

УДК 533.6.011.5:532.582.3

© 1998 г. Ю.М. ЛИПНИЦКИЙ, Е.В. МАЦЮРА, А.Н. ПОКРОВСКИЙ

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ОСТРОГО КОНУСА, КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ОКОЛО НУЛЕВОГО УГЛА АТАКИ

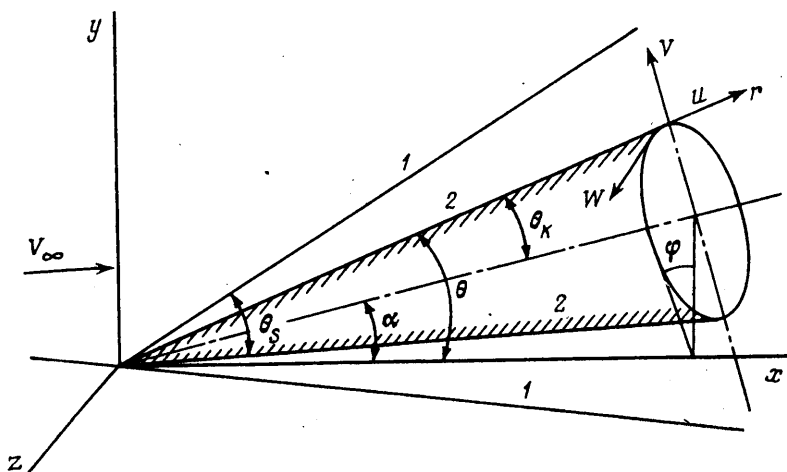
В рамках линейной теории тел конечной толщины решена задача о распределении газодинамических параметров при обтекании сверхзвуковым потоком совершенного газа или равновесно-диссоциированного воздуха острого кругового конуса, колеблющегося около нулевого угла атаки с малыми числами Струхала. Найдена область определяющих параметров, при которых проявляется существенное влияние равновесной диссоциации. Определен коэффициент момента тангажа, связанный с угловой скоростью колебаний. Для гиперзвуковых скоростей получены аналитические выражения газодинамических характеристик течения.

Рассматривается обтекание сверхзвуковым потоком совершенного газа или равновесно диссоциированного воздуха острого конуса, колеблющегося около вершины с малыми числами Струхала. Амплитуда углов атаки α_0 и угловая скорость $d\alpha/dt$ предполагаются небольшими, чтобы головной скачок был всегда присоединенный, а течение за ним – коническое. Решение задачи строится в рамках линейной теории тел конечной толщины [1, 2]. Применительно к обтеканию клина совершенным газом подобный подход использован в [3], а к обтеканию тонких затупленных тел – в [2, 4]. В [5] представлены результаты по обтеканию колеблющегося цилиндра при небольших сверхзвуковых числах Маха. В [1] проведен теоретический анализ течения около колеблющегося конуса.

В данной работе используется известный из [1] подход при решении уравнений для возмущений в фазах с α и $d\alpha/dt$. Основное внимание уделено анализу влияния равновесных физико-химических процессов, протекающих в газе при гиперзвуковых скоростях, на нестационарные характеристики острых конусов и построению приближенных аналитических решений для газодинамических параметров. Обтекание острых колеблющихся конусов рассмотрено в широких диапазонах изменения числа Маха набегающего потока $M^* < M_\infty < \infty$ (где M^* – минимальное значение числа Маха, при котором выполняются условия конического течения) и полууглов раствора конуса $0 < \theta_k \leq \theta^*$ (где θ^* – предельный угол полураствора конуса, при котором ударная волна присоединена к носку тела). На основании полученных решений определяются нестационарные аэродинамические характеристики.

1. Рассмотрим обтекание острого конуса, совершающего гармонические колебания по закону $\alpha = \alpha_\infty \cos(\omega t)$ относительно неподвижной сферической системы координат (r, θ, φ) , жестко связанной с вершиной конуса (фиг. 1). В задачах аэродинамики обычно с большой точностью выполняются условия $\alpha_0 \ll 1$ и $\alpha_0 \omega L / V_\infty \ll 1$, обеспечивающие малые значения амплитуды угла атаки α_0 и малость скоростей перемещения точек поверхности тела в направлении нормали по сравнению со скоростью набегающего потока V_∞ . Центр колебаний находится в вершине конуса; характерная длина L – расстояние от вершины конуса до кормового среза вдоль оси симметрии.

В рамках линейной теории тел конечной толщины газодинамические параметры представляются в виде



Фиг. 1. Схема течения и система координат; 1 – головная ударная волна; 2 – поверхность конуса

$$f(t, r, \varphi, \theta) = f_0(\theta) + f_\alpha(\theta)\alpha(t)\cos\varphi + f_\beta(\theta)r\beta(t)\cos\varphi$$

$$w(t, r, \varphi, \theta) = w_\alpha(\theta)\alpha(t)\sin\varphi + w_\beta(\theta)r\beta(t)\sin\varphi \quad (1.1)$$

Здесь $\beta = L\beta_1/V_\infty$, $\beta_1 = d\alpha/dt$, а под функцией f подразумеваются газодинамические функции P , ρ , u , v , J , S – давление, плотность, компоненты скорости вдоль координат r и $r\theta$, полная энтальпия и энтропия газа; w – компонента скорости вдоль координаты $r\varphi$. Все газодинамические характеристики отнесены к параметрам набегающего потока: компоненты скорости – к V_∞ , давление – к удвоенному скоростному напору $\rho_\infty V_\infty^2$, плотность – к значению ρ_∞ , полная и статическая энтальпия газа – к V_∞^2 , а энтропия – к c_v . Все линейные размеры отнесены к характерной длине L ; β – число Струхала.

Параметры с индексом ноль описывают основное поле течения, возникающее при стационарном обтекании острого конуса под нулевым углом атаки; параметры с индексами α и β описывают поля нестационарных возмущений, находящихся в фазе с углом атаки α и с величиной, пропорциональной угловой скорости β_1 .

