

УДК 532.526

© 1998 г. М.А. ТЕВЕРОВСКИЙ, С.И. ЧЕРНЫШЕНКО

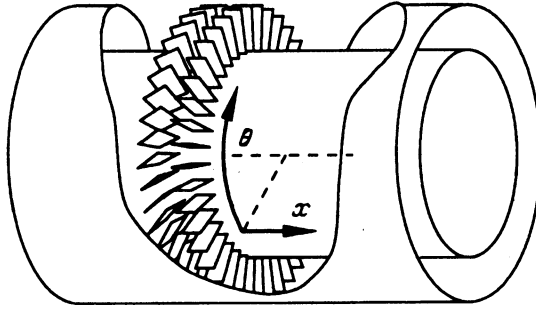
### ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ В ВЫХОДНОМ КАНАЛЕ ОСЕВОГО КОМПРЕССОРА В РЕЖИМЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СРЫВА

Рассмотрено течение идеальной несжимаемой жидкости в правой полуплоскости, периодическое по поперечной координате, моделирующее поток в выходном канале компрессора в режиме вращающегося срыва. Особенность задачи состоит в том, что в начальном сечении заданы обе компоненты скорости, а распределение завихренности неизвестно. Найдено ее аналитическое решение в виде ряда по малому параметру, характеризующему отличие скорости от постоянного значения. Получены численные результаты.

Вращающийся срыв – это специфическая форма течения, наблюдаемая в турбомашинах, в частности в осевых компрессорах авиационных двигателей. При развитом вращающемся срыве несколько соседних лопаток турбокомпрессора обтекаются с отрывом, причем с течением времени на примыкающей к этой области лопатке тоже развивается отрыв и одновременно на крайней лопатке с другой стороны области отрыв исчезает. В результате вся эта структура перемещается относительно лопаток. Скорость движения области вращающегося срыва меньше скорости вращения роторов компрессора и направлена в ту же сторону.

**1. Модель явления и некоторые предварительные сведения.** Вращающийся срыв представляет собой нестационарное трехмерное турбулентное течение в области сложной и меняющейся во времени геометрии, а потому может показаться не поддающимся численному или аналитическому решению. Однако недавние исследования [1] на лабораторных компрессорах показали, что по крайней мере один из двух наблюдаемых сценариев возникновения вращающегося срыва можно описать количественно с помощью теории, основанной по существу на переходе к пределу бесконечно большого числа лопаток [2, 3]. Лабораторные компрессоры сконструированы так, чтобы упростить анализ происходящих в них процессов: сжимаемостью течения в них можно пренебречь, а проточная часть представляет собой пространство между двумя коаксиальными цилиндрами, отношение диаметров которых близко к единице, с рядами лопаток, вращающихся вместе с внутренним цилиндром (роторами), и неподвижных лопаток (статорами). Благодаря этому можно пренебречь зависимостью параметров течения от расстояния до оси вращения и рассматривать нестационарное течение несжимаемой жидкости, зависящее только от двух пространственных координат:  $x$  и  $\theta$  (см. фиг. 1), периодическое по  $\theta$  с периодом  $2\pi$  (радиус проточной части принят далее за единицу).

На практике число лопаток обычно велико. При предельном переходе к бесконечно большому числу лопаток описание течения производится по-разному во входном канале, области роторов и статоров и выходном канале. Решения в этих областях сопрягаются на их границах из условия непрерывности давления и осевой компоненты скорости (осредненных по некоторому масштабу, много меньшему  $2\pi$ , но много большему расстояния между лопатками).



Фиг. 1. Схема компрессора и обозначения

Течение во входном канале обычно можно считать потенциальным. Задавая на выходе из входного канала осевую скорость  $u = \phi(t, \theta)$  (это обозначение общепринято в теории компрессоров), можно отыскать потенциал течения, а из него, пользуясь интегралом Коши–Лагранжа, распределение давления. В частности, если

$$\phi(t, \theta) = \phi_s + \sum_{n \neq 0} A_n(t) e^{in\theta}, \quad A_n = \overline{A_{-n}} \quad (1.1)$$

то давление торможения на входе в область, занятую лопатками, имеет вид

$$p_{in}^* = p_{-\infty}^* - L_{in}[\phi](t, \theta) = p_{-\infty}^* - \sum_{n \neq 0} A_n'(t) e^{in\theta} |n|^{-1}$$

Такое простое представление позволяет обойтись без анализа деталей течения во входном канале, поскольку оператор  $L_{in}$  содержит всю информацию, необходимую для сопряжения течения во входном канале с течением вниз по потоку.

Попытки теоретического описания течения в области, занятой лопатками, до сих пор дают неудовлетворительные результаты даже в пределе бесконечно большого числа лопаток (поскольку течение в межлопаточном зазоре турбулентное). Тем не менее задача здесь сильно упрощается благодаря тому, что лопатки эффективно изолируют друг от друга течения в соседних межлопаточных каналах. Поэтому перепад давления на входе и выходе из межлопаточного канала зависит только от поведения расхода через этот канал, и приблизительно таким же образом, как и в случае, когда вращающегося срыва нет, т.е. когда течения во всех каналах подобны. Перепад давления на всей области, занятой роторами и статорами, равен сумме перепадов на них. Таким образом, удастся выразить этот перепад некоторым оператором от все той же осевой скорости  $\phi(t, \theta)$ . Обычно его записывают для разности статического давления на выходе из области, занятой лопатками, и полного давления на входе:  $p_{out} - p_{in}^* = N_c[\phi](t, \theta)$ . Существенно, что оператор  $N_c$  можно по крайней мере в принципе определить из экспериментальных характеристик компрессора в режиме без вращающегося срыва. Так как вращающийся срыв существенно влияет на характеристику компрессора, нахождение  $N_c$  требует применения таких методов его подавления, которые не влияли бы на измеряемую характеристику. Например, в [4] измерения проводились на отдельной ступени компрессора, в то время как соседние были переведены в режим, препятствующий возникновению вращающегося срыва. В [1] использовано активное управление, менявшее по отдельности углы наклона лопаток управляющей решетки и подавлявшее возмущения, которые ведут к вращающемуся срыву.

