

УДК 532.68.013.4:537.21

© 1998 г. А.И. ГРИГОРЬЕВ, А.Н. ЖАРОВ, В.А. КОРОМЫСЛОВ, С.О. ШИРЯЕВА

КАПИЛЛЯРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЗЫРЯ В ВЯЗКОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

Выводится дисперсионное уравнение для капиллярных движений в вязкой жидкости, окружающей сферический пузырь, несущий поверхностный заряд, способный привести к неустойчивости границы раздела. Находятся критические условия такой неустойчивости. Решение задачи проводится в рамках метода скаляризации в сферической системе координат.

Проблема исследования эволюции пузырей в изолирующей диэлектрической жидкости в сильном (в предпробойном) электрическом поле представляет значительный интерес в связи с развитием теории и практики электрического пробоя жидкостей, разработанной пока лишь на феноменологическом уровне строгости (см., например, [1–5] и указанную там литературу). Это явление представляет интерес и в связи с различными техническими и технологическими приложениями, связанными с возможностью электродиспергирования пузыря, с образованием большого количества более мелких, что может иметь важную роль в различных технологических явлениях [6–8].

1. Рассмотрим систему, состоящую из двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 и кинетическими вязкостями ν_1 и ν_2 . Из-за действия на границе раздела сил поверхностного натяжения, коэффициент которого обозначим через σ , внутренняя жидкость, к которой отнесем индекс 1, примет форму сферического пузыря с радиусом R . Внешнюю жидкость, идентифицируемую индексом 2, будем считать безграничной. На поверхности раздела двух жидкостей находится заряд Q . Пусть жидкость внешней среды является идеальным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Найдем спектр нормальных колебаний границы раздела двух сред.

В сферической системе координат r, θ, φ с началом в центре невозмущенного пузыря уравнение возмущенной поверхности имеет вид $r = R + \xi(\theta, \varphi, t)$. Система уравнений гидродинамики, линеаризованная в окрестности равновесного сферического состояния, состоит из уравнения Навье – Стокса и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_\alpha} \nabla p_\alpha + \nu_\alpha \Delta \mathbf{u}_\alpha, \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = 0, \alpha = 1; 2 \quad (1.1)$$

граничных условий, выставляемых при $r = R$, и требования непрерывности касательных и нормальных компонент скорости и напряжений

$$u_{1\theta} = u_{2\theta}, u_{1\varphi} = u_{2\varphi}, u_{1r} = u_{2r} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\rho_1 \nu_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_{1r}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{1\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{1\theta} \right] = \rho_2 \nu_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_{2r}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{2\theta} \right] \quad (1.3)$$

$$\rho_1 v_1 \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{1r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{1\varphi} \right] = \rho_2 v_2 \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{2r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{2\varphi} \right] \quad (1.4)$$

$$-p_1 + 2\rho_1 v_1 \frac{\partial u_{1r}}{\partial r} + p_\sigma - p_E = -p_2 + 2\rho_2 v_2 \frac{\partial u_{2r}}{\partial r} \quad (1.5)$$

$$p_0(\xi) = -\frac{\sigma}{R^2} (2 + \Delta_\Omega) \xi \quad (1.6)$$

$$p_E = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} - \frac{Q^2}{2\pi\epsilon} \xi + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) P_l(\mu) \int_{-1}^1 \xi P_l(\mu) d\mu \quad (1.7)$$

Кроме того, требуются постоянство объемов обеих жидкостей и неподвижность центра масс системы относительно выбранной системы координат

$$\int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) \mathbf{e}_r d\Omega = 0 \quad (1.8)$$

Здесь ξ , \mathbf{u} , p обозначены возмущения формы границы раздела, поля скоростей и поля давлений соответственно, p_σ – возмущение давления сил поверхностного натяжения, p_E – давление электрического поля [9], Δ_Ω – угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат, $P_l(\mu)$ – собственные функции оператора Δ_Ω , $d\Omega$ – элемент телесного угла. Условия (1.8) ограничивают снизу спектр капиллярных колебаний системы [9].

Введем безразмерные переменные, в которых $R = 1$ и $\sigma = 1$, а характерный масштаб измерения плотности выберем позже в зависимости от того, ρ_1 или ρ_2 будет браться в качестве аргумента исследуемых зависимостей инкремента неустойчивости, частоты и декремента капиллярных колебаний границы раздела сред.