Уравнения, описывающие нестационарное движение газа около колеблющегося тела, имеют вид [1, 2]

$$\rho_t + r^{-2}(r^2\rho u)_r + (r\sin\theta)^{-1}(\rho v \sin\theta)_\theta + (r\sin\theta)^{-1}(\rho w)_\varphi = 0$$

$$u_t + uu_r + vr^{-1}u_\theta + w(r\sin\theta)^{-1}u_\varphi - (v^2 + w^2)r^{-1} = -\rho^{-1}P_r$$

$$v_t + uv_r + vr^{-1}v_\theta + w(r\sin\theta)^{-1}v_\varphi + (uv - w^2 \operatorname{ctg}\theta)r^{-1} = -(\rho r)^{-1}P_\theta$$

$$w_t + uw_r + vr^{-1}w_\theta + w(r\sin\theta)^{-1}w_\varphi + (uw + vw \operatorname{ctg}\theta)r^{-1} = -(\rho r \sin\theta)^{-1}P_\varphi$$

$$J_t + uJ_r + vr^{-1}J_\theta + w(r\sin\theta)^{-1}J_\varphi = P_t/\rho$$

$$S_t + uS_r + vr^{-1}S_\theta + w(r\sin\theta)^{-1}S_\varphi = 0$$

$$J = i + 0.5(u^2 + v^2 + w^2), \quad u_t \equiv \partial u / \partial t, \quad u_r \equiv \partial u / \partial r$$

Здесь J и i – полная и статическая энтальпия газа.

Для совершенного газа и равновесно диссоциированного воздуха используются

(1.2)

уравнения состояния в виде [6]

$$P = \rho RT \quad (1.3)$$

$$\rho \frac{i}{P} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} Z(P, i) = \frac{\kappa^*}{\kappa^* - 1}; \quad \kappa_e = a^2 \frac{\rho}{P}$$

Здесь κ — показатель адиабаты при низких температурах. Функция Z является как бы мерой несовершенства газа. Уравнение состояния использовать в таком виде удобно, поскольку при $Z = 1$ оно переходит в уравнение для совершенного газа. Параметр κ^* есть некоторый эффективный показатель адиабаты, определенный из уравнения состояния. Для описания процессов, связанных со скоростью звука, вводится другой показатель адиабаты — κ_e . Оба показателя связаны сложной зависимостью друг с другом [6] и совпадают лишь при постоянной функции Z . Универсальная реализация уравнения (1.3) осуществлена в [7].

После подстановки выражений (1.1) в систему (1.2) и проведения преобразований с учетом условий конического течения получим для стационарного (с индексом 0) обтекания конуса

$$\begin{aligned} (a_0^2 - v_0^2) v_{0\theta} &= u_0 (v_0^2 - 2a_0^2) - a_0^2 v_0 \operatorname{ctg} \theta \\ u_{0\theta} &= v_0, \quad u_{0\theta} \equiv \frac{du_0}{d\theta} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$a_0^2 = 0,5 \kappa_e (\kappa^* - 1) [V_{\max}^2 - u_0^2 - v_0^2] / \kappa^*$$

Здесь $V_{\max}$ — максимальная скорость набегающего потока.
Для возмущений в фазе с α

$$\begin{aligned} u_{\alpha\theta} &= v_\alpha, \quad u_{\alpha\theta} \equiv \frac{du_\alpha}{d\theta} \\ v_{\alpha\theta} (a_0^2 - v_0^2) &= u_\alpha (v_0^2 - 2a_0^2) - w_\alpha a_0^2 \operatorname{cosec} \theta - \\ &- v_\alpha \left(a_0^2 \operatorname{ctg} \theta + 2v_0 a_0^2 \frac{(u_0 + v_0 \operatorname{ctg} \theta)}{(a_0^2 - v_0^2)} \right) + 2a_\alpha a_0 v_0^2 \frac{(u_0 + v_0 \operatorname{ctg} \theta)}{(a_0^2 - v_0^2)} \\ v_0 w_{\alpha\theta} &= -u_0 w_\alpha - v_0 w_\alpha \operatorname{ctg} \theta + \frac{P_\alpha}{\rho_0 \sin \theta} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{a_\alpha}{a_0} = 0,5 \left(\frac{P_\alpha (\kappa^* - 1)}{P_0 \kappa^*} + \frac{S_\alpha}{\kappa^*} \right), \quad \frac{P_\alpha}{\rho_0} = -u_0 u_\alpha - v_0 v_\alpha - \frac{P_0 S_\alpha}{(\kappa^* - 1) \rho_0}$$

$$\frac{\rho_\alpha}{\rho_0} = \frac{1}{\kappa^*} \left(\frac{P_\alpha}{P_0} - S_\alpha \right)$$

Для возмущений в фазе с угловой скоростью β

$$\begin{aligned} v_0 u_{\beta\theta} &= v_0 v_\beta - u_0 u_\beta - u_\alpha - P_\beta / \rho_0 \\ (a_0^2 - v_0^2) v_{\beta\theta} &= u_\beta \left(v_0^2 - 3a_0^2 - u_0 v_0^2 \frac{\kappa_e (\kappa^* - 1)}{\kappa^*} \frac{(u_0 + v_0 \operatorname{ctg} \theta)}{(a_0^2 - v_0^2)} + u_0^2 \right) - \\ &- v_\beta \left(\frac{(a_0^2 + v_0^2)}{(a_0^2 - v_0^2)} (u_0 v_0 + a_0^2 \operatorname{ctg} \theta) + v_0^3 \frac{\kappa_e (\kappa^* - 1)}{\kappa^*} \frac{(u_0 + v_0 \operatorname{ctg} \theta)}{(a_0^2 - v_0^2)} - u_0 v_0 \right) - w_\beta a_0^2 \operatorname{cosec} \theta + \end{aligned}$$

$$+J_{\beta}\left(v_0^2 \frac{\kappa_e(\kappa^*-1)}{\kappa^*} \frac{(u_0+v_0 \operatorname{ctg} \theta)}{(a_0^2-v_0^2)}-u_0\right)+u_0 u_{\alpha}+2 v_0 v_{\alpha}+\frac{a_0^2 S_{\alpha}}{\kappa_e(\kappa^*-1)}+\frac{a_0^2 S_{\beta} u_0}{\kappa_e(\kappa^*-1)} \quad (1.6)$$

