

УДК 532.51.013.4:536.25

© 1998 г. Д.Е. МЕЛЬНИКОВ, С.Г. ЧЕРКАСОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ

Исследована смешанная ламинарная конвекция в вертикальной цилиндрической емкости. Разработана модель течения и получено распределение температуры в ядре при заданном удельном тепловом потоке на боковой поверхности. Для случаев с постоянным и с изменяющимся с высотой по линейному закону удельным тепловым потоком на боковой стенке проведено сравнение результатов аналитического моделирования с численными решениями задачи.

1. Рассматривается смешанная ламинарная стационарная конвекция в вертикальной цилиндрической емкости радиуса R , частично заполненной жидкостью до высоты L . Через днище емкости подводится жидкость при температуре T_0 и отводится с тем же расходом через ее верхнюю границу. К жидкости через боковую поверхность емкости подводится тепловой поток.

Исследуется случай, когда расход прокачки G_0 соизмерим с расходом через развивающийся на боковой стенке свободноконвективный пограничный слой. Предполагается, что число Грасгофа велико и поэтому толщина пограничного слоя мала по сравнению с радиусом емкости. Считается также, что верхняя граница жидкости свободная и плоская, поля скорости и температуры осесимметричны, угловая составляющая скорости отсутствует. Свободная поверхность и дно емкости теплоизолированы.

Для расчета полей течения и температуры используются двумерные нестационарные уравнения тепловой конвекции (уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска [1]). Представим эти уравнения в переменных вихрь – функция тока в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + v \frac{\partial \omega}{\partial z} = \text{Gr} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \left(1 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \omega r \quad (1.2)$$

$$r \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (ru\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (rv\theta) = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (1.3)$$

В уравнениях (1.1)–(1.3) t – время; r и z – радиальная и вертикальная координаты (ось z направлена против вектора силы тяжести); u и v – составляющие скорости по осям r и z . Безразмерная температура θ введена соотношением $\theta = (T - T_0)\lambda q/R$, где T – температура жидкости, λ – коэффициент теплопроводности, q – характерная величина удельного теплового потока на боковой поверхности емкости; $\text{Gr} = g\beta R^4 q/\nu^2 \lambda$ – число Грасгофа; g – ускорение свободного падения; β и ν – коэффициенты теплового расширения и кинематической вязкости жидкости; $\text{Pr} = \nu/a$ –

число Прандтля; a – коэффициент температуропроводности. За характерные масштабы длины, времени и скорости приняты величины R , R^2/ν и ν/R соответственно. Вихрь ω и функция тока Ψ введены соотношениями

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

При расчетах профили скорости подводимой и отводимой из емкости жидкости предполагаются параболическими. Жидкость подводится и отводится через кольцевые отверстия с внутренними и внешними радиусами r_1 , r_2 и r_3 , r_4 соответственно. При решении уравнений (1.1)–(1.3) граничные условия для функции тока в области входного и выходного отверстий ставятся в зависимости от их расположения

$$\Psi = -\frac{\text{Re}}{2} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^2, \quad a = 0, \quad 0 \leq r \leq b$$

$$\Psi = -\frac{\text{Re}}{2} \left(1 + \frac{1}{16ba^3} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{2b}{3} r^3 + \frac{b^2 - a^2}{2} r^2 - \frac{(b-a)^3}{12} (b+3a) \right) \right), \quad a \neq 0, \quad a \leq r \leq b$$

Здесь a и b – соответственно внутренний и внешний радиусы входного или выходного отверстий.

На оси симметрии, на боковой поверхности емкости, а также на днище и свободной поверхности в областях, не совпадающих с входным и выходным отверстиями, имеют место условия непротекания

$$\Psi(r, H) = \Psi(1, z) = \Psi(r, 0) = 0, \quad r_2 < r, \quad r_4 < r$$

$$\Psi(r, 0) = \Psi(0, z) = \Psi(r, H) = -\frac{\text{Re}}{2}, \quad r < r_1, \quad r < r_3$$

В граничных условиях для функции тока $H = L/R$ – безразмерная высота столба жидкости; $\text{Re} = G_0/\pi r \nu R = V_0 R/\nu$ – число Рейнольдса; V_0 – средняя по сечению емкости скорость прокачки, ρ – плотность жидкости. В дальнейшем будем полагать число Рейнольдса существенно ббльшим единицы.

