МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1998

УДК 532.516

© 1998 г. А.Г. ЯРМИЦКИЙ

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНЫХ ВИНТОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Исследуется неограниченное течение вязкой несжимаемой жидкости, винтовое, по Жуковскому, когда вихревые линии абсолютного движения совпадают с линиями тока относительного движения. Построен векторный потенциал и обобщено понятие функции тока на трехмерные однородно-винтовые течения, рассматриваемые в произвольной ортогональной цилиндрической системе координат.

Показано, что во вращающейся жидкости могут распространяться как осесимметричные, так и асимметричные волны, амплитуда которых с течением времени затухает по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания, пропорциональным квадрату угловой скорости вращения жидкости, кинематической вязкости и обратно пропорциональным квадрату фазовой скорости.

Обзор точных решений уравнений Навье – Стокса, представляющих винтовые течения, приведен в работах [1, 2], где даны некоторые новые точные решения этого класса. Кроме того, в указанных работах приводится также обобщение течений Громеки – Бельтрами на случай поля скоростей, удовлетворяющего условию rot $(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0$.

Исследуемое ниже решение уравнения Навье – Стокса принадлежит к классу винтовых течений жидкости, экспоненциально зависящих от времени. В [3] приоритетными в этой области считаются работы Кальдонаццо и Тркала. В действительности же соответствующий результат получен намного раньше В.А. Стекловым. Значительно позднее содержащиеся в этих работах выводы были повторены Н.И. Алексеевым (см. историческую справку в [4]). В [5–7] изучались вихревые образования с однородно-винтовым течением внутри.

В отличие от этих течений, винтовых в смысле Громеки – Бельтрами, здесь рассматривается неограниченное течение несжимаемой вязкой жидкости, винтовое по Жуковскому, когда вектор-вихрь абсолютного движения коллинеарен скорости относительного движения.

1. Течения вязкой несжимаемой жидкости в системе отсчета, совершающей равномерное поступательное и вращательное движения, описываются уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega}) \times \mathbf{V} = -\nabla E - \nu\, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{V} \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0, \quad E = p/\rho + 1/2\,|\mathbf{V}|^2 + \Pi, \quad \Pi = \Pi_1 + 1/2(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})^2$$

Здесь $\mathbf{V}$ – относительная скорость жидкости, ν – кинематическая вязкость, E – энергия единицы массы жидкости, p – давление, ρ – плотность, Π_1 – потенциал массовых сил, $\mathbf{\Omega}$ = const – угловая скорость системы отсчета.

В случае однородного винтового течения, по Жуковскому, когда вихревые линии абсолютного движения жидкости совпадают с линиями тока относительного движения,

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = k\mathbf{V} - 2\mathbf{\Omega} \quad (k \in R) \tag{1.2}$$

в уравнении (1.1) нелинейные члены исчезают

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + k^2 \nu \mathbf{V} = 2k\nu \mathbf{\Omega} - \nabla E \tag{1.3}$$

При этом условие несжимаемости выполнено. Применив операцию rot к обеим частям (1.3), с учетом (1.2) получим

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + k^2 \nu \mathbf{V} = 2k\nu \mathbf{\Omega} \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что E = const, т.е., как и в случае винтового течения идеальной жидкости, энергия единицы массы жидкости во всем потоке остается неизменной.

Положим

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} \exp(-k^2 \nu t) + 2k^{-1} \mathbf{\Omega} \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.3) удовлетворяется автоматически и в силу (1.2)

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = k\mathbf{v} \tag{1.6}$$

Таким образом, уравнение (1.1) в предположении (1.2) редуцировано к уравнению (1.6) для скорости винтового (в смысле Громеки – Бельтрами) течения невязкой жидкости. В случае $\mathbf{\Omega} = 0$ (течение Громеки – Бельтрами) этот вывод был сделан В.А. Стекловым еще в 1896 г. [4].

Воспользовавшись векторным тождеством $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v}$, преобразуем уравнение (1.6) к виду

$$(\Delta + k^2)\mathbf{v} = 0 \tag{1.7}$$

Введем обобщенный векторный потенциал $\mathbf{\Psi}$

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{\Psi} + k^{-1} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{\Psi} \tag{1.8}$$

Тогда в силу (1.7) $\mathbf{\Psi}$ также удовлетворяет этому уравнению, а для $\mathbf{v}$ имеем выражение

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{\Psi} + k^{-1}(\nabla(\operatorname{div} \mathbf{\Psi}) + k^2 \mathbf{\Psi}) \tag{1.9}$$

Перейдем к специально выбранной системе ортогональных криволинейных координат q_1, q_2, q_3, такой, что $\mathbf{\Psi} = (0, 0, \Psi/H_3)$ и коэффициенты Ламе H_1 и H_2 зависят только от q_1 и q_2, а H_3 = const. При этом координатные поверхности q_3 = const представляют собой плоскости, а координатные поверхности q_i = const (i = 1; 2) – цилиндрические поверхности с образующими (координатными линиями q_3), перпендикулярными плоскостям q_3 = const. Обозначим $q_3 = z$.

