

УДК 533.6.011.5

© 1998 г. М.И. ФОЛЛЭ

ТОНКОЕ ДОЛООБРАЗНОЕ ТЕЛО В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрено волновое сопротивление тонкого линейчатого долотообразного тела при сверхзвуковом обтекании. Исследована зависимость сопротивления от геометрических параметров тела. Проведено сравнение с осесимметричными телами и оживалом Кармана.

Изучение аэродинамических свойств линейчатых тел пространственной конфигурации началось около 20 лет назад [1]. Форма линейчатого тела была первоначально предложена Г.Г. Черным: n -лучевая звезда в начальной плоскости плавно переходила в круговое миделево сечение. Основная идея – найти среди неосесимметричных тел такие аэродинамические формы, которые могли бы конкурировать с обычными осесимметричными головными частями (со степенным продольным профилем) по сопротивлению. Предполагалось (и подтвердилось в дальнейшем), что линейчатые звездообразные головные части в значительной степени сохраняют выгодные аэродинамические свойства остроконечных звездообразных тел. С другой стороны, необходимость учета сопротивления трения при расчете полного сопротивления (особенно для удлиненных тел и небольших чисел Маха) ограничивала число лучей небольшими значениями $n = 2, 3, 4$. Да, в отличие от остроконечных звездообразных тел для линейчатых тел возможно значение $n = 2$, т.е. долотообразное тело. Хотя прямое сравнение линейчатых звездообразных тел, которые задумывались именно как головные части с обычными остроконечными звездообразными телами (они не могут быть головными частями), затруднено, методы аналитического исследования всех этих тел были общими. В большей части теоретических работ при расчете волнового сопротивления для больших сверхзвуковых скоростей применялась формула Ньютона (или ее модификации). В другом предельном случае удлиненных тел и небольших чисел Маха M_∞ (параметр $BR \ll 1$, $B^2 = M_\infty^2 - 1$, R – отношение радиуса миделевого сечения к длине тела) существовала разработанная Уордом, Лайтхиллом, Карманом, Хейзом и др. теория. Однако основные результаты этой теории годились только для остроконечных тел и лишь теоремы обращения потока, доказанные Хейзом, показывали направление поиска для расчета аэродинамических характеристик линейчатых тел.

1. Удлиненное тело [2, 3] удовлетворяет следующим условиям: 1) отношение поперечного радиуса к длине тела (t) мало; 2) угол между любой касательной плоскостью и направлением набегающего потока равен $O(t)$; 3) порядок производной величины этого угла в направлении потока также равен $O(t)$.

Тогда волновое сопротивление остроконечного тела равно

$$\frac{2X}{\rho U^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \ln \frac{1}{|x-s|} S''(x) S''(s) ds dx - \int_C \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} d\tau - \frac{S'(1)}{2\pi} \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} S''(x) dx + O(t^6 \ln^2 t) \quad (1.1)$$

Здесь X – волновое сопротивление, ρ, U – плотность и скорость набегающего потока, $S(x)$ – площадь поперечного сечения, C – контур торцевого сечения, $\Phi_0 = \Phi_0(x, y, z)$ – приближение трехмерного потенциала, ν и τ – нормаль и касательная к контуру C . Предполагается, что острый носок тела совпадает с началом координат, ось x направлена по набегающему потоку, при $x = 1$ (торец) берется контурный интеграл, все линейные параметры нормированы на длину тела. Формула (1.1) обобщила известное раньше выражение для волнового сопротивления тела вращения