На боковой поверхности и днище емкости реализуются условия прилипания

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r}(1, z) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}(r, 0) = 0$$

На оси симметрии выполняются условия симметрии

$$\omega = \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = 0$$

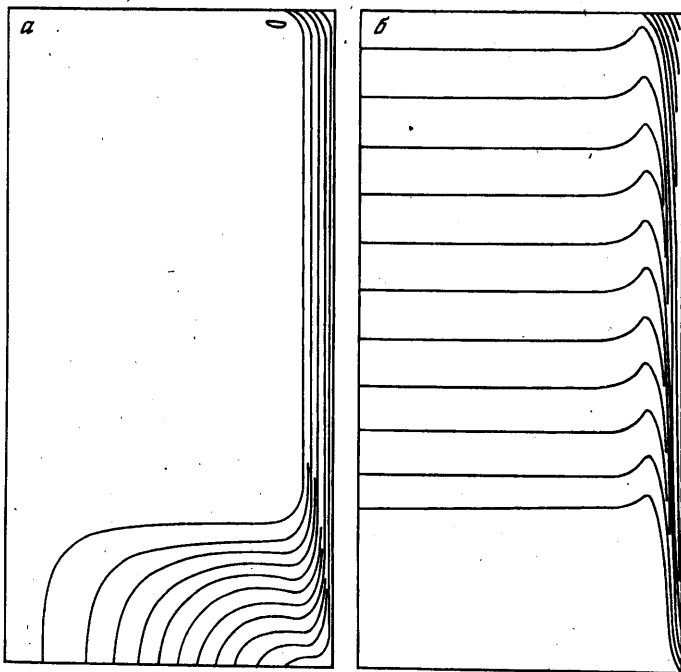
На свободной поверхности в области, не совпадающей с выходным отверстием, отсутствует трение, что приводит к соотношениям

$$\omega(r, H) = 0, \quad r < r_3, \quad r_4 < r$$

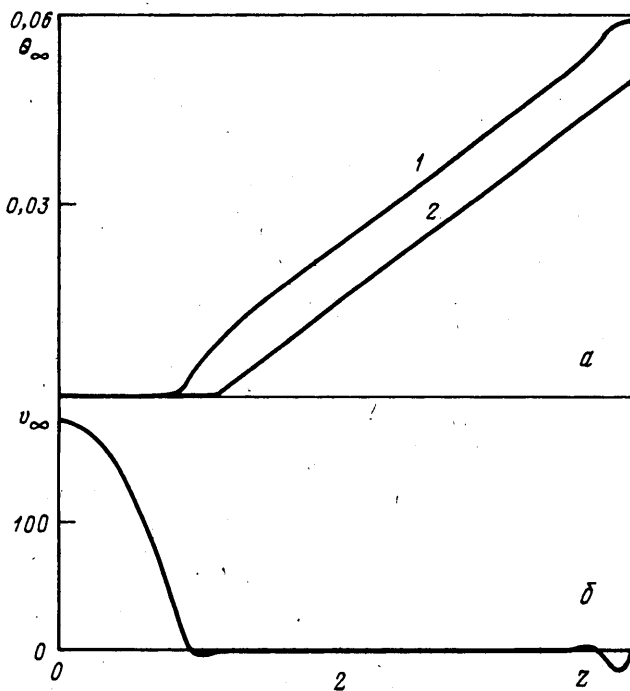
Условия подвода тепла к жидкости

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(r, 0) = \frac{\partial \theta}{\partial z}(r, H) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(1, z) = q_w(z)$$

Здесь $q_w(z)$ – безразмерный удельный тепловой поток на боковой поверхности.



Фиг. 1. Линии тока (а) и изотермы (б) при $Gr = 10^8$; $Re = 90$; $Pr = 1,3$; $q_w = 1$



Фиг. 2. Распределения температуры (а) и вертикальной составляющей скорости (б) на оси симметрии емкости в случае $Gr = 10^8$; $Re = 90$; $Pr = 1,3$; $q_w = 1$: 1 – численное решение, 2 – теория

Численные решения рассматриваемой задачи получены методом сеток по модифицированной с учетом отличительных особенностей данной задачи методике [2]. На фиг. 1, 2 приведены результаты расчетов для случая $Gr = 10^8$, $Re = 90$, $q_w = 1$, $Pr = 1,3$ и $H = 4$. Расчеты проводились на равномерной по оси z и неравномерной вдоль радиуса сетке, имеющей 129 узлов по вертикали и 81 узел по горизонтали. Минимальный шаг сетки в горизонтальном направлении составлял 0,005 у стенки, а максимальный 0,01 у оси симметрии.