Для течения в выходном канале можно записать, что статическое давление на выходе из лопаток выражено оператором от распределения осевой компоненты скорости:  $p_{out}(t, \theta) = p_{+\infty} + N_{out}[\phi](t, \theta)$ . Сопоставляя все три формулы, получаем опера-

торное уравнение, пригодное для описания неосесимметричных возмущений

$$N_c[\phi] = L_{in}[\phi] + N_{out}[\phi] + p_{+\infty} - p_{-\infty}^* \quad (1.2)$$

Некоторые опущенные здесь для простоты уточнения и варианты конкретного вида оператора  $N_c$  приведены в [2].

Обратимся к анализу оператора  $N_{out}[\phi]$ . Течение в выходном канале можно приближенно считать идеальным, однако оно заведомо непотенциально. Дело в том, что ряды лопаток обладают направляющим действием: на выходе из последнего статора угол наклона линий тока фиксирован (и, как правило, равен нулю). Поэтому при задании на входе в выходной канал осевой компоненты скорости  $u = \phi(t, \theta)$  оказывается определена и ее поперечная компонента. Потенциальное течение не может удовлетворить сразу двум граничным условиям, а вихревое имеет необходимый дополнительный произвол, а именно распределение завихренности на входе в область. Предположим, что осевая скорость мало, на величину порядка  $\epsilon \ll 1$ , отличается от стационарного осесимметричного решения уравнения (1.2)  $\phi = \phi_s = \text{const}$ . Наличие двух граничных условий позволяет тогда (см., например, [2]) вычислить главный член разложения оператора  $N_{out}$ , оказывающийся в точности равным  $L_{in}$ . Теперь можно провести анализ линейной устойчивости решения уравнения (1.2), который, как показано в [1], дает хорошее согласие с экспериментом как по критическому значению расхода, при котором происходит потеря устойчивости, так и по инкрементам нарастания и фазовым скоростям нескольких первых мод.

Линейного приближения, однако, недостаточно для описания, например, гистерезиса, который, как показывает эксперимент, часто сопровождается возникновением вращающегося срыва. Анализ этого явления требует учета нелинейности системы, что возможно, скажем, в рамках слабонелинейной асимптотической теории или численными методами [5].

Из общих соображений слабонелинейной теории, которая ведет к известному уравнению Ландау [6], следует, что для корректного описания гистерезиса необходимо учитывать члены до порядка  $\epsilon^3$  включительно. При этом в системе отсчета, движущейся со скоростью нейтральной волны  $V$ , решение меняется медленно: члены с производными по времени оказываются тоже порядка  $\epsilon^3$ . Введем координату  $y$  и скорость  $v$  в этой системе:  $y = \theta - Vt$ ,  $v = w - V$ ,  $w$  – окружная скорость в неподвижной системе отсчета. Уравнения Эйлера и граничные условия в этой системе отсчета имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

$$x = 0, \quad u = \phi(t, y + Vt), \quad v = k_1 \phi(t, y) - V; \quad x \rightarrow +\infty, \quad p \rightarrow p_{+\infty} \quad (1.4)$$

Здесь  $k_1$  – тангенс угла наклона линий тока на выходе из спрямляющего аппарата. Эта система определяет нелинейный оператор  $N_{out}$ : решив ее при заданном  $\phi(t, \theta)$ , можно вычислить давление. Разложим теперь решение этой задачи по  $\epsilon$

$$\begin{aligned} u &= \phi_s + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots \\ v &= k_1 \phi_s - V + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \epsilon^3 v_3 + \dots \\ p &= p_{+\infty} + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя эти разложения в (1.3) и вводя переменную  $T = \epsilon^2 t$  в соответствии с масштабами, вытекающими из упомянутого выше уравнения Ландау [6], получим, что производные по времени выпадают из уравнений для  $u_m$ ,  $v_m$  и  $p_m$  при  $m = 1, 2$ . Следовательно, эти члены можно найти из решения соответствующей квазистационарной задачи.

Взяв дивергенцию от (1.3), получим уравнение для давления

$$\Delta p = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.6)$$

Подстановка (1.4) в первое уравнение (1.3) дает граничное условие

$$x = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = V \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Подставив сюда разложения (1.5), получим, что в правую часть уравнения для  $p_3$  входят только члены с  $m = 1, 2$ . Следовательно,  $p_3$  можно представить в виде суммы решений квазистационарной задачи и уравнения Лапласа  $\Delta p_3 = 0$  с граничным условием  $\partial p_3 / \partial x = -\partial \phi / \partial t$  при  $x = 0$ .

Вновь представим  $\phi$  в виде ряда Фурье (1.1), перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $V$ , разложим формально решение квазистационарной задачи в ряд Тейлора по  $A_n$  и перейдем опять в исходную систему отсчета. В результате получим следующее приближенное представление для давления на выходе из спрямляющего аппарата, т.е. для оператора  $N_{out}$ :

$$p_{out} - p_{+\infty} = N_{out}[\phi] = \sum_{n \neq 0} \left( \frac{A'_n}{|n|} + \sum_{k+l=n} \pi_{kl}(V) A_k A_l + \sum_{j+k+l=n} \pi_{jkl}(V) A_j A_k A_l + \dots \right) e^{in\theta} \quad (1.7)$$

Возможность разложения в ряд Тейлора или, точнее, в асимптотический ряд такого вида будет доказана ниже.

