

УДК 532.526.5

© 1998 г. Вик.В. СЫЧЕВ

О ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С МАЛЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ТРЕНИЕМ

Исследовано влияние двумерных неровностей на течение в плоском стационарном пограничном слое несжимаемой жидкости, который обладает малым поверхностным трением. Детально рассмотрен режим обтекания с заданным градиентом давления, определяемым в масштабах малой неровности ее формой. Показано, что существует критическое значение высоты (глубины) неровности, при котором поверхностное трение впервые обращается в нуль, и установлена неединственность соответствующего решения.

Начало изучению влияния малых двумерных неровностей на течение в пограничном слое было положено в [1, 2]. В результате (см. также [3, 4]) было установлено, что в масштабах неровностей возможны три характерных режима обтекания. Это течение со взаимодействием, когда градиент давления и вытесняющее действие пограничного слоя являются взаимообусловленными, а уменьшение или увеличение продольного размера неровности по сравнению с масштабом области взаимодействия приводит соответственно к течению без вытесняющего действия (компенсационный режим) и течению с заданным градиентом давления.

Во всех этих работах исходный невозмущенный пограничный слой обладает конечным (безразмерным) поверхностным трением. Данная работа посвящена изучению влияния двумерных неровностей на течение несжимаемой жидкости в пограничном слое с малым поверхностным трением. Это исследование представляет интерес вследствие возможности анализа характерных свойств пограничного слоя и, в частности, что особенно важно, вопроса о неединственности решений.

1. Стационарное течение в двумерном пограничном слое Прандтля, который при больших числах Рейнольдса развивается вдоль поверхности обтекаемого тела, описывается решением следующей краевой задачи (см. [5]):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \frac{dp_e}{dx} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3}$$

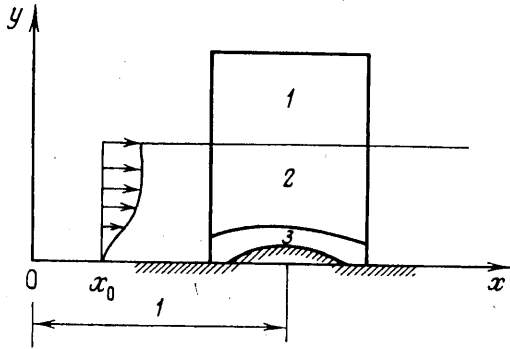
$$Y = 0: \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad Y \rightarrow \infty: \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \rightarrow u_e(x)$$

$$x = x_0: \Psi = \Psi^o(Y), \quad \frac{dp_e}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx} \quad (1.1)$$

$$u_e(1) = 1, \quad x_0 < x < 1, \quad x_0 > 0$$

$$Y = \text{Re}^{1/2} y, \quad \Psi = \text{Re}^{1/2} \psi$$

Здесь и ниже $LU_0\Psi$ – функция тока; $u = \Psi_y, v = -\Psi_x$ – безразмерные компоненты вектора скорости вдоль осей Lx, Ly прямоугольной системы координат, связанной с поверхностью тела $y = 0$; $P_0 + \rho U_0^2 p$ – давление, ρ – плотность жидкости. В качестве



Фиг. 1. Асимптотическая структура течения около неровности

характерного значения длины L взято расстояние от начала системы координат до точки на поверхности тела, в малой окрестности которой находится неровность (фиг. 1), а характерных скорости U_0 и давления P_0 – их значения в этой точке. В (1.1) функции $u_e(x)$, $p_e(x)$ определяют распределение скорости и давление на внешней границе пограничного слоя и считаются известными из решения задачи для внешнего потенциального потока, а $\Psi^0(Y)$ определяет начальный профиль скорости; $Re = U_0 L / \nu$ – число Рейнольдса, где ν – коэффициент кинематической вязкости.

Будем использовать следующее свойство уравнений пограничного слоя. Если $\psi_0(x, Y)$ – решение задачи (1.1), то к этому решению можно добавить собственную функцию вида $\sigma \gamma(x) \partial \psi_0 / \partial Y$, где σ – малый параметр и $\gamma(x)$ произвольна.