$$\begin{aligned} \frac{2X}{\rho U^2} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \ln \frac{1}{|x-s|} S''(x)S''(s)dsdx - \\ & - \frac{S'(1)}{\pi} \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} S''(x)dx + \frac{[S'(1)]^2}{2\pi} \ln \frac{2}{BR(1)} + O(t^6 \ln^2 t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $R(1)$ – радиус сечения при $x = 1$. Это уже очень простая формула и не нужно находить $\Phi_0(x, y, z)$, т.е. решать краевую задачу, как в случае (1.1). Однако более подробное исследование отброшенных слагаемых в разложении потенциала для тела вращения привело к неожиданному результату, полученному в [4]. Если наклон меридионального сечения тела вращения не непрерывен, например контур заменен ломаной (следовательно, в точках излома контура нарушено требование 3), то формулы (1.1), (1.2) становятся неверными, а сила сопротивления по этим формулам становится бесконечной даже в том случае, если эти точки разрыва сглажены малыми криволинейными участками. В [4] удалось решить соответствующую математическую задачу и в формуле (1.2) появились дополнительные члены, а выражение для сопротивления стало конечным. Но в [4] устранены особенности для тел вращения (1.2), а не в более сложном пространственном случае (1.1). Поэтому и весь трудный путь, проделанный Лайтхиллом, при исследовании линейчатых тел не годился.

Для удлиненного линейчатого тела оказалась верна теорема обращения течения [5]. В дополнение к условиям 1) – 3) для теоремы потребовалось отсутствие у течения дозвуковых зон. Фактически при этом обтекалось следующее тело: бесконечный цилиндр – перевернутое линейчатое тело, т.е. круговое сечение линейчатого тела непосредственно примыкало к бесконечному цилиндру. Следует отметить, что такая несколько необычная конструкция по-прежнему не устраняла особенность при $x = 0$, $S'(0) \neq 0$, но теперь это круговое миделево сечение. Эта особенность лайтхилловского типа – тело в малой окрестности кругового сечения было практически осесимметричным и члены в формуле сопротивления от этой особенности можно было посчитать по [4]. Затем потребовалось повторить рассуждения [2, 3] – метод контрольного объема. В результате удалось получить формулу [6]

$$\frac{2X}{\rho U^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 I_i - \int_C \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\tau \quad (1.3)$$

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \ln \frac{1}{|x-s|} S''(x)S''(s)dsdx, \quad I_2 = -S'(1) \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} S''(x)dx$$

$$I_3 = 2S'(0) \int_0^1 S''(x) \ln \frac{1}{x} dx, \quad I_4 = [S'(0)]^2 \ln \frac{2}{BR}$$

Здесь контур C в случае линейчатых тел – n -лучевая звезда. Ранее [7] предполагалось, что длины лучей звезды равны радиусу миделевого сечения R . Здесь длины лучей будут определяться параметром λ (длина луча в сечении $x = 1$ равна λR). В расчетах параметр λ в пределах $0 \leq \lambda \leq 1,4$, контурный интеграл берется при $x = 1$.

Плоскость $x = 0$ соответствует круговому миделевому сечению, плоскость $x = 1$ – n -лучевой звезде, ось y направлена параллельно лучу звезды, ось z – перпендикулярно

ей. Введем в плоскости $x = 0$ полярный угол α и рассмотрим один сектор звезды. Поверхность линейчатого тела можно описать параметрически, если соединить точки на окружности $(0, R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ с точками на луче звезды $(1, Ru(\alpha), 0)$. При $-\pi/n \leq \alpha \leq \pi/n$ получаем параметрическую запись

$$y = R[xu(\alpha) + (1-x)\cos \alpha], \quad z = R(1-x)\sin \alpha \quad (1.4)$$

Важнейшая в дальнейшем функция $u(\alpha)$ определяет, какая именно точка луча $Ru(\alpha)$, $0 \leq u(\alpha) \leq \lambda$ соединена с точкой на окружности радиуса R с полярным углом α ; $u(\alpha)$ – монотонно убывающая функция $u(0) = \lambda$, $u(\pi/n) = 0$. В остальном эта функция пока произвольна. Из геометрических соображений легко получить [7]

$$S'(x) = 2nR^2 \int_0^{(1-x)\sin \pi/n} \left[xu(\alpha) - (1-x)\cos \alpha - z' \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right] dz'$$

$$S(x) = R^2(1-x)[2nF(u)x + \pi(1-x)], \quad F(u) = \int_0^{\pi/n} u(\alpha) \cos \alpha d\alpha \quad (1.5)$$

$$S'(0) = 2R^2(nF - \pi), \quad S'(1) = -2R^2nF$$

Значения $S'(0)$ и $S'(1)$ отличны от нуля. После подстановки в формулы (1.3) выражения (1.5) для $S(x)$ получим [7]

$$I_1 = 6R^4(2nF - \pi)^2, \quad I_2 = -4R^4nF(2nF - \pi) \quad (1.6)$$

$$I_3 = -8R^4(nF - \pi)(2nF - \pi), \quad I_4 = 4R^4(nF - \pi)^2 \ln \frac{2}{BR}$$

