

УДК 533.6.011.5:532.526

© 1999 г. М.К. АУКИН, Р.К. ТАГИРОВ

## РАСЧЕТ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ И ЭНТАЛЬПИИ ЗА ПЛОСКИМ ИЛИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ УСТУПОМ, ОБТЕКАЕМЫМ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ, С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ НАЧАЛЬНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Разработан приближенный метод расчета донного давления и энтальпии за плоским или осесимметричным уступом, обтекаемым сверхзвуковым потоком. Метод основан на использовании модели вязко-невязкого взаимодействия и позволяет определять параметры донного течения практически для произвольных толщин начального пограничного слоя при числах Маха набегающего потока  $1 < M_\infty < 5$ . В модели отрывного течения учитываются наличие протяженной области возрастания давления за уступом и специальное условие присоединения. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

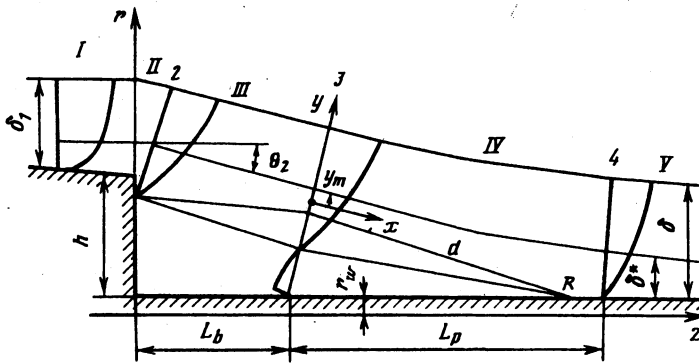
Ранее был разработан относительно простой метод расчета донного давления и энтальпии за уступом, обтекаемым одним или двумя сверхзвуковыми потоками [1]. Метод основан на использовании модели вязко-невязкого взаимодействия. При этом параметры невязкого ядра потока определяются с помощью численного интегрирования уравнений Эйлера, а параметры вязкого потока – с помощью решения интегральных уравнений сохранения, записанных в приближении пограничного слоя.

Недостатком этого метода являются его неприменимость для осесимметричного уступа и значительная схематизация структуры течения в области присоединения. Так, предполагалось, что до точки встречи оторвавшегося потока со стенкой давление постоянно и равно донному давлению, а в точке встречи давление скачком возрастает до давления за замыкающим скачком уплотнения. В действительности повышение давления в области присоединения происходит плавно, причем длина этой области оказывается в несколько раз больше длины изобарической области за уступом. Следует также отметить, что этот метод не позволял определять донное давление при толщинах начального пограничного слоя, значительно превышающих высоту уступа.

Для устранения указанных недостатков была проведена модернизация математической модели отрывного течения при сохранении относительной простоты метода.

1. Предполагается, что течение за уступом содержит следующие характерные области (фиг. 1): *I* – набегающего сверхзвукового потока с пограничным слоем, *II* – перехода потока и пограничного слоя через веер волн разрежения или скачок уплотнения у кромки уступа, *III* – изобарическую длиной  $L_b$ , с давлением, приблизительно равным донному давлению  $p_b$ , *IV* – повышения давления длиной  $L_p$ , *V* – выравнивания давления.

Течение описывается с помощью двух прямоугольных систем координат. Система  $r, z$  служит для описания невязкого ядра потока, причем ось  $z$  направлена вдоль стенки за уступом или вдоль оси симметрии. Система криволинейных координат  $x, y$  служит для описания параметров в зоне смешения, причем ось  $x$  располагается на расстоянии  $y_m(x)$  от линии вытеснения  $\delta^*(x)$ . Считаются заданными все параметры невязкого ядра потока  $u_1, v_1, p_1, \rho_1$ , показатель адиабаты  $\gamma$  и число Маха  $M_1$  перед уступом.



Фиг. 1. Схема отрывного течения за плоским или осесимметричным донным уступом

Параметры невозмущенного потока перед телом или уступом обозначаются нижним индексом  $\infty$ . В том случае, когда поток перед уступом считается невозмущенным, индексы 1 и  $\infty$  имеют одинаковый смысл. Если поток перед уступом неравномерен, то считается, что параметры на границе пограничного слоя определяются параметрами вязкого слоя на линии вытеснения. Профили скорости перед и непосредственно за уступом описываются степенным законом. Заданы: толщина  $\delta_1$ , толщина вытеснения  $\delta_1^*$ , показатель степени  $n_1$ , число Рейнольдса  $Re_1$ , определяемое по параметрам набегающего потока и характерной длине  $l$ . Тепловое состояние стенки характеризуется относительной энтальпией  $H_{w1} = H_{w1}^0 / H_1^0$ , где  $H_1^0$  — полная энтальпия вязкого ядра потока.