2. Решение задачи (1.1)–(1.8) методом скаляризации, подробно изложенным в [10] и использованном в [10–12], позволяет найти дисперсионное уравнение для капиллярно-полоидальных движений жидкости в рассматриваемой системе в виде $\det \|a_{ij}\| = 0$, где $\|a_{ij}\|$ – матрица пятого порядка

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{13} = x_1 \frac{i_{l+1}(x_1)}{i_l(x_1)} + (l-1)$$

$$a_{14} = x_2 \frac{k_{l-1}(x_1)}{k_l(x_1)} + l, \quad a_{15} = 0, \quad a_{21} = 2(l-1)\rho_1 v_1$$

$$a_{22} = 2(l+2)\rho_2 v_2, \quad a_{23} = \rho_1 v_1 \left[-2x_1 \frac{i_{l+1}(x_1)}{i_l(x_1)} + x_1^2 + 2(l-1)(l+1) \right]$$

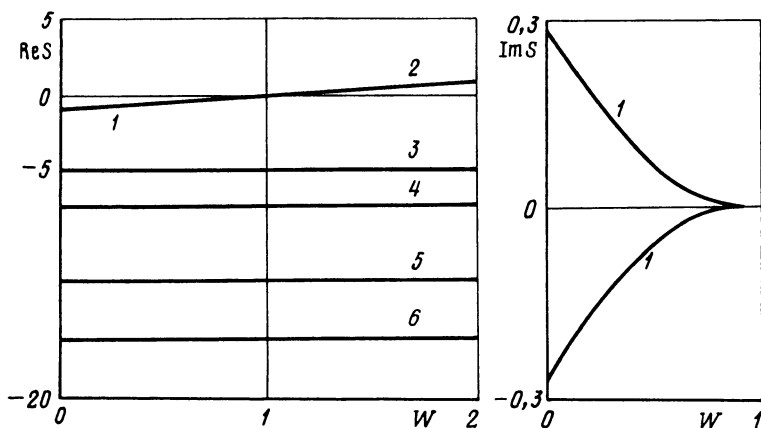
$$a_{24} = -\rho_2 v_2 \left[2x_2 \frac{k_{l-1}(x_1)}{k_l(x_1)} + x_2^2 + 2l(l+2) \right], \quad a_{25} = 0, \quad a_{31} = l$$

$$a_{32} = (l+1), \quad a_{33} = l(l+1), \quad a_{34} = -l(l+1), \quad a_{35} = 0, \quad a_{41} = l$$

$$a_{42} = 0, \quad a_{43} = l(l+1), \quad a_{44} = 0, \quad a_{45} = -S, \quad a_{51} = \rho_1 S + 2l(l-1)\rho_1 v_1$$

$$a_{52} = -\rho_2 S - 2(l+1)(l+2)\rho_2 v_2, \quad a_{53} = \rho_1 v_1 2l(l+1) \left[x_1 \frac{i_{l+1}(x_1)}{i_l(x_1)} + (l-1) \right]$$

$$a_{54} = \rho_2 v_2 2l(l+1) \left[x_2 \frac{k_{l-1}(x_1)}{k_l(x_1)} + (l+2) \right], \quad a_{55} = (l-1)(l+2) - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} (l-1)$$



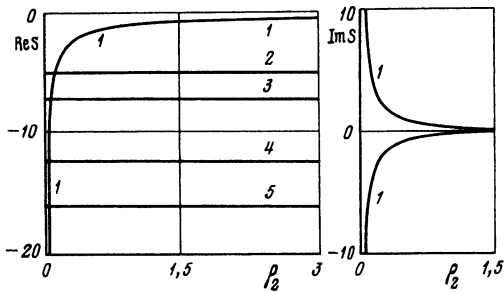
Фиг. 1. Зависимости вещественной $Re S$ и мнимой $Im S$ компонент частоты от параметра Рэлея W при $l = 2$, $\nu_1 = 0,15$, $\nu_2 = 1$, $\rho_1 = 0,001$, $\rho_2 = 1$. Ветви 1, 2 соответствуют капиллярным, ветви 3, 4, 5, 6 – аperiodически затухающим вихревым полоидальным движениям

Здесь S – комплексная частота, $i_l(x)$ и $k_l(x)$ – сферические цилиндрические функции первого и третьего родов соответственно, $x_j \equiv (S/\nu_j)^{1/2}$.

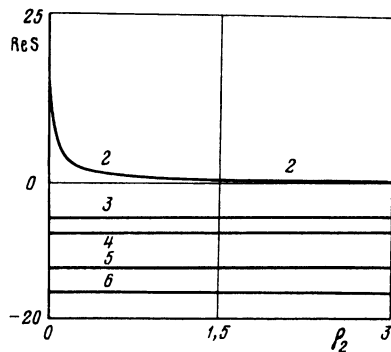
Численно получены зависимости декремента и инкремента $Re S = Re S(W)$ и частот затухающих капиллярных колебаний пузыря в жидкости $Im S = Im S(W)$ от величины параметра Рэлея $W \equiv Q^2/(16\pi\epsilon\sigma R^3)$. На фиг. 1 представлен случай, рассчитанный при значениях безразмерной вязкости и плотности газа, наполняющего пузырь, $\nu_1 = 0,15$, $\rho_1 = 0,001$ и окружающей жидкости $\nu_2 = 1$, $\rho_2 = 1$. Видно, что ветви дисперсионного уравнения с номерами, большими 3, определяющие, согласно [10, 11], декременты затухания вихревых полоидальных движений, не зависят от W . Из сравнения с данными [11], где исследовались капиллярные колебания изолированной заряженной вязкой капли в вакууме, следует, что величина инкремента неустойчивости заряженной вязкой поверхности пузыря существенно меньше, чем для изолированной капли при прочих равных условиях.