2. Для расчета волнового сопротивления по формуле (1.3), так же как и по формуле (1.1), необходимо решать краевую задачу. Это не противоречит "закону плоских сечений", согласно которому достаточно для подсчета сопротивления знать функцию $S(x)$. В обеих формулах контурный интеграл появляется именно в тех плоскостях, где $S'(x)$ теряет непрерывность. Условие обтекания линейчатого тела подробно исследовано в [7], при этом оказалось удобным ввести $\psi_0(x, y, z)$, связанную с потенциалом $\varphi_0(x, y, z)$ в любой плоскости $x = \text{const}$ условиями Коши – Римана

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \quad (2.1)$$

Тогда на контуре C для $\psi_0(x, y, z) = \psi_0(\alpha)$ в плоскости $x = 1$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} = R^2 u'(\alpha) \sin \alpha, \quad \psi_0(\alpha) = R^2 \int_1^u \sin \alpha(u) du \quad (2.2)$$

Формулы (2.2) справедливы при $0 \leq \alpha \leq \pi/n$, для других значений α используются доказанная в [7] четность и периодичность функции $\psi'_0(\alpha)$ по углу α на контуре C n -лучевой звезды (периодичность именно производной $\psi'_0(\alpha)$, что не означает периодичность $\psi_0(\alpha)$, напротив, четность $\psi'_0(\alpha)$ вполне означает нечетность $\psi_0(\alpha)$).

Для решения краевой задачи – отображения внешности n -лучевой звезд с лучами длиной $R\lambda$ в поперечной плоскости $\omega = y + iz$ на внешность единичного круга в фиктивной плоскости ζ – используется формула

$$\frac{\omega}{R} = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{4}} \frac{(\zeta^n + 1)^{2/n}}{\zeta} \quad (2.3)$$

Для случая $n = 2$ (долотообразное тело) это просто функция Жуковского

$$\frac{\omega}{R} = \frac{\lambda}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (2.4)$$

Вводя полярные координаты в плоскости ζ , $\zeta = \rho \exp(i\theta)$, можно получить для точек первого луча (u – параметр вдоль луча)

$$0 \leq \alpha \leq \pi/n, \quad \Psi^*(\theta) = \Psi(\alpha), \quad u = \lambda \cos^{2/n} \frac{\theta n}{2} \quad (2.5)$$

$$\Psi^*(\theta) = R^2 \int_0^\theta G(\theta) d\theta, \quad G(\theta) = -\sin \frac{\theta n}{2} \sin \alpha(u) u^{1-n/2}$$

Как показано в [7], из функции $\Psi^*(\theta)$ приходится вычитать еще логарифмическую часть потенциала $a_0(1)\theta$ и вводить $\Psi^*(\theta, \rho)$: $\Psi^*(\theta, \rho) = \Psi^*(\theta, \rho) - a_0(1)\theta$. Выражение для $a_0(1)\theta$ легко uproцается

$$a_0(1)\theta = S'(1)\theta / 2\pi = -nFR^2\theta / \pi \quad (2.6)$$

Расчеты показывают, что именно $\Psi^*(\theta, 1)$, соответствующая ограниченной части потенциала, – периодическая нечетная функция. В дальнейшем для частного случая долотообразного тела и конкретной $u(\alpha)$ это будет показано аналитически.