Как уже упоминалось, в рамках слабонелинейной теории в качестве  $V$  следует брать фазовую скорость нейтрального возмущения. Вполне вероятно, что формулу (1.7) можно использовать как приближенную и при численных расчетах вращающегося срыва на основе (1.2). В этом случае целесообразно выбирать  $V$  как скорость такой системы отсчета, в которой производные решения по времени минимальны.

Цель настоящей статьи состоит в отыскании  $\pi_{kl}(V)$  и  $\pi_{jkl}(V)$ . Далее без ограничения общности положим  $\phi_s = 1$ .

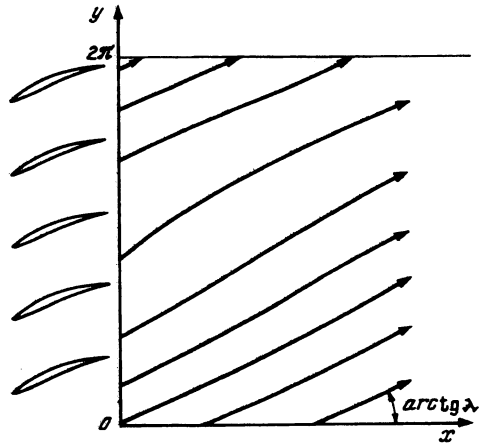
**2. Постановка задачи.** Рассматривается стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости в правой полуплоскости  $x > 0$ , периодическое по координате  $y$  (фиг. 2). При  $x = 0$  заданы обе компоненты скорости:  $u(y) = 1 + \epsilon U(y)$ ,  $v(y) = k_1 u(y) - V$ ; далеко справа ( $x \rightarrow +\infty$ ) давление или, что равносильно, наклон линий тока стремится к константе. Здесь  $U(y)$  – заданная  $2\pi$ -периодическая функция;  $k_1$  и  $V$  – заданные константы;  $\epsilon$  – малый параметр. Необходимо определить давление  $p(y) = p(0, y)$  с точностью до членов порядка  $\epsilon^3$  включительно.

Без ограничения общности можно полагать, что

$$\int_0^{2\pi} u dy = 2\pi \quad (2.1)$$

Введем функцию тока  $\psi$  и завихренность  $\omega^* = \epsilon \omega$  по формулам

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega^* = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$



Фиг. 2. Картина линий тока в выходном канале

В терминах  $\omega$  и  $\psi$  постановка задачи имеет вид

$$\Delta\psi = -\varepsilon\omega(\psi) \quad (2.2)$$

$$x = 0, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial x} = k_1 \frac{\partial\psi}{\partial y} - V \quad (2.3)$$

$$x = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1 + \varepsilon U(y) \quad (2.4)$$

$$x \rightarrow +\infty: \quad -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (2.5)$$

Здесь  $\omega(\psi)$ ,  $\psi(x, y)$  и константа  $\lambda$  неизвестны, а  $U(y)$  и константы  $k_1$  и  $V$  заданы. Решив (2.2)–(2.5), можно найти давление из интеграла Бернулли

$$p + \frac{u^2 + v^2}{2} = H^* = \varepsilon H \quad (2.6)$$

Постоянная Бернулли связана с завихренностью известным соотношением

$$\frac{dH}{d\psi} = -\omega(\psi) \quad (2.7)$$

Непосредственное построение асимптотики решения задачи (2.2)–(2.5) до членов порядка  $\varepsilon^3$  включительно оказалось невозможным ввиду крайней громоздкости промежуточных выкладок. Это затруднение удалось преодолеть, решив задачу в два шага: вначале построив асимптотику решения задачи (2.2), (2.3), (2.5) (т.е. без (2.4)), считая  $\omega(\psi)$  известным, а затем определив  $\omega(\psi)$  из (2.4) и построенного разложения.

Другое серьезное осложнение состоит в том, что при заданном  $V$  и неизвестном  $\lambda$  разложение оказывается сингулярным. Действительно, пусть  $\lambda = \lambda_0 + \dots$ ,  $\psi = \psi_0 + \dots$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда при  $x \rightarrow \infty$  наклон линий тока в главном приближении стремится к  $\arctg\lambda_0$ , а не к точному значению  $\arctg\lambda$ . Поэтому, как бы ни было мало  $\varepsilon$ , при достаточно больших  $x$  действительные и найденные приближенно линии тока разойдутся на большое расстояние. Следовательно,  $\psi_0$  и  $\omega(\psi_0)$  при достаточно больших  $x$  вообще не будут приближением к точным значениям. В результате при  $x \rightarrow \infty$  высшие члены разложения растут быстрее низших и при больших  $x$  перестают быть малыми по сравнению с низшими членами. Это означает необходимость введения при больших  $x$  второго характерного предела, т.е. сингулярность разложения, и существенно осложняет выкладки. Кроме того, отыскание  $\omega(\psi)$  из (2.4) на втором шаге, как описано выше, сводится к процедуре обращения ряда, степень обоснованности которой в случае сингулярного разложения неясна. Это затруднение также удается преодолеть, временно поменяв ролями данное и неизвестное, а именно  $V$  и  $\lambda$ .