Зависимости $Re S(\rho_2)$ и $Im S(\rho_2)$ представлены для капиллярных движений пузыря и жидкости в его окрестности в докритическом ($W = 0$) (фиг. 2) и в закритическом ($W = 2$) (фиг. 3) режимах. Из фиг. 1 видно, что неустойчивость проявляется при $W = 1$. Согласно фиг. 2, инкремент неустойчивости заряженной границы раздела газ – жидкость, а также частота и декремент затухания капиллярных колебаний пузыря быстро убывают с увеличением ρ_2 . Декременты же затухающих вихревых полоидальных движений при этом остаются неизменными. Численные расчеты также показывают, что зависимости $Re S(\rho_1)$ и $Im S(\rho_1)$ качественно аналогичны зависимостям, приведенным на фиг. 2, но существенно более слабы.

Кроме сказанного из проведенных численных расчетов следует, что зависимости $Re S(\nu_1)$ и $Im S(\nu_1)$ аналогичны полученным ранее для изолированной капли [11]: инкременты и декременты капиллярных движений жидкости весьма слабо убывают по абсолютной величине с увеличением ν_1 при $\nu_1 < 1$. Декременты вихревых полоидальных движений с увеличением ν_1 быстро растут по линейному закону. Численный анализ зависимостей $Re S(\nu_2)$ и $Im S(\nu_2)$ показал, что инкременты неустойчивости и частоты капиллярных колебаний заряженной поверхности пузыря с ростом ν_2 быстро уменьшаются, декременты же затухания капиллярных движений жидкости при этом изменяются немонотонно: в начале, с ростом ν_2 они быстро увеличиваются, а затем, когда частоты соответствующих капиллярных движений становятся весьма малыми, начи-



Фиг. 2. Зависимости вещественной $\text{Re } S(\rho_2)$ и мнимой $\text{Im } S(\rho_2)$ компонент для капиллярных движений пузыря и жидкости в докритическом ($W = 0$) для реализации неустойчивости режиме при $l = 2$, $\rho_1 = 0,001$, $\nu_2 = 1$, $\nu_1 = 0,15$



Фиг. 3. То же, что на фиг. 2, для закритического режима ($W = 2$)

нают убывать. Декременты затухания вихревых полоидальных движений с ростом ν_2 увеличиваются.

Заключение. Величины частот капиллярных колебаний, декрементов затухания и инкрементов неустойчивости газовых пузырей как зародышей электрического пробоя жидкого диэлектрика сильно зависят от плотностей и вязкостей диэлектрической жидкости, быстро снижаясь с их ростом, и весьма слабо зависят от вязкости и плотности газа, заполняющего пузырь. Влияние величины закритичности поверхностного электрического заряда пузыря на величину инкремента его неустойчивости невелико. Декременты затухания вихревых полоидальных движений не зависят от величины поверхностного заряда на пузыре, от плотностей внешней и внутренней сред, но увеличиваются с ростом вязкостей обеих сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пылаева И.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В. Численный анализ динамики сферического пузырька в жидком диэлектрике при наличии электрического поля // Теплофизика высоких температур. 1992. Т. 30. № 2. С. 367–371.
2. Глазов В.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В. Сферический пузырек в жидком диэлектрике при наличии электрического поля // Теплофизика высоких температур. 1991. Т. 29. № 6. С. 1095–1102.
3. Иевлев И.И., Исерс А.Б. Фиксация пузырей и капель заданной формы в жидком диэлектрике при помощи электрического поля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 101–105.
4. Балыгин И.Е. Электрическая прочность жидких диэлектриков. М.; Л.: Энергия, 1964. 227 с.
5. Cheng K.J., Chaddock J.B. Deformation and stability of drops and bubbles in electric field // Phys. Lett. 1984. V. 106a. № 1, 2. P. 51–53.
6. Garton C.G., Krasucki Z. Bubbles in insulating liquids: stability in an electric field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1964. V. 280. № 1381. P. 211–226.
7. Masyk W.A. The deformation of soap bubbles in electric fields // Proc. Camb. Phil. Soc. 1930. V. 26. № 3. P. 421–428.
8. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
10. Ширяева С.О., Лазарянец А.Э. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач: Препринт № 27. Ярославль: ИМРАН, 1994. 128 с.

11. *Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И.* Волновые и вихревые движения жидкости в сильно заряженной капле // Журн. технической физики. 1996. Т. 66. № 7. С. 1–8.
12. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Капиллярные колебания заряженной капли вязкой жидкости с конечной проводимостью // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 107–118.

Ярославль

Поступила в редакцию
17.III.1997