Весь дальнейший анализ посвящен исследованию пограничного слоя, обладающего малым поверхностным трением. Поэтому возьмем в качестве решения задачи (1.1) известное автомодельное решение Фолкнера и Скэн [6] (см. также [5, 7]), которое имеет вид

$$\begin{aligned}
 u_e &= x^m, \quad p'_e = -m x^{2m-1} \\
 \Psi &= x^{(m+1)/2} f(\eta), \quad \eta = Y/x^{(1-m)/2}, \quad \Psi^0 = \Psi(x_0, Y) \\
 f''' + \left(\frac{m+1}{2}\right) f f'' + m(1-f^2) &= 0 \\
 f(0) = f'(0) &= 0, \quad f'(\infty) = 1
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

и при $m = -\lambda_0 = -0,0904$ [6, 8, 9] дает нулевое значение для поверхностного трения: $f''(0) = 0$. Используя указанное выше свойство, добавим к нему собственную функцию [10, 11], которая будет определять распределение поверхностного трения τ_w . В результате для невозмущенного пограничного слоя имеем

$$\begin{aligned}
 \Psi &= x^{(1-\lambda_0)/2} f(\eta) + \sigma b_0 x^k f'(\eta) + o(\sigma) \\
 p_e &= (1 - x^{-2\lambda_0})/2, \quad \tau_w = \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right]_{Y=0} = \sigma b_0 x^l f'''(0) + o(\sigma) \\
 l &= k - \lambda_0 - 1, \quad f'''(0) = \lambda_0
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $f(\eta)$ – решение задачи (1.2) при $m = -\lambda_0$, σ – малый параметр: $\sigma = \sigma(Re) \rightarrow 0$ при $Re \rightarrow \infty$ и b_0, k – произвольные постоянные.

Итак невозмущенный пограничный слой при $m = -\lambda_0$ находится под действием неблагоприятного градиента давления и обладает малым поверхностным трением, которое положительно при $b_0 > 0$, а при $b_0 < 0$ вблизи поверхности тела имеется

медленное возвратное течение. Заметим, что изучение влияния локальных возмущений в виде неровностей на пограничный слой с малым поверхностным трением позволит прояснить многие его свойства, связанные с появлением отрыва потока.

2. Пусть на расстоянии $L(x=1)$ от начала системы координат на поверхности тела имеется неровность (фиг. 1) с продольным и поперечным размерами порядка ε и $h\text{Re}^{-1/2}$, причем $\varepsilon = \varepsilon(\text{Re}) \rightarrow 0$ и $h = h(\text{Re}) \rightarrow 0$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Исследуем структуру течения около этой неровности.

Согласно (1.2), (1.3), имеем

$$\begin{aligned} |s| \rightarrow 0: u_e &= 1 - \lambda_0 s + O(s^2), \quad p_e = \lambda_0 s + O(s^2), \quad s = x - 1 \\ s \rightarrow -0: \Psi &= [\Psi_0(Y) + O(|s|)] + \sigma [\Psi_1(Y) + O(|s|)] + o(\sigma) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Psi_0 = f(Y), \quad \Psi_1 = h_0 f'(Y)$$

$$Y \rightarrow 0: f = \frac{\lambda_0}{6} Y^3 + O(Y^7), \quad f'(\infty) = 1$$

Рассмотрим сначала режим течения с взаимодействием, причем, как и в [1-4], будем предполагать, что возвратные токи, если они возникают, локализованы в вязком подслое при $s = O(\varepsilon)$, внутри которого находится неровность (фиг. 1).

Из (2.1) следует, что в масштабах неровности, т.е. при $s = O(\varepsilon)$ и $Y = O(h)$, значения $\Psi = O(h^3)$, $u = O(h^2)$, $\partial p / \partial x = O(1)$. Поэтому на основании баланса инерционных и "вязких" членов в системе уравнений Навье - Стокса находим, что $h = \varepsilon^{1/4}$. Положим значение параметра σ в (1.3) равным $\varepsilon^{1/4}$, поскольку в этом случае, согласно (2.1), это разложение теряет свою равномерную пригодность именно в вязком подслое. Заметим, что при больших (по порядку величины) значениях σ , как и для внутренних течений с малым поверхностным трением τ_w [12], решение сводится к краевым задачам [1-4] для потоков с конечным τ_w .