**3. Асимптотическое разложение.** Будем искать  $\psi$  и  $V$  в виде асимптотических рядов по  $\varepsilon$

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + \varepsilon\psi_1(x, y) + \varepsilon^2\psi_2(x, y) + \varepsilon^3\psi_3(x, y) + \dots \quad (3.1)$$

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3 + \dots \quad (3.2)$$

Разложив  $\omega(\psi)$  в окрестности  $\psi_0$  в ряд Тейлора, представим правую часть (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega(\psi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \omega_m(x, y) = \varepsilon\omega(\psi_0) + \varepsilon^2\omega'(\psi_0)\psi_1 + \\ &+ \varepsilon^3\left(\omega'(\psi_0)\psi_2 + \frac{1}{2}\omega''(\psi_0)\psi_1^2\right) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя разложения (3.1), (3.2) в уравнение (2.2) и граничные условия (2.3), (2.5), получим следующие краевые задачи для функций  $\psi_m(x, y)$ , где вид  $\omega_m(x, y)$  следует из (3.3):

$$\Delta\psi_m = -\omega_m; \quad x = 0: -\frac{\partial\psi_m}{\partial x} = k_1 \frac{\partial\psi_m}{\partial y} - V_m; \quad x \rightarrow \infty: -\frac{\partial\psi_m}{\partial x} = \lambda \frac{\partial\psi_m}{\partial y} \quad (3.4)$$

При  $m = 0$  сразу получим тривиальное решение

$$\psi_0(x, y) = y - \lambda x, \quad V_0 = k_1 - \lambda \quad (3.5)$$

Из периодичности параметров потока следует периодичность функций  $H(\psi)$  и  $\omega(\psi)$ . Положим

$$\omega(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{in\psi}$$

Из (2.7) следует, что  $\Omega_0 = 0$ . Теперь функции  $\omega(\psi_0)$ ,  $\omega'(\psi_0)$  и  $\omega''(\psi_0)$  с учетом (3.5) примут вид

$$\omega(\psi_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{in(y-\lambda x)}, \quad \omega'(\psi_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n i n e^{in(y-\lambda x)}, \quad \omega''(\psi_0) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n n^2 e^{in(y-\lambda x)} \quad (3.6)$$

Кроме того, из (2.1) имеем ( $m = 1, 2, \dots$ )

$$\psi_0(y + 2\pi) - \psi_0(y) = 2\pi, \quad \psi_m(y + 2\pi) - \psi_m(y) = 0$$

Условие периодичности по координате  $y$  позволяет представить функции  $\psi_m$  в виде ряда Фурье

$$\psi_m(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi_m^{(n)}(x) e^{iny} \quad (3.7)$$

Здесь и далее верхние индексы заключены в скобки, чтобы отличать их от показателей степени. После подстановки (3.6) и (3.7) в (3.4) получаем линейные краевые задачи для коэффициентов Фурье  $\Psi_m^{(n)}(x, y)$

$$\left(\Psi_m^{(n)}\right)'' - n^2 \Psi_m^{(n)} = R_m^{(n)}(x); \quad x = 0, \quad n \neq 0, \quad \left(\Psi_m^{(n)}\right)' + i n k_1 \Psi_1^{(n)} = 0 \quad (3.8)$$

$$x = 0, \quad n = 0, \quad \left(\Psi_m^{(0)}\right)' - V_m = 0; \quad x \rightarrow \infty, \quad \left(\Psi_m^{(n)}\right)' + i n \lambda \Psi_m^{(n)} = 0$$

Правые части  $R_m^{(n)}(x)$  выражаются с помощью (3.3) и (3.4) через функции  $\psi_{m-1}$  и коэффициенты Фурье  $\Omega_n$  функции  $\omega(\psi)$ , так что полученную систему можно решать последовательно для каждого  $m$ . При  $n = 0$  решения  $\Psi_m^{(0)}$ , как видно из (3.8), определены с точностью до аддитивных констант, которые без ограничения общности (поскольку функция тока определена с точностью до константы) будем полагать равными нулю. Соответственно два граничных условия в (3.8) при  $n = 0$  можно использовать для определения  $V_m$  и неаддитивной произвольной константы в решении дифференциального уравнения.

Пользуясь уже полученным выражением (3.5) для  $\psi_0(x, y)$ , из (3.3) и (3.4) находим, что  $R_1^{(n)} = -\Omega_n e^{-in\lambda x}$  при  $n \neq 0$  и  $R_1^{(0)} = 0$ . Тогда из (3.8) получим

$$n \neq 0, \quad \Psi_1^{(n)} = G(a_1, b_n, n) \left[ F(b_n, n) e^{-|n|x} + e^{b_n x} \right] \Omega_n; \quad \Psi_1^{(0)} = 0, \quad V_1 = 0$$

Здесь  $a_1 = -1$ ;  $b_n = -in\lambda$ . Кроме того, введены обозначения

$$G(a, b, n) = \frac{a}{b^2 - n^2}, \quad F(b, n) = \frac{(b + ink_1)(|n| + ink_1)}{n^2(1 + k_1^2)} \quad (3.9)$$

Окончательно функция  $\psi_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_1^{(n)}(x) \Omega_n e^{iny}, \quad g_1^{(0)}(x) = 0 \\ g_1^{(n)}(x) &= G(a_1, b_n, n) \left[ F(b_n, n) e^{-|n|x} + e^{b_n x} \right], \quad n \neq 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогично при известном  $\Psi_1(x, y)$  находим

$$R_2^{(n)} = - \sum_{k+l=n} ik g_1^{(l)}(x) \Omega_k \Omega_l e^{b_k x}$$

Соответственно решение (3.8) при  $m = 2$  имеет вид

$$\Psi_2^{(n)}(x) = \sum_{k+l=n} g_2^{(kl)}(x) \Omega_k \Omega_l$$

причем  $g_2^{(kl)}$  можно оставить неопределенным при  $k = 0$  или  $l = 0$ , так как  $\Omega_0 = 0$ , а при  $k \neq 0$  и  $l \neq 0$

$$\begin{aligned} g_2^{(kl)}(x) &= \sum_{s=1}^2 G(a_{2s}, b_{2s}, k+l) [F(b_{2s}, k+l) e^{-|k+l|x} + e^{b_{2s}x}], \quad k+l \neq 0; \\ g_2^{(kl)}(x) &= a_{21} e^{b_{21}x} / b_{21}^2, \quad k+l = 0; \quad a_{21} = -ikG(a_1, b_1, l)F(b_1, l), \\ a_{22} &= -ikG(a_1, b_1, l), \quad b_{21} = -|l| + b_k, \quad b_{22} = b_l + b_k = b_n, \quad b_l = -il\lambda, \quad b_k = -ik\lambda \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для краткости не указывая явно, что  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_{21}$  и  $b_{22}$  есть функции  $k$  и  $l$ , во всех последующих формулах будем подразумевать указанную здесь зависимость.