В силу (1.9) компоненты скорости течения имеют вид

$$\upsilon_1 = \frac{1}{k}\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial q_1} + \frac{\partial \Psi}{H_2 \partial q_2}, \quad \upsilon_2 = \frac{1}{k}\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial q_2} - \frac{\partial \Psi}{H_1 \partial q_1}, \quad \upsilon_z = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi\right) \tag{1.10}$$

Функцию Ψ назовем обобщенной функцией тока. В случае однородно-винтового циркуляционного течения [4] $\partial\Psi/\partial z = 0$ и она совпадает с обычной функцией тока для невязкой жидкости, а в случае осесимметричного течения, полагая $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, получим $\psi = -k^{-1} r \partial\Psi/\partial r$, где Ψ – функция тока Стокса. В круговых цилиндрических координатах Ψ пропорциональна обобщенному потенциалу [8] для невязкой жидкости.

2. Положив $\Psi = \psi(q_1, q_2)e^{i\alpha z}$ ($\alpha \in R$), получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\alpha^2 \Psi, \quad \upsilon_z = \frac{1}{k}(k^2 - \alpha^2)\Psi$$

Тогда уравнение (1.7) сводится к уравнению для v_z

$$\Delta_{q_1,q_2} v_z + \delta^2 v_z = 0 \quad (\delta^2 = k^2 - \alpha^2) \tag{2.1}$$

где Δ_{q_1,q_2} – двумерный оператор Лапласа, а поперечные компоненты v_1, v_2 при $\delta \neq 0$ могут быть найдены по формулам (1.10), в которых $\Psi = k\delta^{-2} v_z$ и $\partial v_z / \partial z = i\alpha v_z$. При $\alpha = 0$ выражения v_1, v_2 совпадают с соответствующими в [4].

Покажем, что в равномерно вращающейся неограниченной вязкой жидкости возникают спиральные волны с затухающей амплитудой. Течение рассмотрим в цилиндрической системе координат (r, θ, z), жестко связанной с волной, т.е. вращающейся вместе с жидкостью с угловой скоростью Ω = const и перемещающейся с фазовой скоростью W распространения волны вдоль оси вращения z. Тогда, согласно (1.5), положим $k = -2\Omega/W$.

Разделяя переменные в (2.1), найдем решение, удовлетворяющее условию конечности скорости на оси вращения

$$v_z = C J_n(\delta r) \exp i(\alpha z \pm n\theta) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

$$\delta = \sqrt{1 - \gamma_\omega^2}\,\frac{\alpha}{\gamma_\omega}, \quad \gamma_\omega = \frac{\omega}{2\Omega} < 1, \quad \omega = \alpha W$$

Здесь J_n – бесселева функция первого рода n-го порядка, α – волновое число, ω – частота волны, C – произвольная постоянная.

В системе координат, только лишь вращающейся вместе с жидкостью как единое целое, получаем прогрессивную волну, перемещающуюся в положительном направлении оси вращения z (вектора угловой скорости Ω). Согласно (1.5) и (2.2)

$$V_z = C J_n(\delta r) \exp(-k^2 \nu t + i(\alpha z \pm n\theta - \omega t)) \tag{2.3}$$

В поле течения появляются перемещающиеся вместе с волной вихревые нити, на которых осевая и радиальная компоненты скорости жидкости отсутствуют ($\operatorname{Re} V_z = \operatorname{Re} V_r - 0$). Эти вихревые нити оказывают существенное влияние на картину течения (см. [9, рис. 7.6.4], соответствующий осесимметричному течению ($n = 0$)). Их уравнения:

$$r = j_{ns} / \delta, \quad z = \alpha^{-1}(\omega t \mp n\theta + m\pi), \quad (m \in Z)$$

где j_{ns} – s-й нуль бесселевой функции $J_n(x)$.

В произвольный фиксированный момент времени t и заданном n расстояние между каждыми двумя соседними вихревыми нитями вдоль оси z составляет π/α.