$$v_0 w_{\beta \theta}=-2 u_0 w_{\beta}-v_0 w_{\beta} \operatorname{ctg} \theta-w_{\alpha}+\frac{P_{\beta}}{\rho_0 \sin \theta}$$

$$v_0 J_{\beta \theta}=P_{\alpha} / \rho_0-u_0 J_{\beta}, \quad v_0 S_{\beta \theta}=-u_0 S_{\beta}-S_{\alpha}$$

$$\frac{P_{\beta}}{\rho_0}=J_{\beta}-u_0 u_{\beta}-v_0 v_{\beta}-\frac{a_0^2 S_{\beta}}{\kappa_e(\kappa^*-1)}$$

$$\frac{\rho_{\beta}}{\rho_0}=\frac{1}{\kappa^*}\left(\frac{P_{\beta}}{P_0}-S_{\beta}\right), \quad \frac{a_{\beta}}{a_0}=0,5\left(\frac{(\kappa^*-1) P_{\beta}}{\kappa^* P_0}+\frac{S_{\beta}}{\kappa^*}\right)$$

Заметим, что при выводе системы уравнений в фазе с β использован прием [8], состоящий в исключении плотности из уравнения неразрывности с помощью термодинамических соотношений и третьего уравнения системы (1.2). В полученное уравнение подставляется разложение (1.1), что приводит ко второму уравнению системы (1.6). При выводе систем (1.4) и (1.5) уравнение неразрывности, из которого обычно определяется плотность ρ , не использовалось. Вместо него взято уравнение сохранения энтропии газа.

Применение уравнений сохранения полной энтальпии и энтропии газа для возмущений в фазе с α приводит к выражениям $J_{\alpha}=\operatorname{const}=0$, $S_{\alpha}=\operatorname{const}$, причем значение S_{α} находится из соотношений для газодинамических функций при переходе через косой скачок уплотнения $S_{\alpha}=P_{\alpha s} / P_{0 \alpha}-\kappa^* \rho_{\alpha s} / \rho_{0 \alpha}$. Для возмущений в фазе с β получаются два дифференциальных уравнения для функций J_{β} и S_{β} .

2. Рассмотрим теперь граничные условия. На движущейся поверхности должно выполняться условие [9]

$$F_t+u F_r+v F_{\theta} r^{-1}+w F_{\varphi} \operatorname{cosec} \theta_k r^{-1}=0 \quad (2.1)$$

Здесь F — уравнение поверхности тела в неподвижной системе координат. В процессе колебаний острого конуса его поверхность может быть описана уравнением [10]

$$\cos \theta \cos \alpha+\sin \theta \sin \alpha \cos \varphi=\cos \theta_k$$

Если в это уравнение подставить значение

$$\theta=\theta_k+\alpha \cos \varphi+\theta_{k \beta} r \beta \cos \varphi$$

которое написано по аналогии с разложением газодинамических функций, то получим $\theta_{k \beta}=0$. Таким образом, уравнение поверхности тела $F \equiv \theta-\theta_k-\alpha \cos \varphi$. Подставляя в уравнение (2.1) выражение для функции F , получим $v(\theta_k)=r \beta \cos \varphi$. Вблизи поверхности тела $\theta=\theta_k$ компоненты скорости u и v можно представить в виде ряда Тейлора по степеням $(\theta-\theta_k)$, т.е.

$$v(\theta)=v_0(\theta_k)+v_{0 \theta}(\theta_k)(\theta-\theta_k)+v_{\alpha}(\theta_k) \alpha \cos \varphi+v_{\beta}(\theta_k) r \beta \cos \varphi$$

Используя это выражение, можно перенести граничные условия для функций в фазах с α и β с некоторого произвольного θ на стационарное значение θ_k . Тогда условия на поверхности конуса для стационарного течения и возмущений в фазах с α и β имеют вид

$$v_0(\theta_k)=0 \quad (2.2)$$

$$v_{\alpha}(\theta_k)=-v_{0 \theta}(\theta_k)=2 u_0(\theta_k) \quad (2.3)$$

$$\nu_B(\theta_k) = 1 \quad (2.4)$$

Для замыкания краевой задачи рассмотрим условия на скачке

$$\theta_s = \theta_{0s} + \theta_\alpha \alpha \cos \varphi + \theta_\beta \beta \cos \varphi$$

которые характеризуют законы сохранения массы, импульса, энергии и имеют вид [8]

$$u = \cos \theta_s$$

$$w = -\sin \theta_s \sin \delta \cos \delta - (\nu + \sin \theta_s \sin^2 \delta) \operatorname{tg} \delta, \quad \sin \theta_s \operatorname{tg} \delta = \frac{d\theta_s}{d\varphi}$$

$$\sin \theta_s - N = \rho_s (\nu_s - N) \quad (2.5)$$

$$(\sin \theta_s - N)^2 + (\kappa M_\infty^2)^{-1} = \rho_s (\nu_s - N)^2 + P_s$$

$$0,5(\sin \theta_s - N)^2 + \frac{1}{(\kappa - 1)M_\infty^2} = 0,5(\nu_s - N)^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_s}{\rho_s}$$

Здесь N – скорость перемещения точек поверхности скачка уплотнения в направлении нормали, которое выражается [9]

$$N = - \frac{\Phi_t}{\sqrt{\Phi_r^2 + \Phi_\theta^2 r^{-2} + \Phi_\varphi^2 (r \sin \theta)^{-2}}}$$

где Φ – уравнение поверхности ударной волны в неподвижной системе координат

$$\Phi = \theta_s - \theta_{0s} - \theta_\alpha \alpha \cos \varphi - \theta_\beta \beta \cos \varphi$$

Отсюда следует, что $N = \theta_\alpha \beta \cos \varphi$.

Если в полученную систему (2.5) подставить разложение газодинамических функций (1.1) и применить соотношение

$$f(t, \theta_s, r_0, \varphi) = f_0(\theta_{0s}) + f_{0\theta}(\theta_s - \theta_{0s}) + f_\alpha \alpha \cos \varphi + f_\beta \beta \cos \varphi$$

(f – любой газодинамический параметр), позволяющее перенести граничные условия на стационарное значение θ_{0s} , то получим следующие условия на скачке в равновесно диссоциированном воздухе.