Итак, на основании сказанного решение в вязком пристеночном слое (обл. 3, фиг. 1) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x - 1 = s = \varepsilon x^*, \quad \text{Re}^{1/2} y = Y = \varepsilon^{1/4} Y^* \\ \text{Re}^{1/2} \Psi = \Psi = \varepsilon^{3/4} \Psi^*(x^*, Y^*) + o(\varepsilon^{3/4}) \\ p = \varepsilon p^*(x^*, Y^*) + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.2)$$

В результате подстановки этого разложения в систему исходных уравнений Навье - Стокса приходим к уравнению пограничного слоя Прандтля

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial Y^*} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^* \partial Y^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial Y^{*2}} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial Y^{*3}}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial Y^*} = 0 \quad (2.3)$$

если $\varepsilon \text{Re}^{2/3} \rightarrow \infty$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Решение этого уравнения должно удовлетворять условию прилипания

$$Y^* = f^*(x^*): \Psi^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial Y^*} = 0 \quad (2.4)$$

Здесь функция $f^*(x^*)$ определяет форму неровности, относительно которой будем полагать, что $f^*(x^*) \rightarrow 0$ при $|x^*| \rightarrow \infty$. Из сращивания решения в этой области с приходящим профилем скорости в соответствии с (2.1) следует, что при $x^* \rightarrow -\infty$

$$\psi^* \rightarrow \frac{\lambda_0}{6} Y^{*3} + \frac{b_0 \lambda_0}{2} Y^{*2}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \rightarrow \lambda_0 \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь течение в основной части пограничного слоя области взаимодействия, где $Y = O(1)$ (обл. 2). Здесь, согласно (2.1), решение имеет вид

$$x - 1 \doteq s = \varepsilon x^*, \quad Y = O(1)$$

$$\Psi = \Psi_0(Y) + \varepsilon^{1/4} \Psi_1^\circ(x^*, Y) + o(\varepsilon^{1/4}) \quad (2.6)$$

$$p = \varepsilon P_1^\circ(x^*, Y) + o(\varepsilon)$$

После подстановки этого разложения в исходную систему уравнений находим

$$\Psi_1^\circ = S(x^*) \Psi_0'(Y) + \varphi(Y), \quad P_1^\circ = P^*(x^*) \quad (2.7)$$

если $\varepsilon \text{Re}^{4/11} \rightarrow \infty$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$, поскольку в противном случае в этой области уже в главном приближении становится существенным поперечное изменение давления. Справедливость этого условия будет показана ниже.

Полученное решение (2.6), (2.7) удовлетворяет условиям срачивания с разложением (2.1), если

$$\varphi = b_0 \Psi_0'(Y), \quad x^* \rightarrow -\infty: \quad S(x^*) \rightarrow 0, \quad \frac{dP^*}{dx^*} \rightarrow \lambda_0 \quad (2.8)$$

а сама функция $S(x^*)$ остается пока произвольной.

Используя выражения (2.1) и (2.7), (2.8), произведем срачивание асимптотических разложений (2.2) и (2.6) для вязкого пристеночного подслоя и основной части локально-невязкого течения. В результате получим

$$Y^* \rightarrow \infty: \quad \Psi^* = \frac{\lambda_0}{6} Y^{*3} + \frac{\lambda_0}{2} A^*(x^*) Y^{*2} + O(Y^*) \quad (2.9)$$

$$p^* = P^*(x^*), \quad A^* = S(x^*) + b_0, \quad A^*(-\infty) = b_0$$

Для замыкания системы соотношений в области взаимодействия, как обычно (см. [1–4]), необходимо рассмотреть течение в ее внешней части (обл. 1), где $y = O(\varepsilon)$.

Из выражений (2.6) следует, что в области 2 $v = O(\varepsilon^{-3/4} \text{Re}^{-1/2})$. Поэтому на основании (2.6)–(2.8) заключаем, что в области 1 справедливо разложение

$$x - 1 = s = \varepsilon x^*, \quad y = \varepsilon y^* \\ u = 1 + \varepsilon u_1(x^*, y^*) + o(\varepsilon) \quad (2.10)$$

$$v = \varepsilon^{-3/4} \text{Re}^{-1/2} v_1(x^*, y^*) + o(\varepsilon^{-3/4} \text{Re}^{-1/2})$$

$$p = \varepsilon p_1(x^*, y^*) + o(\varepsilon)$$

При взаимодействии внешнего потока с пограничным слоем (см. [2]) вытесняющее действие последнего и изменения давления являются взаимообусловленными, т.е. составляющая вектора скорости v и давление p при $y = O(\varepsilon)$ – величины одного порядка. Это означает, согласно (2.10), что $\varepsilon = \text{Re}^{-3/4}$. Подставив разложение (2.10) в систему уравнений Навье – Стокса, приходим к уравнениям теории малых возмущений

$$u_1 = -p_1, \quad p_1 + i v_1 = \Phi(z^*), \quad z^* = x^* + i y^*$$

$$|z^*| \rightarrow \infty: \Phi = \lambda_0 z^* + o(1) \quad (2.11)$$

$$y^* = 0: p_1 = P^*(x^*), \quad v_1 = -A^*(x^*)$$

Здесь $\Phi(z^*)$ – аналитическая функция комплексной переменной z^* , а приведенные краевые условия обеспечивают сращивание с решением в области внешнего потенциального потока и области 2. Решение задачи (2.11) дает замыкающее соотношение, которое связывает градиент давления и вытесняющее действие пограничного слоя:

$$\frac{dP^*}{dx^*} = \lambda_0 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^{*''}(t) dt}{t - x^*} \quad (2.12)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

