $\pi_m$ ) достигается на сужающемся участке 2. Заметим, что существование рас-  
ширяющегося участка зазора доказано аналитически при исследовании соответствующей  
системы уравнений.

Геометрические и силовые характеристики зазоров, дающих решение изоперимет-  
рической задачи при  $\pi_0 = 0,01$  и без ограничения на  $h$  сверху, точнее, при  $H \geq h_i$ ,  
представлены в табл. 2. Схема зазоров, поясняющая принятые при этом обозначения,

Таблица 2

$q$	$x_a$	$x_b$	$x_c$	$h_i$	$h_a$	$h_b = h_c$	$h_f$	$C_N^0$	$C_D^0$	$m$
0,033	0,49	0,49	1	4,9	1,50	1	1,0	1,0	1,0	3,8
0,038	0,69	0,73	0,99	5,7	1,67	1	1,46	0,90	0,84	1,91
0,039	0,72	0,78	0,98	5,8	1,72	1	1,59	0,85	0,80	1,66
0,040	0,76	0,83	0,97	6,0	1,79	1	1,71	0,80	0,75	1,56
0,042	0,80	0,93	0,93	6,3	2,07	1,0	1,95	0,65	0,66	1,43
0,05	0,78	0,96	0,96	7,5	4,05	2,0	2,41	0,31	0,41	1,38
0,06	0,77	0,98	0,98	9,0	6,16	2,84	2,93	0,18	0,30	1,35
0,07	0,76	1,0	1,0	10,5	8,0	3,45	3,45	0,12	0,24	1,35
0,075	0,76	1	1	11,25	9,0	3,7	3,70	0,10	0,22	1,34
0,1	0,76	1	1	15	13,3	4,96	4,96	0,05	0,15	1,34



Фиг. 6. Формы оптимальных зазоров при верхнем ограничении  $H = 6$  и разных  $q$  (кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют  $q = 0,04, 0,05, 0,055$  и  $0,059$ )

представлена на фиг. 1 (участок от точки  $i_0$  до точки  $i$  отсутствует). На ней  $i-a$  – сужающийся участок 1,  $a-b$  – также сужающийся участок 2 (или его сужающаяся часть),  $b-c$  – участок краевого экстремума  $h \equiv 1$  и  $c-f$  – расширяющийся участок 2', примыкающий к участку  $h \equiv 1$  (или расширяющаяся часть участка 2). В представленном случае  $\pi_0 = 0,01$  реализуются все описанные участки. Верхняя строка табл. 2 соответствует задаче Рэля. Следующие три строки относятся к зазорам с разделенными участками 2 и 2'. При меньших  $C_N^0$ , чему отвечают большие расходы  $q$ , сначала реализуется схема со слившимися участками 2 и 2' (следующие четыре строки, отвечающие  $0,042 \leq q \leq 0,07$ ), а затем и схема без участка 2'. Отметим, что ползуны с расширяющимся участком 2' могут возникать только при достаточно малых величинах  $\pi_0$ . Например, при  $\pi_0 = 0,1$  (и, конечно, в случае жидкости [3]) реализуются только схемы без расширяющегося участка 2'. При рассмотрении приведенных данных следует иметь в виду, что все величины, кроме 1 ("единицы без нуля"), – округленные. Например,  $x_b = x_c = 1,0$  в третьей строке снизу на самом деле слегка меньше единицы. В результате этот случай ( $q = 0,07$ ) отвечает схеме с участками 2 и 2'.

Оптимальные формы газовых ползунов, отвечающие малым  $C_N^0$ , а следовательно, и большим  $q$ , характеризуются большой высотой зазора. Поэтому для любого конечного  $H$  имеется такое  $q = q_H(\pi_0, H)$ , что при  $q > q_H$  становится существенным ограничение на  $h$  сверху. При фиксированном  $H$  рост  $q$  сопровождается уменьшением  $C_N^0$ ,  $C_D^0$  и деформацией формы оптимального ползуна. В пределе  $C_N^0 = 0$  его высота, как и в случае жидкости, оказывается постоянной:  $h(x) \equiv H$ . Указанная деформация начинается с появления начального горизонтального участка краевого экстремума  $h \equiv H$  (от точки  $i_0$  до точки  $i$ ) и с уменьшением протяженности всех других участков двустороннего и краевого экстремума. Последним исчезает сужающийся участок двустороннего экстремума 2. Согласно уравнению (1.6) и формулам (1.7), в предельном случае  $h(x) \equiv H, q = \pi_0^n H, C_D = (6H)^{-1}, C_N = 0$ . Описанная деформация оптимальных зазоров при  $\pi_0 = 0,01$  и  $H = 6$  показана на фиг. 6. При  $q = 0,06$  высота зазора постоянна. Штриховая кривая 5 с  $H = 6$  на фиг. 3 дает зависимость  $C_D^0 = C_D^0(C_N^0)$  для этих ползунов.

**Заключение.** Показано, что при  $C_N$ , меньших экстремальной величины  $C_{NR}$ , отвечающей задаче Рэля, высота  $h$  оптимального зазора – непрерывная функция координаты  $x$ . В общем случае оптимальная форма  $h = h(x)$  имеет участки четырех типов. Два из них  $h \equiv 1$  и  $h \equiv H > 1$  – участки краевого экстремума, появляющиеся из-за ограничения  $h$  снизу и сверху ( $h$  отнесено к минимально допустимой высоте).

Другие два – участки двустороннего экстремума, причем первый из них аналогичен единственному участку двустороннего экстремума, который есть в задаче Рэлея. Второй появляется только в изопериметрической задаче. В газе его высота может иметь как отрицательный наклон (как в жидкости), так и положительный. При  $C_N \rightarrow C_{NR}$  этот участок вырождается в вертикальную линию и появляется ступенька, т.е. известный разрыв  $h$  в задаче Рэлея. Сужающаяся часть этого нового участка в газе играет ту же роль, что и в жидкости. Его расширяющаяся часть (характерная только для газа), примыкая либо к его сужающейся части, либо к участку краевого экстремума, располагается на выходе из зазора. Теоретический анализ иллюстрируется результатами расчета, на которые можно ориентироваться при создании оптимальных зазоров ползунов. Расчеты выполнены в изотермическом приближении, которому отвечает случай  $n = 1$ . Они охватывают все возможные значения  $C_N \leq C_{NR}$  и  $H \leq \infty$ .

Автор выражает благодарность А.Н. Крайко за формулировку проблемы и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-01825 и 96-15-96158).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh Lord*. Notes on the theory of lubrication // *Phil. Mag.* 1918. V. 35. № 1. P. 1–12.
2. *Maday C.J.* The one – dimensional optimum hydrodynamic gas slider bearing // *Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol.* 1968. V. 90. № 4. P. 281–284. (Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1968. Т. 90. № 4, с. 294–299).
3. *Крайко А.Н.* Изопериметрическая задача о профилировании оптимального зазора бесконечного плоского ползуна // *ПММ.* 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 222–233.
4. *Rohde S.M.* The optimum slider bearing in terms of friction // *Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol.* 1972. V. 94. № 3. P. 275–279. (Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 3. С. 82–87).
5. *Константинеску В.Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.

Москва

Поступила в редакцию  
13.XI.1997