Для стационарного (с индексом 0) обтекания острого конуса

$$u_{0s} = \cos \theta_{0s}, \quad \nu_{0s} = \frac{1}{\kappa + 1} \left(G_1 - \kappa^* \left(\sin \theta_{0s} + \frac{1}{\kappa G_2} \right) \right) \quad (2.6)$$

$$w_{s0} = 0$$

$$G_1^2 = \left(\sin \theta_{0s} - \frac{\kappa^*}{\kappa G_2} \right)^2 + 2 \frac{(\kappa^* + 1)(\kappa - \kappa^*)}{\kappa(\kappa - 1)M_\infty^2}, \quad G_2 = M_\infty^2 \sin \theta_{0s}$$

Для возмущений в фазе с α

$$u_{\alpha s} = -\theta_\alpha (\sin \theta_{0s} + \nu_{0s}) \quad (2.7)$$

$$\nu_{\alpha s} = -\frac{\kappa^*}{\kappa^* + 1} \theta_\alpha \cos \theta_{0s} + \frac{\kappa^* \operatorname{ctg} \theta_{0s}}{(\kappa^* + 1)G_2} \theta_\alpha - \theta_\alpha (\nu_{0\theta})_s +$$

$$+ \theta_\alpha \frac{1}{(\kappa^* + 1)G_1} \cos \theta_{0s} \sin \theta_{0s} \left(1 - \left(\frac{\kappa^*}{\kappa G_2 \sin \theta_{0s}} \right)^2 \right)$$

$$w_{\alpha s} = \theta_{\alpha} \left(1 + \frac{v_{0s}}{\sin \theta_{0s}} \right)$$

Для возмущений в фазе с β

$$u_{\beta s} = -\theta_{\beta} (\sin \theta_{0s} + v_{0s}) \quad (2.8)$$

$$v_{\beta s} = \theta_{\alpha} - \theta_{\beta} (v_{0\theta})_s + (\theta_{\alpha} + \theta_{\beta} \cos \theta_{0s}) \left(\frac{\kappa^*}{\kappa^* + 1} \left(\frac{1}{\kappa G_2 \sin \theta_{0s}} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta_{0s}}{(\kappa^* + 1) G_1} \left(1 - \left(\frac{\kappa^*}{\kappa G_2} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta_{0s}} \right) \right)$$

$$w_{\beta s} = \theta_{\beta s} \left(1 + \frac{v_{0s}}{\sin \theta_{0s}} \right)$$

$$J_{\beta s} = \frac{P_{\beta s}}{\rho_{0s}} + u_{0s} u_{\beta s} + v_{0s} v_{\beta s} + \frac{a_0^2 S_{0\beta s}}{\kappa_e (\kappa^* - 1)}$$

$$S_{\beta s} = \frac{P_{\beta s}}{P_{0s}} - \frac{\kappa^* \rho_{\beta s}}{\rho_{0s}}$$

Величины $P_{\alpha s}$, $P_{\beta s}$, $\rho_{\alpha s}$, $\rho_{\beta s}$ находятся по соответствующим формулам (1.5, 1.6). Отметим, что для совершенного газа ($\kappa = \kappa^* = \kappa_e$) выражения значительно упрощаются. Эти соотношения являются исходными при решении краевых задач с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

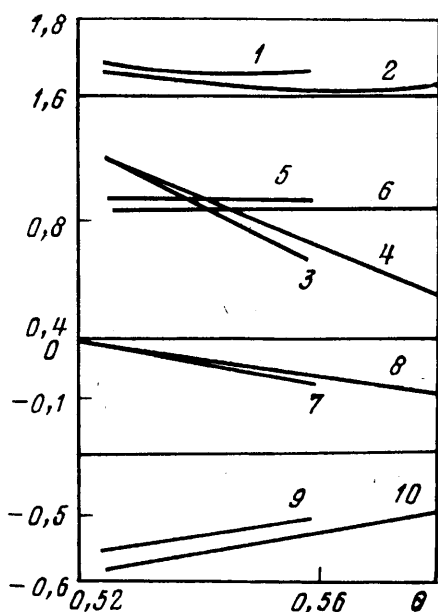
3. Решение поставленной задачи разбивается на три этапа. Сначала решается краевая задача (1.4), (2.2), (2.6) и определяется значение угла наклона ударной волны θ_{0s} , исходя из выполнения условия $|v_0(\theta_k)| \leq 0,0001$. Затем определяются возмущения решений в фазе с α (краевая задача (1.5), (2.3), (2.7)) методом пристрелки параметра θ_{α} при выполнении условия (2.3) с заданной точностью ($\epsilon_{\alpha} = 10^{-4}$). Аналогично решается краевая задача (1.6), (2.4), (2.8) для возмущений в фазе с β с нахождением величины θ_{β} ($\epsilon_{\beta} = 10^{-4}$).

Обратим внимание на системы уравнений (1.5), (1.6), в которых коэффициентами при производных $w_{\alpha\theta}$, $u_{\beta\theta}$, $w_{\beta\theta}$, $J_{\beta\theta}$ и $S_{\beta\theta}$ служит функция v_0 , обращающаяся в нуль на поверхности тела. Анализ поведения решений уравнений (1.5), (1.6) вблизи поверхности конуса приводит к соотношениям для возмущений в фазах с α и β

$$w_{\alpha k} = -\frac{u_{\alpha k}}{\sin \theta_k} - \frac{a_{0k}^2 S_{\alpha}}{\kappa_e (\kappa^* - 1) u_{0k} \sin \theta_k} \quad (3.1)$$