Донное давление  $p_b$  и энтальпия  $H_b$  определяются в результате итерационных расчетов с помощью замыкающих задачу уравнений баланса массы и тепла.

Параметры пограничного слоя  $\delta_2$  и  $n_2$  за веером волн разрежения или за скачком рассчитываются с помощью соотношений [1].

Для заданного  $p_b$  с помощью численного метода [2] рассчитывается граница вязкой струи, представляющей собой линию вытеснения, и определяется ордината этой линии  $r^*(z)$  или  $\delta^*(x)$ . Эта линия должна начинаться в точке  $z = 0, r = h + \delta_1^*$ . В области веера волн разрежения, где скорость потока изменяется от  $u_1$  до  $u_2$ , пограничный слой имеет сложную структуру. Для упрощения предполагается, что изобарическая зона смешения развивается от начального сечения II, перпендикулярного линиям тока. В этом сечении  $x = 0$  и толщина пограничного слоя  $\delta_2$ . Предполагается, что от сечения  $z = 0$  до сечения  $z_2 = \delta_2 \sin \theta_2$  давление на границе струи меняется по линейному закону от  $p_1$  до  $p_b$  ( $\theta_2 = \theta_3$  — угол отклонения потока относительно оси  $z$ ). Это позволяет получить плавную линию вытеснения  $r^*(z)$  от начальной точки  $z = 0$  вниз по потоку.

В области III для каждого  $x$  необходимо определить параметры зоны смешения. Профили скорости и энтальпии поперек зоны смешения описываются в системе координат  $\xi$  и  $\eta$  с помощью соотношений, приведенных в [1]

$$\varphi = \frac{u}{u_3} = \varphi(\eta, \xi, \varphi_a, n_2), \quad H = \frac{H^0}{H_1^0} = H(\varphi, \varphi_a, H_b, H_{w1})$$

При образовании зоны смешения между потоком и донной областью в формулах для  $\varphi$  и  $H$  можно принять  $\varphi_a \approx 0$ , поскольку скорости обратного потока малы.

Ординаты  $\eta_\delta$  и  $\eta_0$  верхней и нижней границ зоны смешения определяются из условий

$$\varphi_\delta = \varphi(\eta_\delta) = 1 - \Delta, \quad \varphi_0 = \varphi(\eta_0) = \Delta$$

где  $\Delta$  — малая величина.

В предположении плоского течения в пределах изобарической зоны смешения на основе уравнений неразрывности и количества движения определяется относительная масса  $J_i$ , проходящая между нижней границей  $\eta_0$  и линией постоянной массы  $\eta_i$

$$J_i = J_A - J_F - (K_A - K_F - K_n)\xi - J_a$$

$$J_i = \int_{\eta_0}^{\eta_i} B_3 \varphi d\eta, \quad J_A = \int_{\eta_0}^{\eta_\delta} B_3 \varphi d\eta, \quad J_F = \int_{\eta_0}^{\eta_\delta} B_3 \varphi^2 d\varphi, \quad B_3 = (H - \varphi^2 c_3^2)^{-1}$$

$$K_A = n_2 \int_0^1 B_2 \varphi^{n_2} d\varphi, \quad K_F = n_2 \int_0^1 B_2 \varphi^{n_2+1} d\varphi, \quad B_2 = (H_{\delta 2} - \varphi^2 c_2^2)^{-1}$$

$$K_n = m_n \frac{\rho_1 u_1}{\rho_3 u_3} \frac{\varphi_n}{(1 - c_3^2)} \frac{h}{\delta_2}, \quad c = \left[ 1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M^2} \right]^{-1/2}$$

Здесь  $m_n$ ,  $\varphi_n$  – расход и скорость газа, вдуваемого в донную область,  $c$  – число Крокко,  $J_a$  – количество движения обратного тока – определяется с учетом влияния радиусов в случае осесимметричного течения. За уступом образуется циркуляционная зона с прямым и обратным потоками. Между ними располагается линия нулевых продольных скоростей. Необходимо определить ординату  $y_0$  этой линии. Профили скорости между нулевой и разделяющей линиями представляется линейной функцией  $u$

$$\frac{u}{u_d} = \frac{(y - y_0)}{(y_d - y_0)}$$

$a$  между нулевой линией и нижней стенкой ( $r_w$ ) или осью симметрии ( $r_w = 0$ ) – эмпирическим законом

$$\frac{u}{u_w} = 1 - \frac{(r - r_w)^3}{(r_0 - r_w)^3}, \quad r_0 = y_0 - y_m + r_*, \quad r_* = \delta^* + r_w$$