Приведенные на фиг. 1, 2 расчеты показывают, что поля течения и температуры подразделяются на две области: примыкающий к боковой поверхности емкости пограничный слой и ядро. Последнее в свою очередь подразделяется на две зоны: нижнюю, где имеется течение жидкости, а температура постоянна и равна температуре подаваемой через днище емкости жидкости, и верхнюю, в которой жидкость неподвижна и возникает положительный градиент температуры. Значение координаты z_* начала стратифицированной по температуре области примерно совпадает со значением, где вертикальная составляющая скорости жидкости в ядре равна нулю. Совпадение координат начала стратифицированной области и обращения в ноль скорости течения в ядре является следствием того факта, что влияние теплопередачи диффузией против течения может быть заметно лишь при малых скоростях. В нестратифицированной области пограничный слой, развиваясь, увлекает из центральной части емкости поднимающуюся вверх жидкость, поэтому по мере уменьшения скорости в ядре с высотой более существенную роль начинают играть кондуктивный перенос тепла снизу вниз. Таким образом, начиная с некоторой высоты, в ядре появляется положительный градиент температуры, т.е. появляется стратификация. Координатой начала стратифицированной области можно приближенно считать то значение z_* , где скорость в ядре становится малой, а расход через пограничный слой равен расходу прокачки. Кроме того, как можно видеть на фиг. 1, б, структура поля температуры такова, что в ядре она является функцией только вертикальной координаты.

2. Описанные выше результаты численного решения задачи в случае постоянного теплового потока на боковой поверхности емкости используем для построения математической модели процесса для произвольного распределения теплового потока и при сделанных выше предположениях. Развиваемая в дальнейшем модель смешанной ламинарной конвекции основана на условном выделении характерных зон. На боковой стенке развивается тонкий свободноконвективный пограничный слой. В центральной части емкости выделяется ядро, которое в свою очередь подразделяется на две области; нестратифицированную ($z < z_*$) и стратифицированную по температуре ($z_* < z < H$). Согласно такому разделению ядра, в пограничном слое также выделяются две зоны, относящиеся соответственно к нестратифицированной и стратифицированной областям. Также считается, что распределение температуры в ядре не зависит от радиальной координаты.

Поскольку толщина пограничного слоя мала по сравнению с радиусом емкости, то локально боковую поверхность можно рассматривать как плоскую стенку. Представим температуру жидкости в виде

$$\theta(r, z) = \theta_{\infty}(z) + \Delta\theta(r, z)$$

где $\theta_{\infty}(z)$ – температура жидкости в ядре, $\Delta\theta(r, z)$ – избыточная температура в пограничном слое.

Тогда в приближении Буссинеска безразмерные уравнения ламинарного свободноконвективного пограничного слоя примут вид [3]

$$u' \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} = Gr \Delta\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

$$u' \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} + v \frac{d\theta_\infty}{dz} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Здесь x – координата, направленная по нормали к стенке, $u' = -u$ – нормальная составляющая скорости.

Уравнение энергии в ядре имеет вид

$$v \frac{d\theta_\infty}{dz} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d^2 \theta_\infty}{dz^2} \quad (2.4)$$

где v_∞ – вертикальная составляющая скорости в ядре.

Вследствие относительно малой толщины пограничного слоя и соизмеримости расходов через него и подаваемой в емкость жидкости течение вне пограничного слоя не влияет на течение в нем. Поэтому граничные условия для скорости имеют вид

$$v(0, z) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x, z) = 0 \quad (2.5)$$

Для температуры граничные условия следующие:

$$\frac{\partial \Delta \theta}{\partial x}(0, z) = -q_w(z), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta \theta(x, z) = 0 \quad (2.6)$$

Рассмотрим случай, когда в стратифицированной области ($z_* \leq z < H$) в свободноконвективном пограничном слое реализуется режим локальной автомодельности [4–7]. Тогда уравнение (2.3) примет следующий вид:

$$v \frac{d\theta_\infty}{dz} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

Интегрируя уравнение (2.7) по нормальной к стенке координате с учетом граничных условий (2.5), (2.6), получаем равенство

$$\frac{d\theta_\infty}{dz} \int_0^\delta v dx = \frac{1}{\text{Pr}} q_w(z) \quad (2.8)$$

где δ – толщина свободноконвективного пограничного слоя.