Здесь $\Psi^*(\theta, \rho)$ известна на границе единичного круга $\rho = 1$ и, следовательно, восстанавливается вне его с помощью интеграла Пуассона

$$\Psi^*(\theta, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Psi^*(\beta, 1)(\rho^2 - 1)}{\rho^2 - 2\rho \cos(\beta - \theta) + 1} d\beta, \quad \rho > 1 \quad (2.7)$$

Из решения краевой задачи понадобится только функция

$$I(\theta) = \int_0^\theta \frac{\partial \Psi^*(\theta, 1)}{\partial \rho} d\theta \quad (2.8)$$

Выражение контурного интеграла в формуле (1.3) через функции $S(x)$ – (1.5), $I(\theta)$ – (2.8), $\partial \Psi^* / \partial \theta$ – (2.5), (2.6)

$$\int_C \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} d\tau = \int_0^{2\pi} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial \rho} d\theta = -\frac{[S'(1)]^2}{2\pi} \ln \frac{2}{BR} + \frac{[S'(1)]^2}{2\pi} \ln \frac{\lambda}{\sqrt[4]{4}} + \frac{S'(1)}{2\pi} \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} S''(x) dx - \frac{S'(1)}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Psi^*(\theta, 1)}{\partial \theta} I(\theta) d\theta \quad (2.9)$$

Первые три слагаемых в (2.9) аналогично формулам (1.6) выразим через $F(u)$

$$\frac{1}{2\pi} \left[4n^2 F^2(u) R^4 \ln \frac{2}{BR} + 4n^2 F^2(u) R^4 \ln \frac{\lambda}{\sqrt[4]{4}} - 4nF(u) R^4 (2nF(u) - \pi) \right] \quad (2.10)$$

При приведении подобных членов выражение для I_2 (1.6), следовательно, удвоится.

Так как $u(\alpha)$ пропорциональна параметру λ (2.5), следовательно, $u(\alpha) \equiv 0$ и $F(u) \equiv 0$ при $\lambda = 0$ (1.5). Тогда в (2.9) весь контурный интеграл обратится в ноль, n -лучевая звезда превратится в точку, а линейчатое тело – в конус. Формулы (1.6) резко упротятся

$$\frac{2X}{\rho U^2} = \frac{1}{2\pi} \left(4R^4 \pi^2 \ln \frac{2}{BR} - 2R^4 \pi^2 \right), \quad C'_D = \frac{C_D}{R^2} = \frac{2X}{\rho U^2 \pi R^4} = 2 \ln \frac{2}{BR} - 1 \quad (2.11)$$

Эту известную формулу для тонкого конуса нетрудно получить, используя также

(1.2). Конус является единственным линейчатым телом, которое одновременно тело вращения.

3. Задача определения головной части тела вращения в рамках линейной теории при заданном отношении радиуса основания к длине тела была решена в [8] при условии $S'(1) = 0$, т.е. площадь поперечного сечения – функция продольной координаты – не имела особенности при сопряжении с цилиндрической частью. С физической точки зрения ограничение $S'(1) = 0$ трудно считать оправданным, однако математически это условие приводит к исследованию в (1.2) только двойного интеграла, и, что самое главное, в формуле (1.2) исчезает логарифмический член. Полученное тело известно как оживало Кармана, для которого

$$C'_D = 4 \quad (3.1)$$

Классическая задача линейной теории о нахождении оптимального тела без условия $S'(1) = 0$ решения не имеет [9]. Попытка найти такое решение сделана в [10].

С другой стороны, общий вид формулы (1.2) позволяет сделать два вывода: а) если тело при данном значении параметра BR дает выигрыш в волновом сопротивлении по сравнению с оживалом Кармана, то при увеличении этого параметра выигрыш может только возрасти; б) условие $S'(1) \neq 0$ означает наличие логарифмического члена в формуле (1.2) и, следовательно, для "очень тонких" головных частей оживало Кармана все равно лучше любой другой головной части. Таким образом, для всякой не очень плохой головной части (или для класса головных частей, но тогда дополнительно надо выбирать и геометрические параметры) можно указать предельное численное значение параметра подобия BR . При значениях параметра, меньших этого предельного значения, выгоднее использовать оживало Кармана, при больших – данное тело (рассматривается допустимый в линейной теории диапазон изменения параметра BR). Чем это предельное значение меньше, тем тело лучше. Даже конус (формула (2.11)) оказывается лучше оживала Кармана при $BR > 0,164$. Конус – частный случай степенного продольного контура, для которого $S(x) = x^{2\mu}\pi R^2$, что после упрощений в (1.2) приводит к

$$C'_D = 2 \ln \frac{2}{BR} + \frac{1}{2\mu - 1} - 2(2\mu - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p(p + 2\mu - 1)} \quad (3.2)$$