3. Аффинные преобразования и транспозиционное преобразование Прандтля

$$x^* = \lambda_0^{-3/2} X, \quad \Psi^* = \lambda_0^{-2/2} \Psi, \quad P^* = \lambda_0^{2/2} P, \quad A^* = \lambda_0^{-3/2} A \quad (3.1)$$

$$f^* = \lambda_0^{-3/2} F, \quad Y^* = \lambda_0^{-3/2} [Z + F(X)]$$

приводят краевую задачу (2.3)–(2.5), (2.9), (2.12) для вязкого подслоя к виду

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial Z} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial X \partial Z} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial X} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial Z^2} + \frac{dP}{dX} = \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial Z^3}$$

$$Z = 0: \Psi^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial Z} = 0$$

$$X \rightarrow -\infty: \Psi^* \rightarrow \frac{1}{6} Z^3 + \frac{\Omega_0}{2} Z^2, \quad \frac{dP}{dX} \rightarrow 1, \quad A \rightarrow \Omega_0 \quad (3.2)$$

$$Z \rightarrow \infty: \Psi^* = \frac{1}{6} Z^3 + \frac{1}{2} M(X) Z^2 + N(X) Z + O(1)$$

$$M = A(X) + F(X), \quad N = \frac{1}{2} (M^2 - \Omega_0^2), \quad F(\pm\infty) = 0$$

$$\frac{dP}{dX} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A''(t) dt}{t - X}$$

Здесь $\Omega_0 = \lambda_0^{3/2} b_0$ – параметр подобия, величина которого (см. (1.3)) определяет поверхностное трение в приходящем к неровности пограничном слое.

Рассмотрим решение линеаризованной задачи. Представим функцию, определяющую форму неровности, как $F = HG(X)$ и будем считать, что параметр H мал. Тогда решение, как и в [12], можно искать в виде

$$\Psi^* = \frac{1}{6} Z^3 + H \Psi_1^*(X, Z) + H^2 \Psi_2^*(X, Z) + O(H^3)$$

$$P = X + H P_1(X) + H^2 P_2(X) + O(H^3) \quad (3.3)$$

$$A = H A_1(X) + H^2 A_2(X) + O(H^3)$$

$$\Omega_0 = H \omega_1 + H^2 \omega_2 + O(H^3), \quad F = HG(X)$$

Внося это разложение в (3.2), приходим для функций первого приближения к следующей задаче:

$$D[\Psi_1^*] = \frac{dP_1}{dX}, \quad Z = 0: \Psi_1^* = \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial Z} = 0$$

$$\begin{aligned}
X \rightarrow -\infty: \Psi_1^* &\rightarrow \frac{\omega_1}{2} Z^2, \quad \frac{dP_1}{dX} \rightarrow 0, \quad A_1 \rightarrow \omega_1 \\
Z \rightarrow \infty: \Psi_1^* &= \frac{1}{2} M_1(X) Z^2 + o(1), \quad M_1 = A_1(X) + G(X) \\
\frac{dP_1}{dX} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1'(t) dt}{t-X}, \quad G(\pm\infty) = 0 \\
D[\cdot] &= \frac{\partial^3}{\partial Z^3} - \frac{Z^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Z} + Z \frac{\partial}{\partial X}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Согласно [13], единственное ее решение есть

$$\Psi_1^* = \frac{1}{2} M_1(X) Z^2, \quad P_1 = 0$$

$$M_1 = G(X) + \omega_1, \quad A_1 = \omega_1$$

Тогда во втором приближении получаем

$$\begin{aligned}
D[\Psi_2^*] &= \frac{dP_2}{dX} + \frac{Z^2}{2} M_1 \frac{dM_1}{dX} \\
Z = 0: \Psi_2^* &= \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial Z} = 0 \\
X \rightarrow -\infty: \Psi_2^* &\rightarrow \frac{\omega_2}{2} Z^2, \quad \frac{dP_2}{dX} \rightarrow 0, \quad A_2 \rightarrow \omega_2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$Z \rightarrow \infty: \Psi_2^* = \frac{1}{2} A_2(X) Z^2 + \frac{1}{2} [M_1^2(X) - \omega_1^2] Z + o(1)$$

$$\frac{dP_2}{dX} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_2'(t) dt}{t-X}$$