Отметим следующее важное обстоятельство. Подставляя  $g_1^{(n)}$  из (3.10) в  $R_2^{(0)}$ , легко убедиться, что  $R_2^{(0)}$  содержит член

$$C = \sum_{k+l=0} ikG(a_1, b_1, l) e^{(b_l + b_k)x} \Omega_k \Omega_l$$

не зависящий от  $x$  (так как  $b_l + b_k = 0$ ). Соответственно в  $\Psi_2$  должен был бы входить член вида  $Cx^2/2$ . При  $x \rightarrow \infty$  это выражение растет много быстрее, чем  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$ . Поэтому для сколь угодно малого  $\epsilon$  всегда нашлось бы такое большое  $x$ , что  $\epsilon^2 \Psi_2$  не было бы много меньше предшествующих членов вопреки предположениям, кладущимся в основу построения асимптотического разложения. Фактически это означало бы, что разложение не является равномерно пригодным и необходимо рассматривать еще один характерный предел при больших  $x$ . Воспользовавшись определением (3.9) функции  $G$ , можно, однако, показать, что  $C \equiv 0$ . Если решать задачу с заданным  $V$  и неизвестным  $\lambda$ , то  $C$  оказывается не равным нулю. Природа этого явления, связанная с неточной аппроксимацией наклона линий тока на бесконечности, описана в разд. 1.

Из (3.8) получим также, что

$$V_2 = \sum_{k+l=0} \frac{a_{21}}{b_{21}} \Omega_k \Omega_l$$

Окончательно функция  $\Psi_2$  имеет вид

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k+l=n} g_2^{(kl)}(x) \Omega_k \Omega_l \epsilon^{iny}$$

При  $m = 3$  имеем

$$R_3^{(n)} = - \sum_{j+k+l=n} \left[ ijg_2^{(kl)} - \frac{1}{2} j^2 g_1^{(k)} g_1^{(l)} \right] e^{b_j x} \Omega_j \Omega_k \Omega_l = \sum_{j+k+l=n} \sum_{m=1}^5 a_{3m} e^{b_{3m} x} \Omega_j \Omega_k \Omega_l \quad (3.12)$$

$$a_{31} = -ijG(a_{21}, b_{21}, k+l) + \frac{1}{2} j^2 G(a_1, b_1, l) F(b_1, l) G(a_1, b_k, k)$$

$$a_{32} = \frac{1}{2} j^2 G(a_1, b_k, k) F(b_k, k) G(a_1, b_l, l)$$

$$a_{33} = \frac{1}{2} j^2 G(a_1, b_k, k) F(b_k, k) G(a_1, b_l, l) F(b_l, l)$$

$$a_{34} = -ij\delta_{kl} G(a_{22}, b_{22}, k+l) + \frac{1}{2} j^2 G(a_1, b_k, k) G(a_1, b_l, l)$$

$$a_{35} = -ij\delta_{kl} \sum_{m=1}^2 G(a_{2m}, b_{2m}, k+l) F(b_{2m}, k+l)$$

$$b_{31} = -|l| + b_{k+j}, \quad b_{32} = -|k| + b_{l+j}, \quad b_{33} = -|k| - |l| + b_j, \quad b_{34} = b_n$$

$$b_{35} = -|k| + |l| + b_j; \quad \delta_{kl} = 0, \quad k+l=0; \quad \delta_{kl} = 1, \quad k+l \neq 0$$

Отметим, что аналогично случаю  $m = 2$  слагаемое в  $R_3^{(0)}$ , не зависящее от  $x$  (оно имеет вид  $\sum_{j+k+l=0} a_{34} \Omega_j \Omega_k \Omega_l$ ), оказывается в точности равным нулю.

Отметим еще, что  $b_{31} = -|n|$  при  $j+k=0$  и  $b_{32} = -|n|$  при  $j+l=0$ , т.е. при  $m = 3$  в правой части (3.8) имеются члены, пропорциональные решению однородного уравнения. Это приводит к появлению в решении членов вида  $x e^{-|n|x}$ . При  $m = 3$  решение (3.8) можно записать в виде

$$\Psi_3^{(n)} = \sum_{j+k+l=0} g_3^{(jkl)}(x) \Omega_j \Omega_k \Omega_l$$

Аналогично случаю  $m = 2$ , так как  $\Omega_0 = 0$ , то  $g_3^{(jkl)}$  можно оставить неопределенным, если хотя бы один из индексов равен нулю. В противном случае

$$g_3^{(jkl)}(x) = \sum_{s=1}^5 \Gamma_s^{(jkl)}(x), \quad j+k+l \neq 0; \quad g_3^{(jkl)}(x) = \sum_{m=1, m \neq 4}^5 \frac{a_{3m} e^{b_{3m} x}}{b_{3m}^2} \quad (3.13)$$

При  $s = 1$  и  $j+k=0$ , а также при  $s = 2$  и  $j+l=0$

$$\Gamma_s = \left[ \frac{(|n| + ink_1)}{n^2(1+k_1^2)} e^{-|n|x} + x e^{b_{3s} x} \right] \frac{a_{3s}}{2b_{3s}}, \quad n = j+k+l$$

а в остальных случаях  $\Gamma_s(x) = G(a_{3s}, b_{3s}, n) [F(b_{3s}, n) e^{-|n|x} + e^{b_{3s} x}]$ ,  $n = j+k+l$