Рассмотрим какое-либо горизонтальное сечение. Расход через него есть сумма двух составляющих: расходов через пограничный слой и ядро, которые в сумме равны расходу подводимой в емкость жидкости. Приближенно из-за малой толщины пограничного слоя баланс расходов можно записать в виде

$$\int_0^\delta v dx + \int_0^1 v_\infty r dr = \frac{\text{Re}}{2} \quad (2.9)$$

Подставляя в равенство (2.8) выраженный из уравнения (2.9) расход через пограничный слой, с учетом (2.4) после преобразований получаем уравнение для определения стратификации в ядре

$$\frac{1}{\text{Pe}} \frac{d^2 \theta_\infty}{dz^2} - \frac{d\theta_\infty}{dz} + \frac{2}{\text{Pe}} q_w(z) = 0 \quad (2.10)$$

где $\text{Pe} = \text{RePr}$ – число Пекле.

При постановке граничных условий для уравнения (2.10) будем полагать, что температура в ядре на свободной поверхности равна температуре отбираемой из емкости жидкости θ_1 , которая в свою очередь определяется из уравнения интегрального

теплового баланса

$$\theta_1 = \frac{2}{\text{Pe}} \int_0^H q_w(z) dz$$

Тогда уравнение (2.10) решается при следующих граничных условиях:

$$\theta_{\infty}(z_*) = 0, \quad \theta_{\infty}(H) = \frac{2}{\text{Pe}} \int_0^H q_w(z) dz \quad (2.11)$$

Представим решение уравнения (2.10) в виде суммы

$$\theta_{\infty}(z) = \theta_{\infty}^1(z) + \theta_{\infty}^2(z)$$

Здесь $\theta_{\infty}^1(z)$, $\theta_{\infty}^2(z)$ – решения уравнений

$$\frac{d\theta_{\infty}^1}{dz} - \frac{2}{\text{Pe}} q_w(z) = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\text{Pe}} \frac{d^2\theta_{\infty}^2}{dz^2} - \frac{d\theta_{\infty}^2}{dz} + \frac{1}{\text{Pe}} \frac{d^2\theta_{\infty}^1}{dz^2} = 0 \quad (2.13)$$

Выше предполагалось, что $\text{Re} \gg 1$. Таким образом, если значение числа Прандтля таково, что $\text{Pe} \gg 1$, то, решая уравнения (2.12) и (2.13) с граничными условиями (2.11) и пренебрегая членами второго порядка малости по параметру $1/\text{Pe}$, после преобразований окончательно получаем

$$\theta_{\infty}(z) = \frac{2}{\text{Pe}} \left(\int_{z_*}^z q_w dz + \frac{\exp(\text{Pe} z) - \exp(\text{Pe} z_*)}{\exp(\text{Pe} H) - \exp(\text{Pe} z_*)} \int_0^{z_*} q_w dz \right) \quad (2.14)$$

Из структуры решения (2.14) видно, что у свободной поверхности появляется область толщины порядка $1/\text{Pe}$, в которой заметно влияние второго члена в выражении (2.14). Но поскольку число Пекле, по предположению, существенно больше единицы, толщина этой области мала. Поэтому для температуры в ядре, за исключением этой достаточно тонкой примыкающей к свободной поверхности зоны, получаем выражение

$$\theta_{\infty}(z) = \frac{2}{\text{Pe}} \int_{z_*}^z q_w dz \quad (2.15)$$

Решение (2.15) уравнения (2.10) получено, таким образом, в предположении

$$\frac{1}{\text{Pe}} \frac{d^2\theta_{\infty}}{dz^2} \ll \frac{d\theta_{\infty}}{dz} \quad (2.16)$$

Можно показать, что неравенство (2.16) эквивалентно тому, что вертикальная составляющая скорости жидкости в ядре стратифицированной области много меньше средней по горизонтальному сечению емкости скорости прокачки

$$v_{\infty} \ll \text{Re}$$

Для определения значения координаты z_* начала стратифицированной области рассмотрим задачу о естественной конвекции около нагретой стенки. Применим к рассматриваемой задаче интегральный метод Кармана [3].