Результаты [13] позволяют выписать, в частности, решение для $P_2(X)$ (см. [12])

$$P_2 = -\frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \int_{-\infty}^X \frac{Q_2(t) dt}{(X-t)^{1/2}}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} [M_1^2(X) - \omega_1^2], \quad M_1 = G(X) + \omega_1$$

Тогда из последнего выражения в (3.5) для $A_2(X)$ следует, что при $X \rightarrow -\infty$

$$A_2 = \frac{8\Gamma(5/4)}{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)} Q_2^*(0) (-X)^{1/2} + o(1)$$

$$Q_2^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q_2(X) dX$$

и краевое условие $A_2 \rightarrow \omega_2$ при $X \rightarrow -\infty$ в (3.5) о затухании возмущений вверх по потоку не выполняется, т.е. решение задачи (3.5) не существует. Это означает, что отрыв не может быть локализован в вязком пристеночном слое и, следовательно, предлагаемая структура течения является противоречивой.

Таким образом, если поверхностное трение τ_w есть величина порядка $\varepsilon^{1/4} H = \text{Re}^{-1/4} H$, течение вблизи стенки настолько чувствительно к возмущениям, что

отрыв будет происходить на некотором расстоянии вверх по потоку от неровности, вне ее масштаба. Поэтому обратимся к рассмотрению течений со значениями τ_n , бóльшими (по порядку величины), чем $\text{Re}^{-1/4}$, около неровностей, имеющих бóльший продольный размер. Одновременное увеличение указанных параметров необходимо для сохранения режима течения, в котором приходящий к неровности профиль скорости около стенки является квадратичным: $\Psi_Y = O(Y^2)$, $Y \rightarrow 0$.

4. Наиболее простой способ построения решения при рассмотрении неровностей, имеющих продольный размер, бóльший чем длина области взаимодействия ($s = O(\text{Re}^{-2/7})$), согласно [4], состоит в осуществлении предельного перехода в задаче (3.2). Действительно, если представить функции и независимые переменные из (3.2) в виде

$$X = \Delta_0^{1/2} X', \quad Z = \Delta_0^{1/8} Z', \quad \Psi^* = \Delta_0^{3/8} \Psi', \quad P = \Delta_0^{1/2} P' \quad (4.1)$$

$$F = \Delta_0 F', \quad A = -\Delta_0 F' + \Delta_0^{1/8} A', \quad \Omega_0 = \Delta_0^{1/8} \Omega'_0$$

то подстановка (4.1) в (3.2) при $\Delta_0 \rightarrow \infty$ приводит к следующей задаче для течения в вязком пристеночном подслое:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Z} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} + \frac{dP}{dX} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Z^3}$$

$$Z = 0: \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = 0$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad \Psi \rightarrow \frac{1}{6} Z^3 + \frac{\Omega_0}{2} Z^2, \quad \frac{dP}{dX} \rightarrow 1, \quad A \rightarrow \Omega_0 \quad (4.2)$$

$$Z \rightarrow \infty: \quad \Psi = \frac{1}{6} Z^3 + \frac{1}{2} A(X) Z^2 + N(X) Z + O(1)$$

$$N = \frac{1}{2} (A^2 - \Omega_0^2), \quad F(\pm\infty) = 0$$

$$\frac{dP}{dX} = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F''(t) dt}{t - X}$$

Здесь и ниже штрихи в обозначениях опущены. Таким образом, приходим к рассмотрению пограничного слоя с заданным градиентом давления, который определяется формой неровности.

Вид представления (4.1) определяется следующими соображениями. Во-первых, должен сохраняться вид начального условия при $X \rightarrow -\infty$. Во-вторых, осуществляется баланс инерционных и вязких членов с градиентом давления и, наконец, выполняются условия срачивания с решениями в основной части пограничного слоя и внешнего потенциального потока (обл. 2, 1, фиг. 1). Заметим также, что при предельном переходе $\Delta_0 \rightarrow \infty$ необходимо полагать $\Delta_0^{1/2} \epsilon = \Delta_0^{1/2} \text{Re}^{-2/7} \rightarrow 0$, поскольку в противном случае (см. (2.2), (3.1), (4.1)) продольный размер неровности не будет мал в масштабах течения в целом.