Из (3.8) получаем также, что

$$V_3 = \sum_{j+k+l=0} \sum_{m=1, m \neq 4}^5 \frac{a_{3m}}{b_{3m}} \Omega_j \Omega_k \Omega_l$$

Окончательно функция  $\Psi_3$  имеет вид

$$\Psi_3(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j+k+l=n} g_3^{(jkl)}(x) \Omega_j \Omega_k \Omega_l e^{iny}$$



**4. Определение завихренности и направления потока на бесконечности.** Формулы (3.1), (3.2) и полученные выше формулы для членов этих разложений выражают  $\psi(x, y)$  и  $V$  через распределение завихренности по линиям тока  $\omega(\psi)$  и тангенс угла наклона линий тока на бесконечности  $\lambda$ . Представим  $U(y)$  в условии (2.4) рядом Фурье с коэффициентами  $U_n$ . Тогда оно примет вид

$$u(0, y) = 1 + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{iny}, \quad U_0 = 0$$

Из полученного в предыдущем разделе разложения следует ((3.1) и последующие формулы) при  $x = 0$

$$U_n = \alpha_n \Omega_n + \varepsilon \sum_{k+l=n} \alpha_{kl} \Omega_k \Omega_l + \varepsilon^2 \sum_{j+k+l=n} \alpha_{jkl} \Omega_j \Omega_k \Omega_l + \dots$$

$$\alpha_n = \text{ing}_1^{(n)}(0), \quad \alpha_{kl} = i(k+l)g_2^{(kl)}(0), \quad \alpha_{jkl} = i(j+k+l)g_3^{(jkl)}(0) \quad (4.1)$$

Здесь  $\alpha_{kl}$  и  $\alpha_{jkl}$  не определены, если  $j, k$  или  $l$  равны нулю. Отметим, что  $\alpha_{kl} = 0$ , если  $k + l = 0$ , и  $\alpha_{jkl} = 0$ , если  $j + k + l = 0$ .

Положим

$$\Omega_n = \beta_n U_n + \varepsilon \sum_{k+l=n} \beta_{kl} U_k U_l + \varepsilon^2 \sum_{j+k+l=n} \beta_{jkl} U_j U_k U_l + \dots \quad (4.2)$$

Строго говоря, следовало бы записать формулу в более общем виде, например заменив  $\beta_n U_n$  на  $\sum_s \beta_n^s U_s$ , но последующий анализ все равно показывает, что коэффициенты, не включенные в (4.2), равны нулю.

Подставляя ряд в ряд и приводя подобные члены, получим

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}, \quad n \neq 0; \quad \beta_{kl} = -\frac{\alpha_{kl}}{\alpha_{k+l} \alpha_k \alpha_l}, \quad k+l \neq 0; \quad \beta_{kl} = 0, \quad k+l = 0$$

$$\beta_{jkl} = -\frac{(\alpha_{j,k+l} + \alpha_{k+l,j}) \beta_{kl}}{\alpha_{j+k+l} \alpha_j} - \frac{\alpha_{jkl}}{\alpha_{j+k+l} \alpha_j \alpha_k \alpha_l}, \quad j+k+l \neq 0 \quad (4.3)$$

$$\beta_{jkl} = 0, \quad j+k+l = 0$$

Эти формулы справедливы при  $j \neq 0, k \neq 0, l \neq 0$ . Коэффициенты, имеющие хотя бы один нулевой индекс, можно оставить неопределенными, так как в (4.2), а значит, и во всех последующих формулах они умножаются на величины, равные нулю. Полученные соотношения завершают процедуру обращения ряда.

Подставив (4.2) в ранее полученные формулы (3.10), (3.11), (3.13), можно найти решение с заданным распределением скорости при  $x = 0$ . Однако формулы (4.3) для коэффициентов  $\beta$ , а также других коэффициентов в решении, выражают их через  $\lambda$ . Чтобы использовать эти формулы при заданном  $V$  и неизвестном  $\lambda$ , надо обратить ряд (3.2). Операция обращения этого ряда производится стандартным образом. В результате, опуская для краткости не нужный далее член порядка  $\varepsilon^3$  и используя (4.2), получим, что

$$\lambda(V, \varepsilon) = k_1 - V + \sum_{k+l=0} \frac{a_{21}}{b_{21}} \beta_k \beta_l U_k U_l \quad (4.4)$$

Здесь  $a_{21}, b_{21}, \beta_k$  и  $\beta_l$  вычисляются при  $\lambda = k_1 - V$ .

**5. Определение давления при  $x = 0$ .** При  $x = 0$  из интеграла Бернулли (2.6) и условия (2.3) следует, что

$$p(0, y) = -\frac{u^2(y) + (k_1 u(y) + \mu)^2}{2} + \varepsilon H(\psi)$$

Разложим  $H(\psi)$  в ряд Фурье

$$H(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n e^{in\psi} \quad (5.1)$$

Из (2.7) при  $n \neq 0$  получим

$$H_n = \frac{i}{n} \Omega_n \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (5.1) и ограничиваясь тремя членами разложения экспоненты в ряд Тейлора, получим при  $x = 0$

$$H(\psi) = H_0 + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{i}{n} \varepsilon \Omega_n e^{iny} \left[ 1 + in(\varepsilon \psi_1(0, y) + \varepsilon^2 \psi_2(0, y) + \frac{1}{2} (in\varepsilon \psi_1(0, y))^2 + \dots \right] \quad (5.3)$$