Ордината  $y_0$  находится из условия равенства расходов, проходящих в вертикальном направлении через линию нулевых скоростей и в прямом токе между разделяющей и нулевой линиями. При этом предполагается, что вертикальная составляющая скорости вдоль линии нулевых скоростей определяется соотношением  $u/a_* \approx bx/h$ , где  $a_*$  – критическая скорость в донной области,  $b \approx 0,085$  – эмпирическая константа.

Скорость обратного тока на стенке или оси симметрии  $u_w$  определяется из условий равенства расхода, проходящего через линию нулевых скоростей, расходу обратного потока.

В плоскости течения имеется известная линия  $\delta^*(x)$ , найденная для заданной величины  $p_b$ . Положение профиля скорости  $\varphi(x)$  в поле течения в вертикальном направлении определяется расстоянием  $y_m(x)$  между осью  $x$  и линией  $\delta^*$ . Из условия, что кривая  $\delta^*(x)$  является линией вытеснения, находятся

$$\eta_m = \eta_\delta - (1 - c_3^2)[J_F + (K_A - K_F - K_n)\xi], \quad y_m = \frac{\delta_2}{\xi} \eta_m$$

Расчет параметров изобарической зоны смешения ведется шагами по  $z$ . Длина изобарической области  $L_b$  определяется из условия равенства в этом сечении площадей прямого и обратного тока.

В области присоединения оторвавшегося потока (область IV) происходит повышение давления от  $p_b$  до  $p_4$  в волнах сжатия. Длину  $L_p$  этой области определим с помощью уравнения импульсов пограничного слоя в интегральной форме – в виде

уравнения баланса сил давления и трения, записанного для окрестности точки присоединения, где  $u \approx v \approx 0$ .

Пусть присоединение происходит на поверхности цилиндрической донной державки радиуса  $r_w$ . Выделим кольцевой элемент вблизи этой поверхности длиной  $L_p$  и высотой  $\delta_m$ . Здесь под  $\delta_m$  следует понимать расстояние по радиусу от поверхности до линии, отвечающей максимальному напряжению сил трения  $\tau_m$  или максимальной работе сил трения  $(u\tau)_m$ . Уравнение баланса сил с точностью до константы  $b_p$  можно записать в виде

$$b_p \Delta p (\delta_m + 2r_w) \delta_m = 2 \Delta \tau (\delta_m + r_w) L_p$$

С учетом связи  $\Delta p$  с параметрами невязкого потока получаем

$$L_p = \frac{1}{2} \frac{\delta_d + 2r_w}{\delta_d + r_w} \frac{\delta_d}{c_{fd}^{1/2} (M_3^2 - 1)^{1/4}}$$

Здесь принято, что линия  $m$  совпадает с разделяющей линией  $d$  и  $b_p = 0,25$ . Коэффициент трения  $c_{fd}$  определяется с использованием производной  $(\partial\phi/\partial\eta)_d$  [1].

В плоском случае  $r_w \rightarrow \infty$  и формула для  $L_p$  принимает простой вид

$$L_p = \delta_d c_{fd}^{-1/2} (M_3^2 - 1)^{-1/4}$$

Расчеты показали, что полученное выражение дает удовлетворительное значение  $L_p$  при умеренных числах  $M_1 \sim 2$ . С увеличением  $M_1$  до 4 оно начинает давать завышенные значения  $L_p$  из-за уменьшения ординаты  $\delta_d$ . Линии  $d$  и  $m$  все сильнее расходятся, приводя к появлению погрешности в определении  $c_{fd}$  и  $L_p$ . Поскольку профиль  $\phi(\eta)$  известен, то можно бы непосредственно определять  $c_{fd}$  из условия максимума  $\tau$  или  $u\tau$ . Но это усложнит расчет. Для этого случая найдено полуэмпирическое соотношение

$$L_p = \frac{(\delta_d + 2r_w) \delta_d}{(\delta_d + r_w) \text{tg } \theta_3}$$

В качестве окончательного значения  $L_p$  берется меньшее значение из двух, найденных двумя различными способами. Расчеты в диапазоне  $M_1 = 1-4$  показали, что такой приближенный способ определения  $L_p$  дает вполне хорошие результаты.