Вновь рассмотрим решение линеаризованной задачи. Пусть $F = HG(X)$, $H \rightarrow 0$. Тогда, в свете [13], представим решение задачи (4.2) в виде

$$\Psi = \frac{1}{6} Z^3 + H^{1/2} \Psi_1(X, Z) + H \Psi_2(X, Z) + o(H)$$

$$P = X + HP_2(X) + o(H), \quad F = HG(X)$$

$$A = H^{1/2}A_1(X) + HA_2(X) + o(H)$$

$$\Omega_0 = H^{1/2}\omega_1 + H\omega_2 + o(H)$$

(4.3)

В результате подстановки этого разложения в (4.2) имеем в первом приближении (см. (3.4))

$$D[\Psi_1] = 0, \quad Z = 0: \quad \Psi_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial Z} = 0$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad \Psi_1 \rightarrow \frac{\omega_1}{2} Z^2, \quad A_1 \rightarrow \omega_1$$

$$Z \rightarrow \infty: \quad \Psi_1 = \frac{1}{2} A_1(X) Z^2 + o(1)$$

Единственное решение этой задачи (см. [13]) есть

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} A_1(X) Z^2, \quad A_1(-\infty) = \omega_1$$

(4.4)

где $A_1(X)$ остается пока произвольной. Тогда для функций второго приближения в (4.3) приходим к следующей задаче:

$$D[\Psi_2] = \frac{dP_2}{dX} + \frac{Z^2}{2} A_1 \frac{dA_1}{dX}, \quad Z = 0: \quad \Psi_2 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial Z} = 0$$

(4.5)

$$X \rightarrow -\infty: \quad \Psi_1 \rightarrow \frac{\omega_1}{2} Z^2, \quad A_1 \rightarrow \omega_1$$

$$Z \rightarrow \infty: \quad \Psi_2 = \frac{1}{2} A_2(X) Z^2 + \frac{1}{2} [A_1^2 - \omega_1^2] Z + o(1)$$

$$\frac{dP_2}{dX} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G''(t) dt}{t - X}$$

Ее решение существует, если только [13]

$$A_1^2 - \omega_1^2 = 2B(X)$$

(4.6)

$$B = -\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{2^{\frac{3}{2}} \Gamma(\frac{5}{4})} \int_X^{\infty} \frac{G''(t) dt}{(t - X)^{1/2}}$$

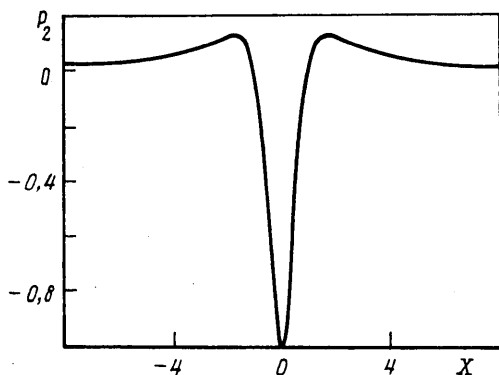
Таким образом получено выражение для функции $A_1(X)$ из (4.4), которая определяет распределение поверхностного трения. Что касается $A_2(X)$ в (4.5), то она остается произвольной и может быть найдена только из рассмотрения решения для следующих членов разложения (4.3).

5. Обратимся к полученному решению (4.4), (4.6). Прежде всего заметим, что вдали от неровности возмущения затухают: $B(X) = O(|X|^{-5/2})$ при $X \rightarrow -\infty$ и $O(X^{-1/2})$ при $X \rightarrow \infty$. Уравнение для $A_1(X)$ в (4.6) имеет два корня

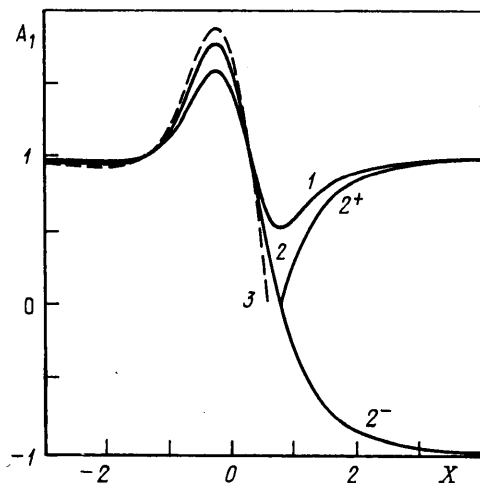
$$A_1 = A_+(X) = \omega_1 (1 + 2\omega_1^{-2} B)^{1/2}$$