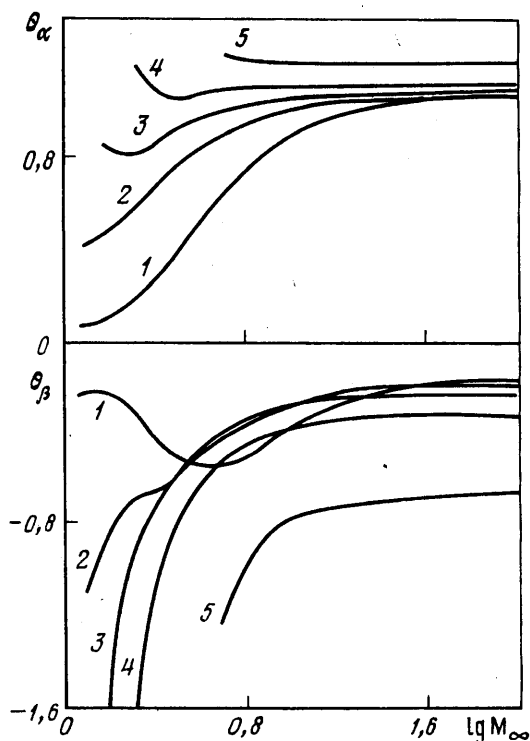
$$w_{\alpha\theta k} = \frac{u_{\alpha k} \operatorname{ctg} \theta_k}{\sin \theta_k} + \frac{a_{0k}^2 S_{\alpha} \operatorname{ctg} \theta_k}{\kappa_e (\kappa^* - 1) u_{0k} \sin \theta_k} - \frac{2u_{0k}}{\sin \theta_k} \\ u_{\beta k} = u_{\beta}(\theta_k), \quad u_{\beta\theta k} = 2 \quad (3.2)$$

$$w_{\beta k} = -\frac{u_{\beta k}}{2 \sin \theta_k} + \frac{a_{0k}^2 S_{\alpha}}{2 \kappa_e (\kappa^* - 1) u_{0k}^2 \sin \theta_k} \\ w_{\beta\theta k} = \frac{u_{\beta k} \operatorname{ctg} \theta_k}{2 \sin \theta_k} - \frac{1}{\sin \theta_k} \quad (3.3)$$



Фиг. 2

Фиг. 2. Распределение газодинамических функций для $\theta_k = 30^\circ$ и $M_\infty = 20$: 1, 2 — v_α ; 3, 4 — v_β ; 5, 6 — u_0 ; 7, 8 — v_0 ; 9, 10 — u_α . Четные номера соответствуют совершенному газу, а нечетные — равновесно диссоциированному воздуху



Фиг. 3

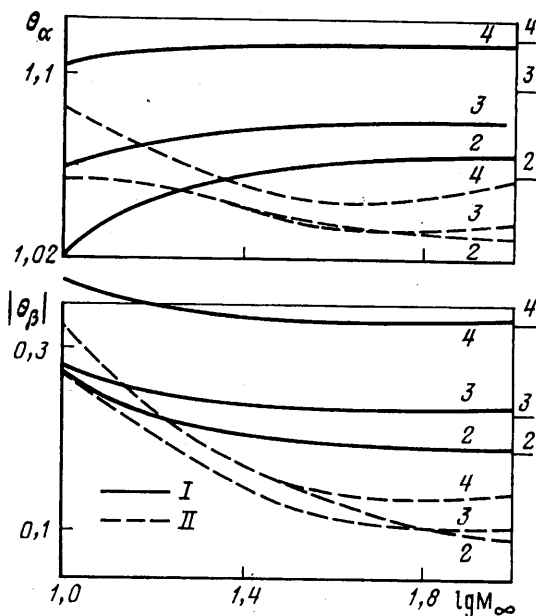
Фиг. 3. Поведение параметров θ_α и θ_β (верхние и нижние кривые 1–5) в зависимости от $\lg M_\infty$ для $\theta_k = 10, 20, 30, 40, 50^\circ$ соответственно

$$J_{\beta k} = -u_{\alpha k} - \frac{a_{0k}^2 S_\alpha}{\kappa_e (\kappa^* - 1) u_{0k}}, \quad J_{\beta \theta k} = -2u_{0k} \quad (3.4)$$

$$S_{\beta k} = -S_\alpha / u_{0k}, \quad S_{\beta \theta k} = 0 \quad (3.5)$$

Значения функций $w_{\alpha k}$, $w_{\beta k}$ и $J_{\beta k}$ на поверхности конуса могут быть использованы для контроля точности полученного решения краевой задачи. Производные от этих функций при приближении к поверхности конуса неограниченно возрастают, однако на теле они принимают конечные значения (3.1)–(3.5) (см. подробнее [1]). Эти условия накладывают ограничение на количество точек в ударном слое. Обычно для получения функций $w_{\alpha k}$, $w_{\beta k}$ и $J_{\beta k}$ с необходимой точностью требуется приблизительно 200 точек поперек ударного слоя. Заметим, однако, что, несмотря на разрыв производных, значения полученных газодинамических функций находятся в удовлетворительном соответствии с другими расчетными и экспериментальными данными [8], в том числе и для равновесно диссоциированного воздуха.

Другим аспектом данной проблемы является поведение энтропии в ударном слое. Поскольку угол наклона скачка уплотнения к оси симметрии конуса не одинаков, когда конус находится под углом атаки α , то различной будет и энтропия течения. Частично это учитывается изменением энтропии в соответствии с законом $\cos \varphi$. Для решения в фазе с α величина S_α оказывается постоянной, определяемой из условий на

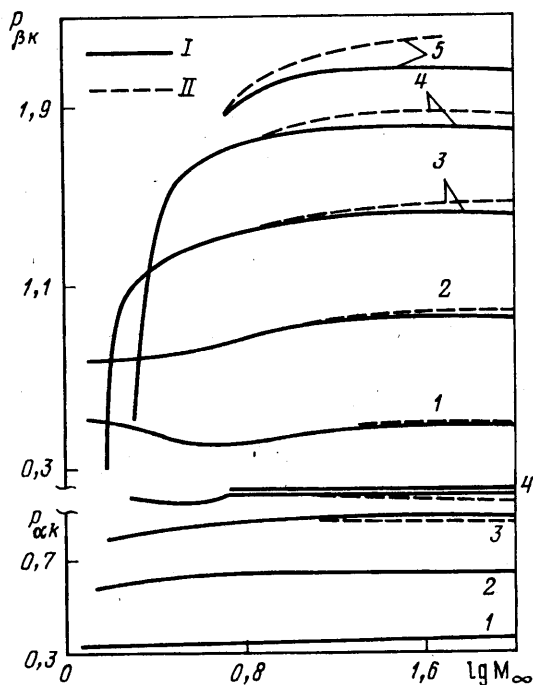


Фиг. 4. Сопоставление параметров θ_α и $|\theta_\beta|$ для совершенного газа (кривые I) и равновесно диссоциированного воздуха (II) в зависимости от $\lg M_\infty$; обозначения, как на фиг. 3