В ряде исследований, например [3], на основе анализа экспериментальных распределений давления в области присоединения оторвавшегося потока установлено, что эти распределения приблизительно подобны. Если их построить в виде зависимости относительного приращения давления от относительного приращения длины, то эти кривые практически совпадут. По-видимому, наличие такого закона подобия является закономерным фактором. Повышение давления возникает из-за взаимодействия потока со стенкой и осесимметричных эффектов. В зоне смешения перед областью повышения давления  $IV$  образуется "струйный" профиль скорости. Поскольку этот профиль скорости имеет приблизительно подобный вид для различных отрывных потоков, то следует ожидать, что и распределение давления будет иметь подобный характер. На основе сказанного делаем предположение, что распределение давления на длине  $L_p = x_4 - x_3$  линейно связано с профилем скорости

$$\frac{p - p_b}{p_4 - p_b} = \frac{\phi - \phi_0}{\phi_8 - \phi_0}, \quad \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \frac{\eta - \eta_0}{\eta_8 - \eta_0}$$

С помощью этих двух соотношений находятся  $p$  и  $x$  для каждого  $\eta$ , т.е. находится  $p(x)$ . Последней искомой величиной в области повышения давления является  $p_4$ . Если  $p_4$  известно, то находится распределение  $p(x)$ . Расчет невязкого ядра потока [2] дает

линию вытеснения  $\delta^*(x)$ , отвечающую этому распределению  $p(x)$ . Был использован приближенный метод определения  $p_4$ . Принято, что угол наклона потока в сечении IV равен  $\Delta\theta_4 = \theta_4 - \theta_w = -0,03$ . Это условие позволяет однозначно найти  $p_4$ . При этом используются итерации. Задается  $p_4$ . Находится  $p(x)$  на длине  $L_p$ . Определяется линия вытеснения  $\delta^*(x)$  на основе расчета невязкого ядра потока и находится величина  $|\Delta\theta_4 + 0,03|$ . Если она превышает заданную точность, то последующие значения  $p_4$  выбираются так, чтобы достичь в процессе итераций заданной точности.

Экспериментальные данные показывают, что в точке присоединения  $R$ , куда приходит разделительная линия  $d$ , давление  $p_R < p_4$ . Если это не учитывать, то значения  $p_b$  оказываются завышенными примерно на 30% при  $M_1 \sim 4$ . Для получения более точного согласования приближенно учтем указанный эффект. На основе обработки экспериментальных данных и пробных расчетов строится эмпирическая кривая  $N = (p_R - p_b)(p_4 - p_b)^{-1} = f(M_3)$ . Причем  $N$  принимает значения от 1 до  $\sim 0,41$  при изменении  $M_3^{-1}$  от 1 до 0,14. Использование величины  $N$  позволило получить достаточно правильные значения  $p_b$  в диапазоне  $M_1 = 1-4$  для плоских и осесимметричных течений.

В соответствии с [1] условие присоединения берется в виде

$$\left(\frac{p_d^*}{p_b}\right)_3 = \frac{p_R}{p_b} \frac{1}{p_*}$$

$$p_R = p_b + N(p_4 - p_b), \quad p_* = \frac{[A_1^2 + (1 + 0,5(\gamma - 1)M_3^2)A_2]^{1/2} - A_1}{A_2}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}(\gamma + 1)(A_3 - 1)M_3^2, \quad A_2 = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_3^2 A_3$$

$$A_3 = (0,91)^2 \left(\frac{c_{fi}}{c_{fib}}\right)^{0,2} H_b^{0,08}, \quad c_{fi} = (2 \lg \text{Re}_x - 0,65)^{-2,3}, \quad \text{Re}_x = \text{Re}_1 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

В качестве базовой величины взято  $\text{Re}_x = 6 \cdot 10^6$  и соответственно  $c_{fib} = 0,00278$ .

Когда найдено полное давление  $p_d^*$  на разделяющей линии в сечении III, можно определить относительную скорость на этой же линии

$$\Phi_d = \frac{\sqrt{H_d}}{c_3} \left[ 1 - \left(\frac{p_d^*}{p_b}\right)_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]^{1/2}$$

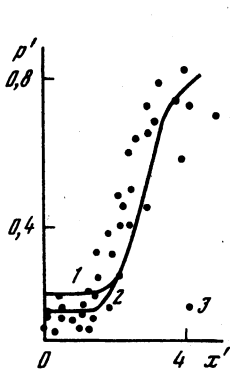
Ордината  $\eta_{d3}$  находится из уравнения

$$\Phi(\eta_{d3}, \Phi_a, \xi_3, n_2) = \Phi_d$$

До сих пор считалось, что величины  $p_b$  и  $H_b$  заданы. Для их определения и решения всей задачи используются уравнения баланса массы и тепла для плоского и осесимметричных течений