Последнюю бесконечную сумму можно выразить через пси-функцию Эйлера Ψ_ϵ и постоянную Эйлера C_ϵ

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\mu - 1}{p(p + 2\mu - 1)} = - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p + 2\mu} - \frac{1}{p + 1} \right) = \Psi_\epsilon(2\mu) + C_\epsilon$$

Расчеты по формуле (3.2), повторяющие [10], приведены на фиг. 1, кривые различаются значениями параметра BR . Примерно при $BR \geq 0,061$ степенное тело при соответствующем подборе показателя μ лучше оживала Кармана по волновому сопротивлению.

Сделанные для формулы (1.2) выводы верны и для линейчатых тел.

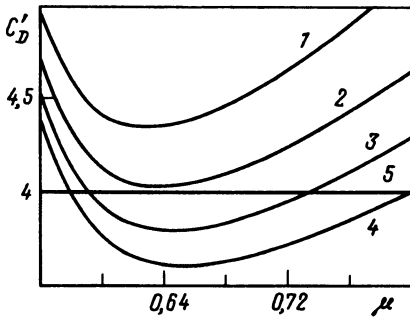
Рассмотрим долотообразное тело, т.е. положим $n = 2$ в формулах (1.5), (1.6), (2.4), (2.5). Выберем также $u(\alpha)$, соответствующее конформному отображению (2.5), т.е. положим $\alpha = \theta$ или

$$u = u(\alpha) = \lambda \cos \alpha \quad (3.3)$$

Тогда для F и $\psi(\theta)$ формулы (1.5) и (2.5)

$$F(u) = F_2 = \lambda \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^2 d\theta = \frac{\pi\lambda}{4} \quad (3.4)$$

$$\frac{\psi^*(\theta)}{R^2} = \frac{\psi(\alpha)}{R^2} = -\lambda \int_0^{\theta} (\sin \theta)^2 d\theta = -\frac{\lambda\theta}{2} + \frac{\lambda \sin 2\theta}{4} \quad (3.5)$$



Фиг. 1. Волновое сопротивление тонкого осесимметричного тела со степенным продольным профилем μ ($1-4 - BR = 0,04; 0,06; 0,08; 0,1$; 5 – оживало Кармана)

Учет логарифмических добавок (2.6)

$$-a_0(1)\theta = nFR^2\theta/\pi = \frac{1}{2}\lambda R^2\theta \quad (3.6)$$

Тогда для ограниченной части функции $\Psi^*(\theta)$

$$\frac{\Psi^*(\theta)}{R^2} = \frac{\lambda \sin 2\theta}{4} \quad (3.7)$$

В этом случае $\Psi^*(\theta)$ – не только периодическая нечетная функция (следовательно, область ее определения не ограничивается теперь условием $0 \leq \theta \leq \pi/n$, так как продолжать ее нужно на всю единичную окружность как раз по нечетности и периодичности), но и простая функция. Напомним, что именно по этой функции, заданной на окружности, необходимо восстановить $\Psi^*(\theta, \rho)$ вне единичного круга. Теперь можно избежать решения через интеграл Пуассона (2.7).

Если функция $\Psi^*(\theta)$ разложена в ряд Фурье [11]

$$\Psi^*(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^*(\theta) d\theta, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^*(\theta) \cos k\theta d\theta$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^*(\theta) \sin k\theta d\theta, \quad k = 1, 2, \dots$$

то решение внешней задачи записывается в виде ($\rho \geq 1$)

$$\Psi^*(\theta, \rho) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^k} (a_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta) \quad (3.8)$$

Тогда ряд не будет бесконечным – в нем всего лишь одно слагаемое

$$\beta_2 = \frac{R^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda}{4} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\lambda R^2}{4}$$