(5.1)

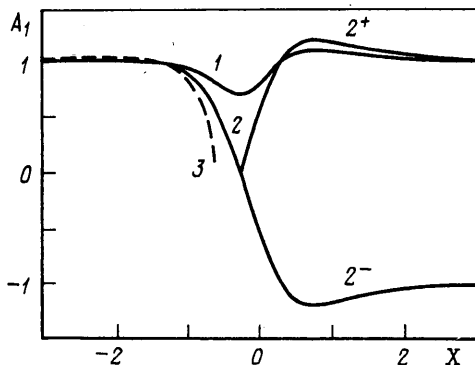
$$A_1 = A_-(X) = -\omega_1 (1 + 2\omega_1^{-2} B)^{1/2}$$



Фиг. 2. Распределение возмущения давления



Фиг. 3. Распределение поверхностного трения около бугорка



Фиг. 4. Распределение поверхностного трения около впадины

и, поскольку подкоренное выражение неотрицательно, $B(X) \geq -\omega_1^2/2$.

Рассмотрим неровности вида

$$G(X) = c_0(1 + X^2)^{-1}, \quad c_0 = \text{const} \quad (5.2)$$

График распределения давления $P_2(X)$, которое определяется последним выражением в (4.5), для таких неровностей представлен на фиг. 2 (при $c_0 = 1$).

Исследуем сначала решения, соответствующие обтеканию бугорка, когда в (5.2) $c_0 > 0$ при значениях $\omega_1 > 0$.

На основании условия $A_1(-\infty) = \omega_1$ в (4.4) возьмем в качестве решения $A_+(X)$ из (5.1). Графики этой функции при различных c_0 и $\omega_1 = 1$, построенные с помощью выражений (4.6), (5.2), представлены на фиг. 3. Как и следовало ожидать, существует критическое значение $c_0 = c^* = 1,0506$, такое, что для $c_0 < c^*$ функция $A_+(X)$ всюду положительна и течение остается безотрывным, а для $c_0 > c^*$ подкоренное выражение в (5.1) становится отрицательным и обращается в нуль при некотором значении $X = X_0(c_0)$. В этой точке возникает неустранимая особенность Гольдштейна [14] и $A_+(X)$ при $X \rightarrow X_0 - 0$ ведет себя как $(X_0 - X)^{1/2}$. Графики таких решений при $c_0 = 3/4$ и $5/4$ (соответственно кривые 1 и 3) приведены на фиг. 3.

Если же $c_0 = c^*$, поверхностное трение $A_+(X)$ обращается в нуль в единственной точке $X = X_s = 0,8000$ (кривая $2-2^+$, фиг. 3), в которой возникает устранимая особенность Рубана [15]. При этом $A_+(X)$ ведет себя как $|X - X_s|$ при $|X - X_s| \rightarrow 0$. Однако решение $A_1 = A_+(X) > 0$ ($X < X_s$) можно продолжить через точку X_s и по-другому. Для этого надо в качестве решения при $X > X_s$ взять второй корень $A_1 = A_-(X) < 0$ в (5.1) (кривая $2-2^-$). В этом случае решение регулярно при $X = X_s$ и за этой точкой лежит область возвратных токов. На возможность такого продолжения решения задачи (1.1) через точку нулевого поверхностного трения указывалось еще в [14], однако соответствующее решение впервые было получено численно существенно позже в [16].

Не трудно видеть, что вторая ветвь решения (кривая $2-2^-$) при $X \rightarrow \infty$ выходит на решение (1.3), но с $b_0 < 0$.

Аналогичным образом обстоит дело и для неровностей в виде впадины, когда в (5.2) постоянная c_0 , определяющая ее глубину, отрицательна. Графики решений приведены на фиг. 4 (при $\omega_1 = 1$). Критическому значению $c_0 = c^* = -0,4852$ соответствуют кривые $2-2^+$ и $2-2^-$. При этом $X_s = -0,2283$. Кривые 1 и 3 построены для $c_0 = -1/4$ и $-3/4$ и им соответствуют решения с всюду положительным поверхностным трением и с особенностью [14].

Для значений $\omega_1 < 0$, когда невозмущенный пограничный слой (см. (1.3), (3.2), (4.1), (4.3)) обладает отрицательным поверхностным трением, решение, согласно (5.1), получается путем изменения знака перед функцией $A_1(X)$.