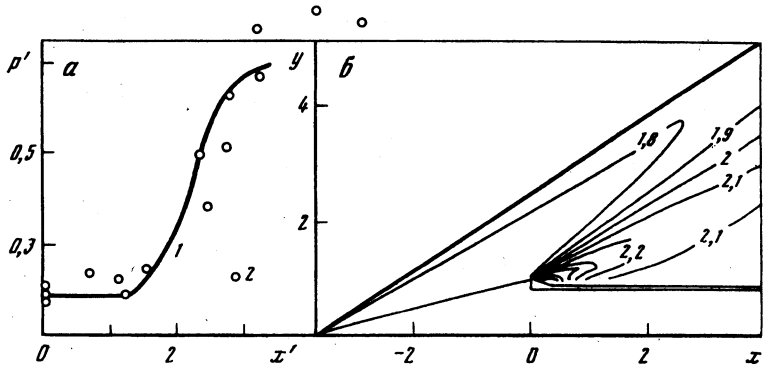
$$\int_{y_{d3}}^{y_{j3}} \rho u dy - m_n = 0$$

$$\int_{y_{d3}}^{y_{83}} \rho u (H - H_1) dy + \int_0^{\delta_2} \rho u (H_1 - H_{\delta_2}) dy + H_1 \int_{y_{d3}}^{y_{j3}} \rho u dy - m_n H_n - Q_{wb} = 0$$



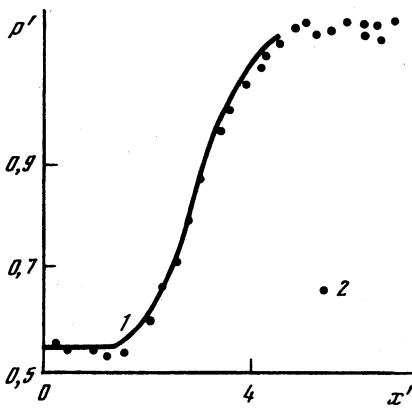
Фиг. 2

Фиг. 2. Сравнение распределения давления  $p'$  за донным уступом с экспериментальными данными (3) для  $M_\infty = 4$ : кривые 1, 2 –  $\delta'_1 = 0,5; 0,2$



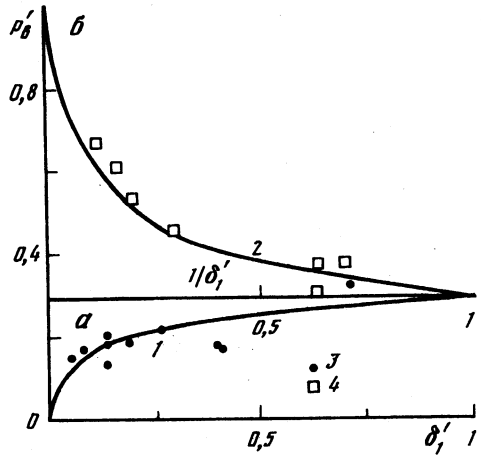
Фиг. 3

Фиг. 3. Обтекание осесимметричного уступа: а – сравнение распределения давления (кривая 1) за кольцевым уступом с летными данными (2) для  $M_\infty = 2$ ; б – положение головной ударной волны и распределение изомахов при обтекании конуса с донной державкой



Фиг. 4

Фиг. 4. Сравнение распределения давления  $p'$  (кривая 1) за уступом цилиндра с донной державкой с экспериментальными данными (2) для  $M_\infty = 2$  и  $r'_w = 0,4$



Фиг. 5

Фиг. 5. Сравнение донного давления  $p'_b$  за плоским уступом с экспериментальными данными (3, 4) для  $M_1 = 3$  при изменении  $\delta'_1$  от 0 до  $\infty$ : а: кривая 1 – численный расчет  $p'_b(\delta'_1)$  ( $0 \leq \delta'_1 \leq 1$ ); б: 2 – численный расчет  $p'_b(1/\delta'_1)$  ( $1 \leq \delta'_1 \leq \infty$ )

Здесь  $Q_{wb}$  – тепло, подводимое в донную область через стенку уступа,  $H_n$  – энтальпия вдуваемого газа.