Следовательно

$$\Psi^*(\theta, \rho) = \frac{\lambda R^2}{4 \rho^2} \sin 2\theta \quad (3.9)$$

Для функции $I(\theta)$ (2.8)

$$I(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\partial \Psi^*(\theta, 1)}{\partial \rho} d\theta = \frac{R^2 \lambda}{4} (\cos 2\theta - 1) \quad (3.10)$$

Так как $S'(1) = -R^2\pi\lambda$ (см. (1.5), (3.4)), то для слагаемых контурного интеграла (2.9)

$$-\frac{S'(1)}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\theta) d\theta = \frac{R^4\pi\lambda^2}{4}, \quad -\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} I(\theta) d\theta = -\frac{R^4\pi\lambda^2}{8} \quad (3.11)$$

Таким образом, все слагаемые и для контурного интеграла (2.9) и для всей формулы волнового сопротивления (1.3) получаются в конечном и простом виде. Упростим остальные слагаемые, используя (3.4). Итак $F = \pi\lambda/4$, $n = 2$

$$\begin{aligned} I_1 &= 6R^4\pi^2(\lambda-1)^2, \quad I_2 = -2R^4\pi^2\lambda(\lambda-1), \quad I_3 = 4R^4\pi^2(2-\lambda)(\lambda-1) \\ I_4 &= R^4\pi^2(2-\lambda)^2 \ln \frac{2}{BR}, \quad I_5 = R^4\pi^2\lambda^2 \ln \frac{2}{BR}, \quad I_6 = R^4\pi^2\lambda^2 \ln \frac{\lambda}{2} \\ I_7 &= I_2 = -2R^4\pi^2\lambda(\lambda-1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь выражения I_5-I_7 соответствуют слагаемым в контурном интеграле (2.10). Задача свелась к сложению (3.11) и (3.12)

$$\begin{aligned} C'_D &= 3(\lambda-1)^2 - 4\lambda(\lambda-1) + 2(2-\lambda)(\lambda-1) + \\ &+ \frac{(2-\lambda)^2}{2} \ln \frac{2}{BR} + \frac{\lambda^2}{2} \ln \frac{2}{BR} + \frac{\lambda^2}{2} \ln \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{8} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Формула (3.13) верна для волнового сопротивления долотообразного тела при $u(\alpha) = \lambda \cos \alpha$ (конформная $u(\alpha)$ при $n = 2$). Расчеты коэффициента волнового сопротивления C'_D по этой формуле в зависимости от параметра λ приведены на фиг. 2, причем параметр BR изменяется в диапазоне $0,022 \leq BR \leq 0,025$, долотообразное тело лучше оживала Кармана уже при $BR = 0,023$ ($1 \leq \lambda \leq 1,1$).

Функция $u(\alpha) = \lambda \cos \alpha$ выбрана вначале по случайным обстоятельствам – соответствующие формулы для $\Psi^*(\theta, \rho)$ (3.9)–(3.11) – очень простые, можно не пользоваться интегралом Пуассона. Это полностью аналитическое решение позволяло контролировать расчеты и по формуле Пуассона для других видов зависимостей $u(\alpha)$. В качестве примера приводится расчет для "равномерной" функции

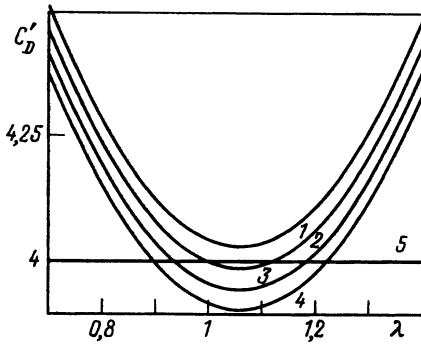
$$u = \lambda \left(1 - \frac{2\lambda}{\pi}\right), \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) \quad (3.14)$$

$$F(u) = F_2 = 2\lambda, \quad u = \lambda \cos \theta$$

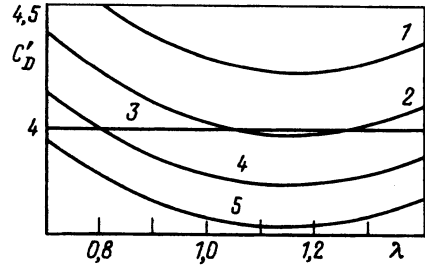
$$\frac{\Psi^*(\theta)}{R^2} = \int_{\lambda}^u \sin \alpha(u) du = \frac{2\lambda}{\pi} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} (1 - \cos \theta) \right] - 1 \right\}$$