Подставив в эту формулу (4.2) и полученные выше решения для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , получим

$$\begin{aligned} H(y) = & \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{i}{n} \left( \beta_n U_n + \sum_{k+l=n} \beta_{kl} U_k U_l + \sum_{j+k+l=n} \beta_{jkl} U_j U_k U_l \right) \times \\ & \times e^{iny} \left[ 1 + n \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{m} U_m e^{imy} + in \sum_{k+l=0} g_2^{(kl)}(0) \beta_k \beta_l U_k U_l + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} n^2 \left( \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{m} U_m e^{imy} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\beta_n, \beta_{kl}, \beta_{jkl}$  зависят от  $\lambda$ . Чтобы получить решение при заданном  $V$ , а не  $\lambda$ , надо подставить  $\lambda(V, \varepsilon)$  из (4.4) и разложить результат по  $\varepsilon$ . Для достижения точности  $\varepsilon^3$  достаточно первых двух членов в разложении  $\beta_n$  и главных членов в  $\beta_{kl}$  и  $\beta_{jkl}$

$$\beta_n(\lambda) = \beta_n(\lambda_0) - \beta'_n(\lambda_0) k_{22}(\lambda_0) \varepsilon^2, \quad \beta_{kl}(\lambda) = \beta_{kl}(\lambda_0), \quad \beta_{jkl}(\lambda) = \beta_{jkl}(\lambda_0), \quad \lambda_0 = k_1 - V$$

В общем случае выражение для производной  $\beta'_n(\lambda_0)$  громоздко, но  $\beta'_n(\lambda_0) = |n|$  в важном частном случае  $k_1 = 0$ .

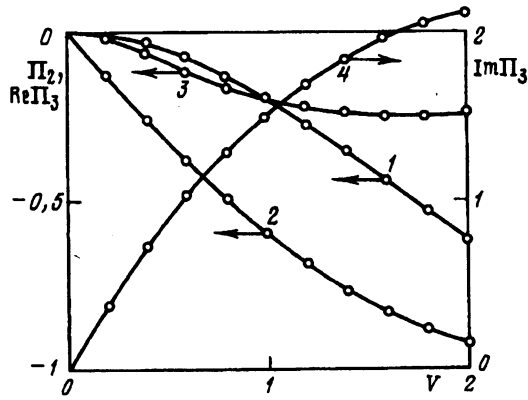
Искомая величина  $p(y)$  находится подстановкой  $H(y)$  в интеграл Бернулли и определяется ее коэффициентами Фурье  $P_n$ . Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат ( $k_1 = 0$ )

$$\begin{aligned} P_n = & \varepsilon \left[ \frac{i}{n} \beta_n - 1 \right] U_n + \varepsilon^2 \sum_{k+l=n} \left[ i \left( \frac{\beta_k}{l} + \frac{\beta_{kl}}{n} \right) - \frac{1}{2} \right] U_k U_l + \\ & + \varepsilon^3 \sum_{j+k+l=n} i \left[ \frac{j}{2kl} \beta_j + \frac{1}{j} \beta_{kl} + \frac{1}{n} \beta_{jkl} + \Delta_{kl} \left( \frac{|j|}{j} + \frac{i}{b_{21}} \beta_j \right) \frac{a_{21}}{b_{21}} \beta_k \beta_l \right] U_j U_k U_l \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta_{kl} = 1$ , если  $k + l = 0$ , и нулю в противном случае. В этой формуле коэффициенты  $\beta$  вычисляются при  $\lambda = -V$ .

Таким образом, в (1.7)

$$\begin{aligned} \pi_{kl} = & i \left( \frac{\beta_k}{l} + \frac{\beta_{kl}}{n} \right) - \frac{1}{2} \\ \pi_{jkl} = & i \left[ \frac{j}{2kl} \beta_j + \frac{1}{j} \beta_{kl} + \frac{1}{n} \beta_{jkl} + \Delta_{kl} \left( \frac{|j|}{j} + \frac{i}{b_{21}} \beta_j \right) \frac{a_{21}}{b_{21}} \beta_k \beta_l \right] \quad (5.4) \end{aligned}$$



Фиг. 3. Коэффициенты разложения давления как функции фазовой скорости возмущения  $V$ : 1 –  $\text{Re}\Pi_2$ , 2 –  $\text{Im}\Pi_2$ , 3 –  $\text{Re}\Pi_3$ , 4 –  $\text{Im}\Pi_3$ ;  $\text{Re}\pi_{11} = -0,5 \text{ Re}\Pi_2$ ;  $\text{Im}\pi_{11} = 0,5 \text{ Im}\Pi_2$ . Сплошные линии – теория, точки – численный расчет

(Переход из движущейся в неподвижную систему отсчета не влияет на  $\pi_{kl}$  и  $\pi_{jkl}$ ). Вновь подчеркнем, для вычислений по этой формуле коэффициенты  $\beta$  следует брать при  $\lambda = -V$ .

**6. Численный расчет.** Расчет в данном случае носит вспомогательный характер, так как полученные явные формулы использовать гораздо легче. Однако сравнение с численными результатами представляет собой почти единственный способ проверить правильность полученных формул.

Подставив ряды Фурье для функции тока и завихренности

$$\psi = y - \gamma x + \varepsilon \sum_n \psi^{(n)}(x) e^{in(y-\gamma x)}$$

$$\omega^* = \varepsilon \sum_n \omega^{(n)}(x) e^{in(y-\gamma x)}, \quad \gamma = k_1 - V$$

в исходные уравнения и граничные условия, получим

$$(\psi^{(n)})'' - 2in\gamma(\psi^{(n)})' - n^2(\gamma^2 + 1)\psi^{(n)} = -\omega^{(n)}$$

$$(\omega^{(n)})' = -\varepsilon i \sum_{k+l=n} [k\psi^{(k)}(\omega^{(l)})' - l(\psi^{(k)})'\omega^{(l)}] = E_n(x) \quad (6.1)$$

$$x = 0: \psi^{(0)} = 0; \quad in\psi^{(n)} = U_n; \quad -(\psi^{(n)})' + in\gamma\psi^{(n)} = k_1 U_n$$