При выводе уравнения для  $J_j$  в предыдущих работах обычно не учитывалось количество движения обратного тока  $J_a$ . Отбрасывание этого члена мотивировалось тем, что он более чем на порядок меньше количества движения прямого тока в зоне смешения, т.е.  $J_a \ll J_F$ . Однако  $J_a$  следует сравнивать не с  $J_F$ , а с определяемой величиной  $J_j$ . Оказывается, что  $J_a$  нельзя считать малой величиной по сравнению с  $J_j$ , хотя  $J_a < J_j$ . Поэтому здесь и введен учет  $J_a$ .

Интересно отметить, что члены  $J_a$  и  $N$  в некоторой степени компенсируют друг друга. Поэтому их одновременный неучет в предыдущих работах не приводил к заметным погрешностям при определении  $p_b$ , по крайней мере для умеренных чисел  $M_1 \sim 2$ .

2. Для проверки разработанного полуэмпирического метода проведены расчеты и сравнения с имеющимися экспериментальными данными.

Расчеты обтекания плоского уступа выполнены для диапазонов:  $M_\infty = 1-4$ ,  $\delta'_1 = 0-1$ ,  $Re_1 = 10^6 - 5 \cdot 10^7$ ,  $n_1 = 2-15$ ,  $\gamma = 1,2-1,67$ , при отсутствии теплоток и  $m_n = 0$ . В качестве примера на фиг. 2 показано сравнение рассчитанного распределения давления  $p'_b$  и  $p'$  в зависимости от  $x'$  с экспериментальными данными разных авторов, собранными в [4] для  $M_\infty = 4$ . Здесь и далее введены обозначения  $\delta' = \delta/h$ ,  $x' = x/h$ ,  $p' = p/p_\infty$  для относительных величин.

Расчеты обтекания осесимметричных уступов выполнены при отсутствии и при наличии донной державки.

Для осесимметричного тела типа снаряда вычисленные значения  $p'_b$  и  $p'(x')$  для режимов  $M_\infty = 1,4-4$ ,  $Re_1 = 6 \cdot 10^6$ ,  $n_1 = 10$ ,  $\delta'_1 = 0,2$  и  $0,5$  согласуются с экспериментальными данными как по величине, так и по характеру изменения.

В результате расчетов получены распределения давления за кольцевым уступом ракеты, состоящей из головной конической части и цилиндрического корпуса меньшего диаметра. Эта ракета испытана в летних условиях [5] для диапазона  $M_\infty = 1,5-3,5$ . Расчеты выполнены для  $M_\infty = 2$ ,  $Re_1 = 2 \cdot 10^7$ ,  $n_1 = 10$ ,  $\delta'_1 = 0,2$ , а также  $M_\infty = 3$  и  $Re_1 = 3 \cdot 10^7$ . Сравнение рассчитанного распределения  $p'(x')$  для  $M_\infty = 2$  с экспериментальными данными представлено на фиг. 3. Здесь же показана картина течения и изомахи.

Цилиндр с донной державкой, имеющий радиус  $r'_w = r_w / r_h = 0,4$ , где  $r_h = r_w + h$ , испытан в аэродинамической трубе [3]. Полученная из расчета при  $M_\infty = 2$ ,  $Re_1 = 1,4 \cdot 10^7$ ,  $n_1 = 10$ ,  $\delta'_1 = 0,67$  кривая  $p'(x')$  сопоставляется с экспериментальными точками на фиг. 4.

Выполнены расчеты обтекания осесимметричного уступа без донной державки для двух значений расстояния до верхней границы потока, моделирующей стенку трубы. Первое значение  $R_b = 2,1$  относится к минимальному радиусу аэродинамической трубы [6]. Второй радиус  $R_b = 2,67$  – к предельному случаю, когда влияние границы на параметры донного течения исчезает, что установлено расчетами. Экспериментальные данные [6] определены при  $M_\infty = 1,85$ ,  $\delta'_1 = 0,59$ ,  $Re_1 = 1,56 \cdot 10^6$ ,  $n_1 \approx 10$ .

Вычисленное распределение  $p'(x')$  вдоль оси симметрии за уступом для этих же начальных данных при  $R_b = 2,1$  согласуется с экспериментом. Сравнение результатов расчета при  $R_b = 2,1$  и  $2,67$  показывает, что донное давление в первом случае меньше, чем во втором. Из этого следует, что на экспериментальных данных [6] сказывалось влияние стенок аэродинамической трубы. Анализ картины течения (изомахи) при  $R_b = 2,1$  показывает, что волна разрежения, идущая от кромки уступа, отражается от стенки трубы и попадает в область повышения давления отрывной зоны, что приводит к уменьшению донного давления.