Волновое сопротивление долотообразного тела с равномерной функцией $u(\alpha)$ на фиг. 3 меньше, чем у оживала Кармана, начиная с $BR = 0,044$. Это значительно хуже, чем для конформной функции $u(\alpha) = \lambda \cos \alpha$ (3.5) (и реализуется при больших $\lambda = 1,10-1,20$), но значительно лучше, чем для оптимального степенного тела (3.2). К сожалению, варьирование функции $u(\alpha)$ для линейчатого долотообразного тела не привело к уменьшению границы $BR = 0,023$, полученной для функции (3.3).

Заключение. Волновое сопротивление оживала Кармана не зависит от параметра BR , так как $S'(1) = 0$. При $S'(1) \neq 0$ задача о нахождении оптимального тела в обычной постановке решения не имеет, но можно изменить постановку задачи. Рассматривая при $S'(1) \neq 0$ различные головные части, можно указать предельное значение BR , тогда при меньших значениях параметра лучше оживало Кармана, при больших – данное тело. Это предельное значение (точнее, его малость) можно рассматривать как критерий: чем оно меньше, тем выгоднее тело по волновому сопротивлению при любых



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Волновое сопротивление тонкого долотообразного линейчатого тела с конформным распределением образующих (1–4 – $BR = 0,022; 0,023; 0,024; 0,025$; 5 – оживало Кармана)

Фиг. 3. Волновое сопротивление тонкого долотообразного линейчатого тела с равномерным распределением образующих (1, 2, 4, 5 – $BR = 0,040; 0,045; 0,050; 0,055$; 3 – оживало Кармана)

допустимых значениях BR . Предельное значение для конуса очень большое – 0,164, для оптимального тела вращения (степенной продольный контур) – 0,061. Предложенное здесь долотообразное тело с распределением по косинусу линейчатых образующих уже при $BR = 0,023$ лучше оживала Кармана по волновому сопротивлению. Это и есть основной результат данной работы. Геометрически это тело очень простое: всякое поперечное сечение – эллипс, никаких вогнутых участков тело не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусаров А.А., Деев А.А., Левин В.А. и др. Оптимальные аэродинамические формы тел, летящих с гиперзвуковыми скоростями // Аннот. докл. 4-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Киев: Наук. думка, 1976. С. 53.
2. Ward G.N. Supersonic flow past slender pointed bodies // Quart. J. Mech. and Appl. Mat., 1949. V. 2. № 3. P. 75–112.
3. Ward G.N. Linearised theory of steady high speed flow. Cambridge: Univ. Press, 1955. 243 p.
4. Lighthill M.J. Supersonic flow past slender bodies of revolution, the slope of whose meridian section is discontinuous // Quart. J. Mach. and Appl. Mat. 1948. V. 1. № 1. P. 90–102.
5. Hayes W.D. Reversal flow theorems in supersonic aerodynamics // 7th Intern. Cong. Appl. Mech. London, 1949. V. 2. Pt 2. P. 412–424.
6. Фоллэ М.И. Формула сопротивления для удлиненных головных частей летательных аппаратов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 156–160.
7. Фоллэ М.И. Линейная теория сверхзвукового обтекания линейчатых тел пространственной конфигурации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 94–101.
8. Karman T., von. The problem of resistance in compressible fluids // Proc. 5th Volta Conf. Rome. Aerotecnica. 1935. V. 15. P. 575–615.
9. Harder K.C., Rennemann C. On boattail bodies of revolution having minimum wave drag // NASA Rep. 1956. № 1271. 9 p.
10. Васильченко В.И. Оптимальные формы тел вращения в линеаризованном сверхзвуковом течении // Тр. ЦАГИ. 1975. № 1666. С. 20–28.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.I.1997