В качестве примера рассмотрим случай, когда к стенке подводится постоянный однородный тепловой поток. Для жидкости с постоянными физическими свойствами уравнение движения в безразмерной форме записывается в виде

$$\frac{d}{dz} \left(\int_0^{\delta} v^2 dx \right) = Gr \int_0^{\delta} \Delta\theta dx - \frac{\partial v}{\partial x}(0, z) \quad (2.17)$$

Баланс энергии для элементарного объема в пограничном слое имеет вид

$$\frac{d}{dz} \left(\int_0^{\delta} v \Delta\theta dx \right) = \frac{1}{Pr} \quad (2.18)$$

Ламинарные профили температуры и скорости в пограничном слое аппроксимируются формулами [8]

$$v(x, z) = v_1(z) \frac{x}{\delta} \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^2, \quad \Delta\theta(x, z) = \theta_w(z) \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^2 \quad (2.19)$$

Подставляя выражение (2.19) в (2.17) и (2.18), окончательно получим

$$\begin{aligned} v_1(z) &= 6,23(1 + 1,25 Pr)^{-2/5} Pr^{-1/5} Gr^{2/5} z^{3/5} \\ \theta_w(z) &= 1,55(1 + 1,25 Pr)^{1/5} Pr^{-2/5} Gr^{-1/5} z^{1/5} \\ \delta(z) &= 3,1(1 + 1,25 Pr)^{1/5} Pr^{-2/5} Gr^{-1/5} z^{1/5} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для оценки значения координаты z_* , в которой вертикальная составляющая скорости обращается в нуль и появляется положительный градиент температуры в ядре, положим расход через пограничный слой, определенный по формулам (2.20), равным расходу подводимой в емкость жидкости.

Таким образом, получаем

$$z_* = 0,26(1 + 1,25 Pr)^{1/4} Pr^{3/4} Gr^{-1/4} Re^{5/4} \quad (2.21)$$

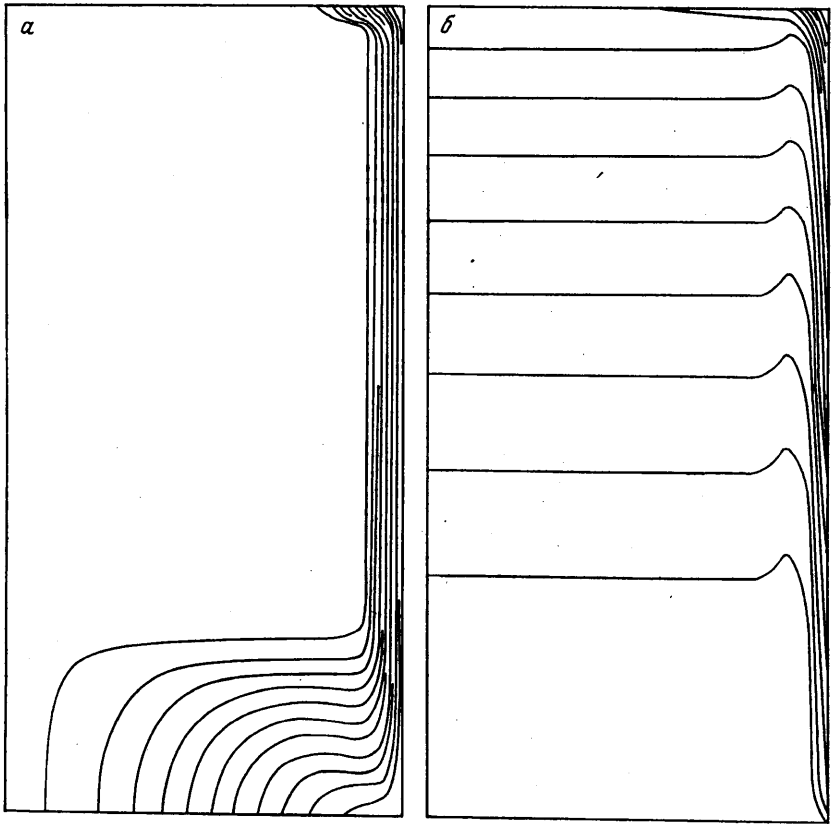
Распределение температуры в ядре, полученное по формулам (2.15) и (2.21) в случае постоянного теплового потока на боковой поверхности емкости и при тех же значениях чисел Pr , Re и Gr , при которых рассматриваемая задача решалась численно, представлено на фиг. 2, б (кривая 2). В этом случае, как можно видеть, разработанная выше модель стационарной ламинарной смешанной конвекции приводит к линейной стратификации. Причем градиент температуры в ядре с хорошей точностью совпадает с соответствующим значением, полученным численным решением задачи. Кроме того, из уравнения (2.4) непосредственно следует, что жидкость в ядре неподвижна и расход осуществляется через пограничный слой, в котором при данных условиях (постоянный тепловой поток на боковой поверхности и линейная стратификация) реализуется режим локальной автомодельности [4–7].