3. При решении ряда технических задач возникает необходимость определения донного давления для толстого пограничного слоя перед уступом при  $0 \leq \delta_1^{-1} \leq 1$ . Такая задача возникает, например, при определении оптимальной конфигурации сопла заданной длины, при исследовании влияния радиуса донной державки на  $p_b$ .

Для решения такого типа задач разработан приближенный метод расчета донного давления. Пусть имеется уступ высотой  $h$ , который обтекается сверхзвуковым потоком с параметрами  $M_1$ ,  $Re_1$ ,  $\gamma$ ,  $n_1$ ,  $\delta'_1 > 1$ .

Считается, что область влияния характеризуется неравенством

$$M_1 \delta'_1 \leq 2 \left[ 1 + \left( \frac{h}{r_h} \right)^{0,25} \right] \quad (3.1)$$

Здесь константы уточняются при проведении контрольных расчетов. Если это условие нарушается, то выделяется эффективная часть пограничного слоя с толщиной, определяемой из условия

$$\delta'_e = \frac{2}{M_1} \left[ 1 + \left( \frac{h}{r_h} \right)^{0,25} \right]$$

Поток выше этой части относится к вязкому ядру. Хотя вязкое ядро будет иметь переменные по высоте скорости, в приближенных расчетах этим обстоятельством пренебрегается. Поэтому считается, что этот внешний поток имеет скорость на границе  $\delta_e$

$$u_e = u_1 \left( \frac{\delta_e}{\delta_1} \right)^{1/n_1}$$

Тогда задача определения  $p'_b = p_b / p_1$  при заданных параметрах  $M_1, \delta'_1, n_1$  сводится к задаче нахождения  $p_b/p_e$  с этими параметрами на границе  $\delta_e$ . При этом предполагается, что  $p'_b = p_b / p_e$ , а показатель  $n_e$  меняется по квадратичному закону от значения  $n_1$  при  $\delta_e/\delta_1 = 1$  до 1 при  $\delta_e/\delta_1 \rightarrow 0$ . С уменьшением  $\delta_1^{-1}$  величина  $M_e$  падает и может стать меньше единицы. В этом случае такой подход неприменим. Для получения  $p_b$  при очень малых  $\delta_1^{-1}$  можно использовать квадратичную аппроксимацию зависимости  $p'_b$  от  $(p'_b)_0$  при  $\delta_1^{-1} = 0,1$  до значения 1 при  $\delta_1^{-1} = 0$ .

Итак, для заданных начальных параметров  $M_1, \delta'_1, n_1, Re_1, \gamma$  величина донного давления определяется по одной из трех методик.

1. При выполнении условия (3.1) решается обычная задача нахождения донного давления.
2. Если это условие нарушается, то ищется решение эквивалентной задачи с параметрами  $M_1, \delta'_1, n_2, Re_1, \gamma$ .
3. При  $\delta'_1 > 10$  эквивалентная задача решается с  $\delta'_1 = 10$ , а затем донное давление находится из аппроксимационного соотношения

$$p'_b = 1 - (1 - (p'_b)_0) [10\delta_1^{-1}]^{1/2}$$

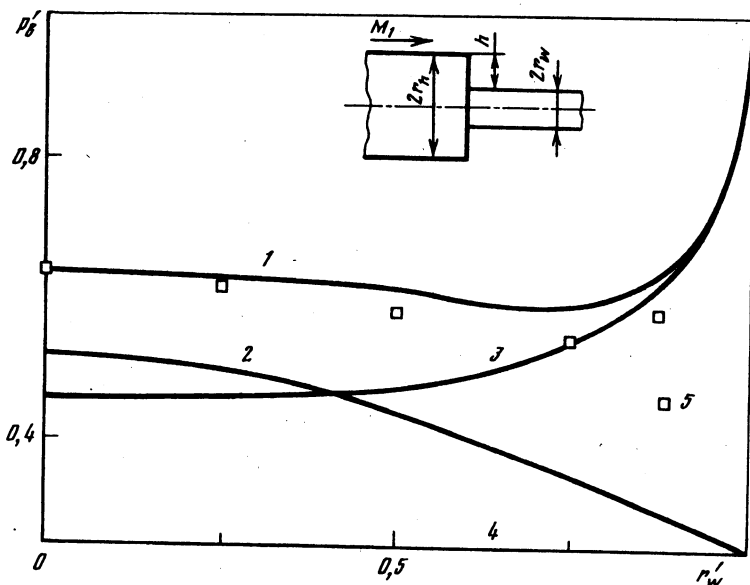
Расчеты для плоского уступа выполнены при  $M_1 = 1,5; 2,25; 2,4; 3$  для полного диапазона изменений  $\delta'_1$  от 0 до  $\infty$  с  $Re_1 = 6 \cdot 10^6, n_1 = 10, \gamma = 1,4$ .