скачке уплотнения, а для решения в фазе β величина S_β оказывается переменной в ударном слое, рассчитываемой из решения дифференциального уравнения. Однако на поверхности конуса энтропия постоянна и отлична от ее значения в ударном слое. Это свидетельствует о наличии около поверхности тела вихревого слоя с резким изменением энтропии, для его учета необходимо ввести тонкий слой около тела [8]. В настоящей работе этот вопрос на рассматривается.

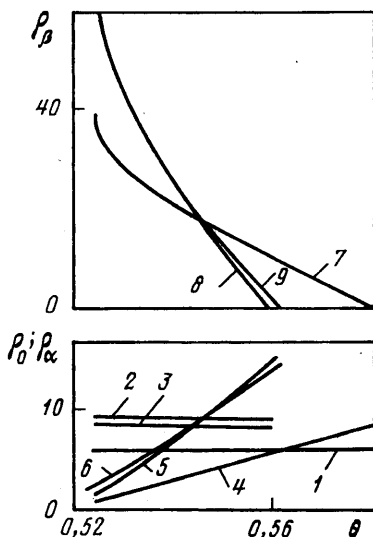
4. Расчеты были выполнены в широком диапазоне изменения угла полураствора конуса $0 \leq \theta_k \leq \theta^*$ и чисел Маха набегающего потока $M^* < M_\infty \leq \infty$. Газ предполагался невязким, нетеплопроводным, с уравнениями состояния (1.3).

На фиг. 2 продемонстрировано распределение газодинамических параметров в ударном слое (по углу θ в радианах). Видно, что параметры u_0 , u_α , u_β имеют линейный характер в ударном слое как для совершенного газа, так и для равновесного воздуха. Слабо изменяются параметры u_0 и u_α . Течение в ударном слое в значительной степени характеризуют параметры θ_α и θ_β , с помощью которых определяются все возмущения течения в фазах α и β . Поведение параметров θ_α и θ_β в совершенном газе представлено на фиг. 3. Слева кривые ограничены значениями чисел M^* . Видно, что для конусов с углом $\theta_k > 35^\circ$ всегда величина $\theta_\alpha > 1$. При гиперзвуковых скоростях θ_α стремится к значению, немного превышающему единицу для любых θ_k . Характер поведения величины θ_β неоднозначный: для конусов с углом $\theta_k > 17^\circ$ она плавно возрастает от больших отрицательных значений, в то время как для конусов с углом $\theta_k < 17^\circ$ она сначала падает, а затем плавно растет до величины, приблизительно равной $-0,2$. Влияние на эти параметры равновесной диссоциации воздуха продемонстрировано на фиг. 4* для чисел M_∞ в диапазоне $10 \leq M_\infty \leq 100$. Наблюдается снижение значений величин θ_α и $|\theta_\beta|$, что находится в полном соответствии с физической картиной течения, поскольку плотность газа в ударном слое резко возрастает, головной скачок прижимается ближе к телу и поток в ударном слое вместе с конусом стремится к поведению как твердое тело. Изменение параметров возмущений давления на поверхности конуса в фазах α и β представлено на фиг. 5 как для совершенного газа, так и для равновесного воздуха. Видно, что диссоциация оказывает слабое влияние на



Фиг. 5

Фиг. 5. Поведение параметров $p_{\alpha k}$ и $p_{\beta k}$ (на поверхности конуса) в зависимости от $\lg M_{\infty}$; обозначения как на фиг. 3



Фиг. 6

Фиг. 6. Распределения плотности ρ_0 (кривые 1–3) и ее возмущений в фазах с α (4–6) и β (7–9) в ударном слое совершенного газа с κ_{∞} (1, 4, 7), равновесно-диссоциированного воздуха (2, 5, 8) и совершенного газа с κ^* (3, 6, 9) для $\theta_k = 30^\circ$ при $M_{\infty} = 20$

величину $P_{\alpha k}$ и существенное на $P_{\beta k}$ для конусов с полууглом $\theta_k > 35^\circ$. На основании этих данных можно установить, с какого числа M_{∞} и угла полураствора конуса θ_k необходимо учитывать влияние равновесной диссоциации воздуха. Следует отметить особое поведение величины $P_{\beta k}$ при $\theta_k < 17^\circ$, что тесно связано с влиянием на него величины θ_p .

Обычно в инженерной практике вместо расчета параметров равновесно диссоциированного воздуха определяют параметры совершенного газа за скачком уплотнения, но с $\kappa = \kappa^*$, которое можно найти по таблицам [11]. Отметим, что величины κ^* и κ_e слабо изменяются в ударном слое. На фиг. 6 приведены кривые плотности в ударном слое как наиболее чувствительного параметра для совершенного газа с $\kappa = \kappa_{\infty}$, равновесно-диссоциированного воздуха и совершенного газа с показателем адиабаты κ^* . При этом в данном варианте $\kappa_e = 1,168$, а $\kappa^* = 1,245$. Видно, что кривые плотностей ρ_0 , ρ_{α} и ρ_{β} для газа с κ_{∞} значительно отличаются от равновесного случая, в то время как для газа с κ^* они близки к равновесному случаю. Давление является более консервативным параметром и, несмотря на некоторые различия величин P_{0S} , $P_{\alpha S}$ и $P_{\beta S}$, для рассмотренных случаев, за скачком и на поверхности конуса они становятся приблизительно равными. Таким образом, прием, заключающийся в замене расчета параметров равновесного воздуха их значениями совершенного газа с κ^* , может быть использован при анализе течения около кругового конуса.