Задав расстояние $r = R$ до ближайшей к оси вращения вихревой нити, получим дисперсионное соотношение

$$\frac{1}{\gamma_\lambda^{(n)}} = \alpha_n R = \gamma_\alpha^{(n)} = j_{n1} \frac{\gamma_\omega}{\sqrt{1 - \gamma_\omega^2}} \tag{2.4}$$

в котором $\gamma_\lambda^{(n)}$ – безразмерное волновое число, соответствующее j_{n1}.

Из (2.4), в частности, следует, что $\gamma_\lambda^{(n)} = (j_{01} / j_{n1})\gamma_\lambda^{(0)}$, т.е. при фиксированном угловом волновом числе n безразмерные длины асимметричных волн пропорциональны безразмерной длине осесимметричной волны и убывают с ростом n. Зависимость между безразмерными частотами и безразмерными длинами волн для значений $n = 0, 1, \ldots, 5$ представлена в таблице. В интервале $0 < \gamma_\omega < 1$ при любом n безразмерные длины волн γ_λ монотонно убывают с ростом n. При фиксированном γ_ω

γ_ω	$n = 0$	1	2	3	4	5
0,1	4,137	2,597	1,937	1,560	1,311	1,134
0,2	2,037	1,278	0,954	0,768	0,646	0,559
0,3	1,322	0,830	0,619	0,498	0,419	0,363
0,4	0,953	0,598	0,446	0,359	0,302	0,261
0,5	0,720	0,452	0,337	0,271	0,228	0,197
0,6	0,544	0,348	0,260	0,209	0,176	0,152
0,7	0,424	0,266	0,199	0,160	0,134	0,116
0,8	0,312	0,196	0,146	0,118	0,099	0,086
0,9	0,201	0,126	0,094	0,076	0,064	0,055

наибольшего значения они достигают в осесимметричной волне. С увеличением n дисперсионные кривые сближаются, а при значениях γ_ω, близких к единице, почти сливаются.

Соотношение (2.4) позволяет по известной длине волны при заданных γ_ω и n определить расстояние ближайшей к оси вращения вихревой нити, перемещающейся с волной.

Вязкость жидкости оказывает влияние только лишь на амплитуду волны: с течением времени амплитуда экспоненциально затухает с коэффициентом затухания, пропорциональным квадрату угловой скорости жидкости, кинематической вязкости и обратно пропорциональным квадрату фазовой скорости.

Вдали от оси вращения подобно осесимметричному случаю в невязкой жидкости волна исчезает (как $r^{-1/2}$) и жидкость вращается как твердое тело.

Заключение. Рассмотрены винтовые течения вязкой жидкости, вращающейся как твердое тело. Построен векторный потенциал и показано, что в системе ортогональных цилиндрических координат можно ввести функцию, обобщающую понятие функции тока на трехмерные однородно-винтовые течения. В случае циркуляционного потока идеальной жидкости [4] эта функция совпадает с обычной функцией тока; установлена ее связь и с функцией тока осесимметричного течения невязкой жидкости. В круговых цилиндрических координатах обобщенная функция тока пропорциональна обобщенному потенциалу [8]. В качестве примера исследовано распространение волн (в общем случае неосесимметричных) в неограниченных вращающихся потоках вязкой жидкости.

Работа частично поддержана грантом № APU 051115 Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук.

Автор признателен рецензенту за библиографическую помощь и научному редактору А.А. Бармину за советы по изменению композиции статьи и скрупулезную работу по совершенствованию стиля изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wang C.Y.* Exact solutions of the Navier–Stores equations – the generalized Beltrami flows, review and extension // Acta mech. 1990. V. 81. № 1–2. P. 69–74.
2. *Wang C.Y.* Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 159–177.
3. *Неменьи П.Ф.* Современное развитие обратных и полуобратных методов в механике сплошной среды // Проблемы механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 234–257.

4. *Васильев О.Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков М., Л.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
5. *Ярмицкий А.Г.* Об одном пространственном аналоге вихревого столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла) // ПМТФ. 1974. № 5. С. 137–141.
6. *Ярмицкий А.Г.* Об одном классе осесимметричных неустановившихся течений вязкой несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1978. № 2. С. 59–66.
7. *Ярмицкий А.Г.* Смерчеподобный вихрь Чаплыгина // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 52–59.
8. *Салтанов Н.В.* Обобщенный потенциал в теории однородных винтовых потоков несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 6. С. 1325–1327.
9. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Мариуполь

Поступила в редакцию
31.VII.1995