В качестве примера на фиг. 5 приводятся рассчитанные значения  $p'_b$  для  $M_1 = 3$  и экспериментальные данные различных авторов.

С использованием разработанных методов исследовано обтекание цилиндра с уступом при наличии донной державки. Расчеты проведены для  $M_1 = 2, Re_1 = 1,5 \cdot 10^6, n_1 = 10, \gamma = 1,4, \delta'_{1r} = \delta_1 / r_h = 0,5$ . Относительный радиус донной державки  $r'_w$  изменялся от 0 до 1, а относительная толщина пограничного слоя  $\delta'_1$  увеличивалась от 0,5 до  $\infty$ . Рассчитанная зависимость  $p'_b(r'_w)$  донного давления на фиг. 6 (кривая 1) сопоставляется с экспериментальными данными [7].

Для этого же тела выполнены расчеты донного давления при нулевой толщине





Фиг. 6. Изменение донного давления  $p'_b$  при  $M_1 = 2$  в зависимости от относительного радиуса (высоты) донной державки  $r'_w$  для  $\delta'_{1r} = 0,5$  и  $0$ : кривые 1, 2 (осесимметричное течение) и 3, 4 (плоское течение); 5 – экспериментальные данные

пограничного слоя  $\delta_1 = 0$  (кривая 2). В этом случае, как видно из графика, величина  $p'_b$  непрерывно уменьшается с ростом  $r'_w$ .

Для сравнения получена зависимость  $p'_b(r'_w)$  для плоского тела при  $\delta'_{1r} = 0$  и  $0,5$ . При  $\delta_1 = 0$  величина донного давления не зависит от  $r'_w$  (кривая 4), а при  $\delta'_{1r} > 0$  (кривая 3) она непрерывно увеличивается с возрастанием  $r'_w$  и  $\delta'_1$ . С ростом  $r'_w$  рассчитанные величины  $p'_b$  для осесимметричного и плоского течений сближаются и при  $r'_w \rightarrow 1$  ( $h \rightarrow 0$ ) практически совпадают. Отметим, что при  $\delta_1 = 0$  зависимость  $p'_b$  в окрестности  $h \approx 0$  ( $r'_w \rightarrow 1$ ) имеет разрыв. При  $h \rightarrow 0$  величина  $p'_b \rightarrow 0,25$ , а при  $h = 0$   $p'_b = 1$ .

**Заключение.** Разработанный относительно простой полуэмпирический метод позволяет рассчитывать величины донного давления и энтальпии за плоским и осесимметричным уступами, обтекаемым сверхзвуковым потоком, вполне удовлетворительно соответствующие экспериментальным данным. Исследовано влияние числа Маха, показателя адиабаты и набегающего потока, а также относительной толщины и формы профиля скорости турбулентного пограничного слоя в сечении перед уступом на параметры донного течения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Масалов В.К., Тагиров Р.К. Расчет донного давления и энтальпии за уступом, обтекаемым двумя сверхзвуковыми потоками, с учетом влияния пограничных слоев и тепловых потоков // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 167–176.
2. Аукин М.К., Тагиров Р.К. Конечно-разностная схема второго порядка для расчета трехмерных сверхзвуковых течений идеального газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 7. С. 1057–1066.
3. Глотов Г.Ф., Лаврухин Г.Н. Исследование срывного течения за осесимметричным уступом с центральным стержнем // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 143–150.

4. Лэмб, Худ. Интегральный метод исследования присоединения оторвавшегося плоского турбулентного слоя при сверхзвуковом течении в донной области // Конструирование и технология машиностроения. 1968. № 4. С. 25–35.
5. Picken J. Free-flight measurements of pressure and heat transfer in regions of separated and reattached flow at Mach numbers up to 4 // Aeronaut. Res. Council. Current Papers. 1965. № 706. 26 p.
6. Badrinarayanan M.A. An experimental investigation of base flows at supersonic speeds // J. Roy. Aeronaut. Soc. 1961. V. 65. № 607. P. 475–482.
7. Beheim M.A. Flow in the base region of axisymmetric and two – dimensional configurations // NASA. Tech. Rept. 1961. № 77. 32 p.

Москва

Поступила в редакцию  
22.VII.1997