5. Рассмотрим поведение газодинамических параметров при гиперзвуковом обтекании конуса совершенным газом, т.е. когда выполняется условие $M_{\infty} \sin \theta_k \gg 1$. Гранич-

ные условия (2.2)–(2.4), (2.6)–(2.8) при этом существенно упрощаются. Если посмотреть на поведение кривых u_0 , u_α и v_β (фиг. 2), то можно заметить, что они почти линейны. Опираясь на этот факт, попытаемся построить приближенное решение всех краевых задач.

Построим сначала решение стационарной "0"-задачи. Значения производной $u_{0\theta}$ на поверхности конуса и за скачком

$$v_{0\theta k} = -2u_{0k}, \quad v_{0\theta s} = -\left(2 - \frac{(\kappa-1)^2}{(\kappa+1)^2}\right) \cos \theta_{0s}$$

приблизительно равны. Аппроксимируя производную $u_{0\theta}$ линейной зависимостью между этими двумя значениями, проинтегрируем ее и с учетом граничных условий (2.2), (2.6) получим

$$v_{0s} = -\frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} \sin \theta_{0s} = -u_{0k} \Delta \theta_s + \left(\frac{(\kappa-1)^2}{2(\kappa+1)^2} - 1 \right) \Delta \theta_s \cos \theta_{0s}$$

$$\Delta \theta_s = \theta_{0s} - \theta_k$$

Это уравнение содержит два неизвестных параметра θ_{0s} и u_{0k} . Интегрируя функцию v_0 , определим функцию u_0 . Удовлетворяя граничным условиям на теле и ударной волне, получим другое уравнение относительно тех же двух неизвестных параметров. Разрешая их, найдем

$$\Delta \theta_s = \frac{2(\kappa-1)(\kappa+1)}{\kappa^2 + 10\kappa + 5} \operatorname{tg} \theta_k + A_1 \operatorname{tg}^3 \theta_k \quad (5.1)$$

$$A_1 = \frac{4(\kappa-1)^2(\kappa+1)^2(5\kappa^2 + 30\kappa + 13)}{3(\kappa^2 + 10\kappa + 5)^3} + \frac{32(\kappa-1)^3(\kappa+1)^3(3\kappa+1)}{3(\kappa^2 + 10\kappa + 5)^4}$$

$$u_{0k} = (1 + A_2(\Delta \theta_s)^2) \cos \theta_{0s}, \quad A_2 = 1 - \frac{(\kappa-1)^2}{6(\kappa+1)^2} \quad (5.2)$$

$$M_{0k}^2 = \frac{2}{(\kappa-1)} Q(1 + 2A_2(1+Q)(\Delta \theta_s)^2) \quad (5.3)$$

$$Q = \frac{Cr \cos^2 \theta_{0s}}{1 - Cr \cos^2 \theta_{0s}}, \quad Cr = \frac{0,5(\kappa-1)M_\infty^2}{1 + 0,5(\kappa-1)M_\infty^2}$$

Здесь Cr – число Крокко. Остальные газодинамические параметры можно получить исходя из соотношений для изэнтропического течения. Относительная погрешность представленных формул не превосходит 3% при $M_\infty \sin \theta_{0s} > 2$.

Перейдем теперь к задаче в фазе с α . Используем производную от функции v_α , принимающую на стенке значение $v_{\alpha\theta k}$, а за ударной волной – $v_{\alpha\theta s}$. Аппроксимируя функцию $v_{\alpha\theta}$ линейной зависимостью в ударном слое, интегрируя ее и удовлетворяя граничным условиям (2.3), (2.7), получим

$$v_{\alpha s} = v_{\alpha\theta k} \Delta \theta_s + 0,5(v_{\alpha\theta s} - v_{\alpha\theta k}) \Delta \theta_s + 2u_{\alpha k} \quad (5.4)$$

которое служит для определения двух неизвестных параметров θ_α и $u_{\alpha k}$. Вторым уравнением для нахождения этих параметров можно использовать зависимость для функции u_α . Воспользуемся приближенным выражением. Аппроксимируем параметр $u_{\alpha k}$ выражением

$$u_{\alpha k} = -\theta_\alpha \sin \theta_{0s}$$

выполняющимся с относительной погрешностью менее 3% при любых θ_k и κ для

гиперзвуковых скоростей. Подставляя это выражение в соотношение (5.4), получим

$$\theta_{\alpha} = \frac{2u_{0k} - u_{0k} \operatorname{ctg} \theta_k \Delta \theta_s}{v_{\alpha s} + 0,5 \Delta \theta_s (\sin \theta_{0s} (\operatorname{ctg}^2 \theta_k - 1) - A_3 - A_4)} \quad (5.5)$$

$$A_3 = \frac{(1 - u_{0k}^2) \operatorname{ctg} \theta_{0s}}{\kappa u_{0k} \sin^2 \theta_k}$$

$$A_4 = \frac{2}{\kappa + 1} \sin \theta_{0s} + \frac{4\kappa(3\kappa + 1)(3 - \kappa)}{(\kappa + 1)^4} \operatorname{ctg} \theta_{0s} \cos \theta_{0s}$$

Хорошим приближением для небольших углов θ_k служит выражение

$$\theta_{\alpha} = \frac{(4u_{0k} - 2u_{0k} \operatorname{ctg} \theta_k \Delta \theta_s)}{4(3\kappa + 1) \cos \theta_{0s}} (\kappa + 1)^2$$

а для больших углов

$$\theta_{\alpha} = \frac{u_{0k} (\kappa + 1)^2}{(3\kappa + 1) \cos \theta_{0s}}$$

На фиг. 4 выделенными линиями (справа за пределами сетки) показаны соответствующие значения, полученные по данным формулам. Наблюдается удовлетворительное согласование расчетных и аналитических результатов. Коэффициент давления в фазе с α представляется тогда в виде

$$P_{\alpha} = \theta_{\alpha} \rho_{0k} \sin^2 \theta_{0s} \operatorname{ctg} \theta_{0s} \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} + \Delta^2 \theta_s A_2 \left(\frac{\kappa + 2 \operatorname{ctg} \theta_{0s}}{\kappa} \right) \right)$$