В случае, когда тепловой поток на боковой поверхности распределен по закону

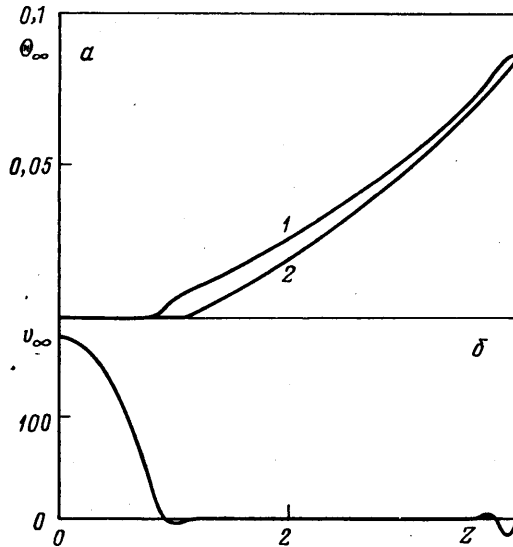
$$q_w(z) = 1, \quad 0 < z < z_*; \quad q_w(z) = 1 + a(z - z_*)^n, \quad z_* < z < H \quad (2.22)$$

где a и n – постоянные величины, для распределения температуры в ядре, за исключением тонкой примыкающей к свободной поверхности области, подставляя (2.22) в выражение (2.15), после преобразований получаем

$$\theta_{\infty}(z) = \frac{2}{Pe} \left(z - z_* + \frac{a}{n+1} (z - z_*)^{n+1} \right) \quad (2.23)$$



Фиг. 3. Линии тока (а) и изотермы (б) при $Gr = 10^8$; $Re = 90$; $Pr = 1,3$; $q_w = 0,5(z - z_*)$, $z > z_*$



Фиг. 4. Распределение температуры (а) и вертикальной составляющей скорости (б) на оси симметрии емкости в случае $Gr = 10^8$; $Re = 90$; $Pr = 1,3$; $q_w = 0,5(z - z_*)$, $z > z_*$: 1 – численное решение, 2 – теория

На фиг. 3, 4 показаны результаты численного решения задачи и распределение температуры в ядре (2.23) для случая $a = 0,5$, $n = 1$, $Gr = 10^8$, $Re = 90$, $Pr = 1,3$, $H = 4$. Расчеты подтверждают справедливость сделанных предположений о структуре полей течения и температуры. На фиг. 3 видно, что в ядре, начиная с некоторой высоты, жидкость неподвижна, а температура не зависит от радиальной координаты. Профиль температуры в ядре, полученный на основе численного решения задачи, с хорошей точностью совпадает с распределением (2.23) (фиг. 4, б).

Заключение. Разработана модель стационарной ламинарной смешанной конвекции в вертикальной цилиндрической емкости, позволяющая с достаточной точностью описать процесс, не прибегая к численным решениям полной системы уравнений Навье – Стокса. Поля течения и температуры условно разделяются на две области: пограничный слой на боковой стенке и центральное ядро. Последнее разделяется по высоте на нестратифицированную зону, где температура постоянна и равна температуре подводимой в емкость жидкости, и стратифицированную, в которой вертикальная составляющая скорости много меньше средней по сечению емкости скорости прокачки. Координата начала стратифицированной области приблизительно совпадает с координатой, в которой расход через пограничный слой равен расходу прокачки. Получена формула для распределения температуры в ядре. Теоретические результаты подтверждены численными решениями задачи для случаев постоянного и линейно изменяющегося с высотой тепловых потоков на боковой поверхности емкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Черкасов С.Г. Модифицированный численный метод для расчета тепловой конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. Т. 15. № 5. С. 144–153.
3. Джалаурия Й. Естественная конвекция. М.: Мир, 1983. 399 с.
4. Протопопов М.В., Черкасов С.Г. Особенности свободноконвективного пограничного слоя в стратифицированной по температуре среде // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 27–34.
5. Черкасов С.Г. Режим локальной автомодельности для свободноконвективного пограничного слоя в стратифицированной по температуре среде // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33. № 1. С. 44–48.
6. Черкасов С.Г. Свободноконвективный пограничный слой в режиме локальной автомодельности // Изв. РАН. Энергетика. 1996. № 2. С. 39–43.
7. Мельников Д.Е., Черкасов С.Г. Теория режима локальной автомодельности для ламинарного свободноконвективного пограничного слоя около вертикальной стенки // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 16–24.
8. Эккерт Э.Р.Г., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. 680 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1997