Заметим, что все приведенные решения строились при $\omega_1^2 = 1$, однако это не ограничивает их общности, поскольку преобразование $X \rightleftharpoons X^\circ$, $A_1 = \omega_1 A_1^\circ$, $B = \omega_1^2 B^\circ$, $G = \omega_1^2 G^\circ$, $\omega_1 \neq 0$ позволяет исключить ω_1 из (4.6). Нетрудно видеть также (см. (4.6) и фиг. 3, 4), что $\omega_1 \neq 0$, так как в противном случае при $G(X) \neq 0$ решение всегда будет комплекснозначным.

Заключение. Полученное решение линеаризованной задачи для пограничного слоя, обладающего малым поверхностным трением и находящегося под действием заданного градиента давления, находится в полном соответствии с численным решением [15, 16] для полных уравнений (1.1) пограничного слоя с конечным трением. Как и в [16], существует критическое значение параметра, определяющего градиент, при котором возможны два решения. Одно из них имеет устранимую особенность [15] в единственной точке нулевого поверхностного трения (кривые $2-2^+$, фиг. 3, 4), а второе регулярно проходит через нее (кривые $2-2^-$, фиг. 3, 4). В то же время полученные результаты противоречат концепции [17]. Согласно [17], при заданном положительном градиенте давления в окрестности точки, где поверхностное трение впервые обращается в нуль (при критическом значении указанного выше параметра), оно ведет себя как $a_0(X_s - X)^2$ ($|X_s - X| \rightarrow 0$, a_0 - положительная постоянная) и устранимой особенности [15] здесь вообще не возникает. Такое регулярное поведение решения, как хорошо известно (см., например, [12]), имеет место, но только в случаях, когда градиент давления не является заранее заданным, т.е. для течений в областях взаимодействия или с заданной толщиной вытеснения. Результаты [17], собственно, и свидетельствуют об этом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00354).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголепов В.В., Нейланд В.Я. Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа // Тр. ЦАГИ. 1971. Вып. 1363. 12 с.

2. *Smith F.T.* Laminar flow over a small hump on a flat plate // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 57. Pt 4. P. 803–824.
3. *Боголепов В.В., Нейланд В.Я.* Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений // *Аэромеханика*. М.: Наука, 1976. С. 104–118.
4. *Smith F.T., Brighton P.W.M., Jackson P.S., Hunt J.C.R.* On boundary-layer flow past two-dimensional obstacles // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 113. P. 123–152.
5. *Laminar boundary layers* / Ed. L. Rosenhead. Oxford: Clarendon Press, 1963. 688 p.
6. *Falkner V.M., Skan S.W.* Some approximate solutions of the boundary layer equations // *Aeronaut. Res. Comm., Rept. and Mem.* 1930. № 1314. 58 p.
7. *Laine C., Reinhart L.* Further numerical methods for the Falkner–Skan equations: shooting and continuation techniques // *Intern. J. Numer. Meth. Fluids.* 1984. V. 4. № 9. P. 833–852.
8. *Hartree D.R.* On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1937. V. 33. Pt 2. P. 223–239.
9. *Stewartson K.* Further solutions of the Falkner–Skan equation // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1954. V. 50. Pt 3. P. 454–465.
10. *Rubbert P.E., Landahl M.T.* Solution of nonlinear flow problems through parametric differentiation // *Phys. Fluids.* 1967. V. 10. № 4. P. 831–835.
11. *Chen K.K., Libby P.A.* Boundary layers with small departures from the Falkner–Skan profile // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 33. Pt 2. P. 273–282.
12. *Сычев Вук.В.* О взаимодействии и отрыве для внутренних течений с малым поверхностным трением // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 5. С. 98–111.
13. *Stewartson K.* Is the singularity at separation removable? // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 44. Pt 2. P. 347–364.
14. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1948. V. 1. Pt 1. P. 43–69.
15. *Рубан А.И.* Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1981. № 6. С. 42–52.
16. *Королев Г.Л.* Отрыв потока и неединственность решения уравнений пограничного слоя // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1991. Т. 31. № 11. С. 1706–1715.
17. *Bogdanova-Ryzhova E.V., Ryzhov O.S.* On the nature of singularities inherent, under a given analytic distribution of the external pressure, in solutions of the Prandtl equations near the point of separation // *Theoret. Comput. Fluid Dyn.* 1994. V. 6. № 4. P. 193–212.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1997