Определение величины θ_{β} достигается аналогичным образом. Находится уравнение для величины $u_{\beta s}$, в которое входят два неизвестных параметра $u_{\beta k}$ и θ_{β} . Величина $u_{\beta k}$ аппроксимируется выражением

$$u_{\beta k} = -\frac{8\theta_{\beta}}{\kappa + 1} \sin \theta_{0s}$$

которое выполняется с относительной погрешностью менее 5% в широком диапазоне θ_k и κ . Тогда

$$\theta_{\beta} = A_5 / A_6$$

$$A_5 = 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \theta_{\alpha} + \Delta \theta_s \left(\frac{u_{0k} u_{\alpha k}}{a_{0k}^2} - 0,5 \operatorname{ctg} \theta_k + \right.$$

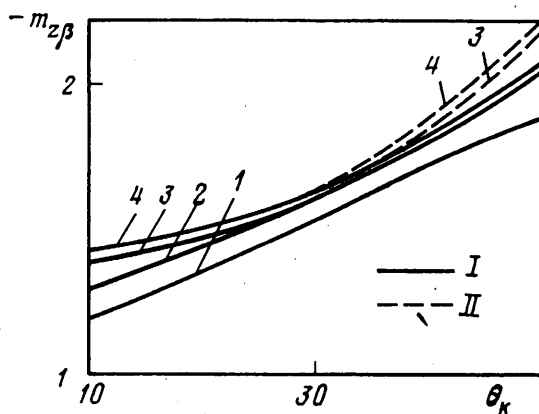
$$\left. + \theta_{\alpha} \operatorname{ctg} \theta_{0s} \left(\frac{4 + 2\kappa - 4\kappa^2}{\kappa(\kappa - 1)(\kappa + 1)} - \frac{a_{0k}^2}{2\kappa(\kappa - 1)u_{0k}^2 \sin \theta_k} \right) \right)$$

$$A_6 = \frac{6\kappa + 2}{(\kappa + 1)^2} \cos \theta_{0s} + \Delta \theta_s \left(\frac{\sin \theta_{0s}}{\kappa + 1} \left(4M_{0k}^2 - \frac{1 + 29\kappa}{2\kappa} + \frac{2}{\sin^2 \theta_k} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\kappa + 1) \sin \theta_{0s}} + \frac{2\kappa^3 + 27\kappa^2 + 4\kappa + 3}{2\kappa(\kappa + 1)^3} \operatorname{ctg} \theta_{0s} \cos \theta_{0s} \right)$$

Зная параметры θ_{β} и θ_{α} , можно найти величину давления в фазе с β на поверхности конуса

$$P_{\beta k} = \rho_{0k} \sin \theta_{0s} \left(\theta_{\alpha} + \theta_{\beta} \frac{8u_{0k}}{\kappa + 1} \right)$$



Фиг. 7. Поведение коэффициента момента тангажа $m_{z\beta}$ в зависимости от θ_k (кривые 1–4 для $M_\infty = 5; 10; 20; 50$ соответственно); обозначения, как на фиг. 4

Таким образом, все газодинамические параметры течения определены в гиперзвуковом приближении как в стационарном "0"-решении, так и в фазах с α и β .

6. На основании полученных решений можно найти аэродинамические характеристики острых конусов. Наиболее интересной характеристикой, ранее совершенно не изученной, является коэффициент момента тангажа $m_{z\beta}$, определяемый из соотношения

$$m_{z\alpha} + rm_{z\beta} = - \frac{2}{\pi r^2 \sin^2 \theta_k X} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_k} r^2 \sin \theta_k P \cos \varphi dr d\varphi$$

Для острого конуса, колеблющегося около своей вершины, это выражение значительно упрощается, принимая значение

$$m_{z\beta} = - \frac{1}{2} \frac{P_{\beta k}}{\sin \theta_k \cos \theta_k}$$

На фиг. 7 показана зависимость коэффициента момента $m_{z\beta}$ от числа Маха M_∞ и углов полураствора конуса θ_k .

Заметим, что параметр $m_{z\beta}$ характеризует демпфирование колебаний острого конуса (знак минус) или потерю динамической устойчивости, т.е. движение к резонансу (знак плюс). Поскольку $P_{\beta k} > 0$ при любых числах M_∞ , то происходит демпфирование колебаний конуса. Необходимо отметить, что в действительности колебания конуса происходят относительно центра тяжести, располагающегося на расстоянии, приблизительно равном $2/3$ его длины, а не вершины конуса. Поэтому данные результаты необходимо пересчитать на новое положение центра колебаний по известным соотношениям [2].

Заключение. Следуя изложенному в [1] подходу, получено решение задачи о колебании острого конуса относительно его вершины в сверхзвуковом потоке как совершенного газа, так и равновесно диссоциированного воздуха. Для гиперзвукового потока получены аналитические решения, позволяющие оценить распределение давления и аэродинамические характеристики острых конусов. Найден диапазон определяющих параметров M_∞ , κ и θ_k , при которых наблюдается существенное влияние равновесной диссоциации на газодинамические параметры течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теленин Г.Ф. Исследование обтекания колеблющегося конуса сверхзвуковым потоком. М.: Оборонгиз, 1959. 61 с.
2. Липницкий Ю.М. Теоретическое исследование сверхзвукового нестационарного обтекания затупленных тел // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178. № 1. С. 59–62.
3. Полянский О.Ю. О некоторых особенностях нестационарного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 4. С. 30–36.
4. Теленин Г.Ф., Липницкий Ю.М. Нестационарное сверхзвуковое обтекание затупленных тел с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 4. С. 19–29.
5. Полянский О.Ю. Обтекание тел вращения, колеблющихся в сверхзвуковом потоке газа // Тр. ЦАГИ. 1958. Вып. 726. 24 с.
6. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
7. Антонец А.В. Расчет пространственного сверхзвукового обтекания затупленных тел с изломами образующей с учетом равновесного и замороженного состояния газа в ударном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2. С. 178–181.
8. Булах Б.М. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970. 343 с.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
10. Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. М.: Машиностроение. 1964. 572 с.
11. Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Ионов В.П. и др. Термодинамические функции воздуха для температур от 100 до 12000 К и давлений от 0,001 до 1000 атмосфер. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 56 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1997