Штрихи обозначают дифференцирование по  $x$ . Расчет проводился путем простых итераций: итерация состоит в определении  $E_n(x)$  по заданным значениям  $\psi^{(n)}$  и  $\omega^{(n)}$  и вычислении новых приближений для  $\psi^{(n)}$  и  $\omega^{(n)}$  из (6.1). Такой алгоритм может быть реализован очень эффективно, потому что при известном  $E_n(x)$  линейная система (6.1) позволяет представить решение с помощью функции Грина  $G_n(x, \xi)$ , вычисляемой в явном виде

$$\psi^{(n)}(x) = \int_0^\infty G_n(x, \xi) E_n(\xi) d\xi + Z_n; \quad Z_0 = 0$$

$$Z_n = U_n \left[ \frac{1}{in} + \frac{\gamma - k_1}{n(i\gamma - s_n)} (e^{n(i\gamma - s_n)x} - 1) \right], \quad n \neq 0; \quad s_n = \frac{|n|}{n}$$

$$G_0 = x^2/2, \quad x < \xi; \quad G_0 = \xi x - \xi^2/2, \quad x > \xi$$

$$G_n = \frac{1}{2n^2(\gamma^2 + 1)} \left[ \left( -2e^{-n(i\gamma + s_n)\xi} + \frac{i\gamma + s_n}{s_n} e^{n[(i\gamma - s_n)x - (i\gamma + s_n)\xi]} \right) - Y_n \right]$$

$$Y_n = \frac{i\gamma - s_n}{s_n} e^{n(i\gamma + s_n)(x - \xi)}, \quad x < \xi; \quad Y_n = -2 + \frac{i\gamma + s_n}{s_n} e^{n(i\gamma - s_n)(x - \xi)}, \quad x \geq \xi$$

При  $x \rightarrow \infty$  решение задачи стремится к потоку с постоянным давлением, в котором скорость всюду имеет одно направление. Это позволяет при  $n \neq 0$  приближенно представить интеграл по части промежутка интегрирования в виде

$$\int_M^\infty G_n E_n d\xi = \frac{i(i\gamma - s_n)(\lambda - \gamma)\omega^{(n)}(M)}{2n^2(\gamma^2 + 1)s_n(i\gamma + s_n)} e^{n(i\gamma + s_n)(x - M)}, \quad \lambda = \gamma - \varepsilon(\psi^{(0)})'$$

Так как  $E_0(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  достаточно быстро, то аналогичная формула для  $n = 0$  не нужна. Интегрирование от 0 до  $M$  проводилось численно. Для вычисления коэффициентов, полученных в аналитической теории, численный расчет проводился для нескольких значений  $\varepsilon$  с последующим численным дифференцированием по  $\varepsilon$ . Хорошее согласие аналитических и численных результатов на фиг. 3 ( $\Pi_2 = \pi_{-12} + \pi_{2-1}$ ,  $\Pi_3 = \pi_{-111} + \pi_{1-11} + \pi_{11-1}$ ) убедительно свидетельствует о правильности как аналитических формул, так и вычислительной программы (как оказалось,  $\text{Re } \pi_{11} = -0,5 \text{Re } \Pi_2$ , а  $\text{Im } \pi_{11} = 0,5 \text{Im } \Pi_2$  и поэтому представленное сравнение относится ко всем коэффициентам). На фиг. 3 приведены лишь суммы коэффициентов, имеющих в (5.4) общие множители  $U_{-1}U_1$  и  $U_{-1}U_1^2$ , так что в численном расчете их вообще нельзя разделить.

При анализе эволюции только двух первых мод ( $\exp \pm iy$  и  $\exp \pm 2iy$ ) достаточно, вероятно, формулы (1.7) и фиг. 3. При необходимости учета большего числа мод нужно использовать формулу (5.4) и формулы (3.10), (3.11), (3.13), (4.1) и (4.3).

**Заключение.** Получены явные асимптотические формулы, выражающие нелинейный отклик деления на возмущение скорости в начальном сечении выходного канала осевого компрессора в предположении малости амплитуды возмущения и малости скорости изменения амплитуды и фазы. Нелинейные слагаемые результата имеют вид всевозможных произведений амплитуд фурье-гармоник возмущения с коэффициентами, зависящими от фазовой скорости возмущения. Вычислены члены до третьего порядка малости по амплитуде возмущения.

Изложенное решение имеет также некоторый методический интерес, так как в нем дважды используется прием временного перехода от прямой задачи к обратной с последующим обращением представляющих решение рядов. Первый раз, при переходе от задания  $U(y)$  к заданию  $\omega(\psi)$ , это делается для упрощения выкладок, а второй раз, от  $V$  к  $\lambda$ , — для устранения сингулярности разложения. Стандартным, но гораздо более сложным подходом в этой ситуации было бы использование метода сращиваемых асимптотических разложений или метода деформируемых координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01291).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Haynes J.M., Hendricks G.J., Epstein A.H. Active stabilization of rotating stall in a three-stage axial compressor // Trans. ASME, J. Turbomachinery, 1994. V. 116. № 2. P. 226–239.
2. Longley J.P. A review of nonsteady flow models for compressor stability // Trans. ASME, J. Turbomachinery, 1994. V. 116. № 2. P. 202–215.

3. Степанов Г.Ю., Чернышенко С.И. Малые гармонические возмущения потока маловязкой жидкости через плоскую решетку (линейная теория вращающегося срыва) // Динамика сплошных сред со свободными границами. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1996. С. 222–240.
4. Longley J.P., Hynes T.P. Stability of flow through multistage axial compressors // Trans. ASME, J. Turbomachinery. 1990. V. 112. P. 126–131.
5. McCaughan F.E. When are nonlinearities important at stall inception? // ASME Paper. GT-338. 1994. № 94. 11 p.
6. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44. № 8. С. 339–342.

Москва

Поступила в редакцию  
17.I.1997