

УДК 532.529.2.013.4:536.421

© 1998 г. П.Т. ЗУБКОВ, В.Г. КЛИМИН, В.А. КРАВЧЕНКО

КОНВЕКЦИЯ ЗАМЕРЗАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ ЯЧЕЙКЕ ПРИ ПОТЕРЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Изучено поведение замерзающей (оттаивающей) жидкости в квадратной ячейке при трех различных начальных условиях. Показано, что существуют четыре стационарных решения при заданном числе Грасгофа Sr . Получен эффект возрастания доли твердого вещества в ячейке в определенном диапазоне числа Sr по сравнению с чистой теплопроводностью. Получены критические числа Sr , соответствующие переходу одного типа решения в другое.

Задача поведения жидкости при потере гидростатической устойчивости имеет не единственное решение как при наличии фазового перехода (замерзания либо оттаивания), так и без него [1–3]. Подробный анализ численных исследований таких задач приведен в [4].

1. Постановка задачи. Рассматриваются замерзание и плавление жидкости в квадратной ячейке при подогреве снизу, с учетом, что все теплофизические свойства жидкого и твердого вещества одинаковы. Конвективное течение изучается в приближении Буссинеска.

В декартовой системе координат безразмерная система уравнений для жидкой и твердой фаз сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \Delta U, \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \Delta V + Cr \Theta \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \Delta \Theta, \quad Gr = \frac{g\beta L^3 (T_1 - T_0)}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{1}{Pr} \Delta \Theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Безразмерная энтальпия определяется как

$$H = \Theta + \frac{1}{Ste}, \quad \Theta > \Theta_s, \quad H = \Theta, \quad \Theta < \Theta_s, \quad H = \Theta + \frac{\alpha}{Ste}, \quad \Theta = \Theta_s$$

$$Ste = c(T_1 - T_0)/h_s$$

Здесь α – доля жидкости в двухфазном объеме, Ste – число Стефана, Θ_s – безразмерная температура фазового перехода.

Переход к безразмерным величинам осуществляется по соотношениям

$$X = \frac{x}{L}, \quad U = \frac{uL}{\nu}, \quad \tau = \frac{t\nu}{L^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad H = \frac{h}{c(T_1 - T_0)}$$

На фронте плавления выполняется условие Стефана

$$\Theta = \Theta_s, \quad [-\nabla \Theta] = \frac{1}{Ste} V_b, \quad [f] = f_+ - f_-$$

где V_b – скорость поверхности плавления.

Граничные условия на всех гранях $U = V = 0$ и для Θ

$$Y = 0: Y = 1: X = 0: X = 1: \Theta = 1, \Theta = 0, \Theta = 1 - Y, \Theta = 1 - Y \quad (1.2)$$

Рассматриваются три типа начальных условий для $\Theta(U = V = 0)$

$$1) \Theta = 0, 2) \Theta = 1, 3) \Theta = 1 - X \quad (1.3)$$

Рассматриваемая система уравнений с заданными граничными и начальными условиями допускает стационарное решение

$$U = V = 0, \Theta = 1 - Y, P = Cr(Y - 0,5Y^2) + \text{const} \quad (1.4)$$

Это решение при достаточно больших числах Cr абсолютно неустойчиво.

Уравнения (1.1) с граничными и начальными условиями (1.2) и (1.3) исследовались численно на сетке 52×52 методом [5]. Причем анализируются только стационарные решения в зависимости от числа Cr , остальные характерные параметры постоянны и равны $\Theta_s = 0,3$, $Ste = 10$, $Pr = 1$. При $\Theta_s = 0,3$ для выбранных начальных и граничных условий при отсутствии конвекции (решение (1.4)) доля твердого вещества в точности составляет 0,3 всего объема ячейки.

Определим безразмерные тепловые потоки на границах рассматриваемой ячейки как потоки, входящие в расчетную область, через безразмерные местные и интегральные числа Нуссельта (Nu) на каждой стороне квадрата

$$Y = 0: Nu_{dx} = -\frac{\partial \Theta}{\partial Y}, \quad Y = 1: Nu_{ux} = \frac{\partial \Theta}{\partial Y}$$

$$X = 0: Nu_{ly} = -\frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad X = 1: Nu_{ry} = \frac{\partial \Theta}{\partial X}$$

$$Nu_u = \int_0^1 Nu_{ux} dx, \quad Nu_d = \int_0^1 Nu_{ud} dx, \quad Nu_l = \int_0^1 Nu_{ly} dy, \quad Nu_r = \int_0^1 Nu_{ry} dy$$

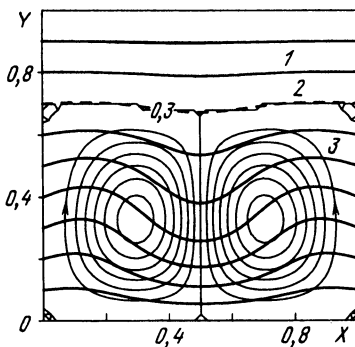
В стационарном случае

$$Nu_u + Nu_d + Nu_l + Nu_r = 0$$

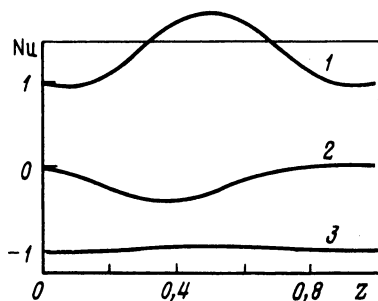
Это условие используется в расчете как один из критериев выхода на стационарный режим.

2. Анализ стационарных решений. Рассмотрим три стационарных решения при $Cr = 1,7 \cdot 10^4$. Функция тока и изотермы на фиг. 1 при начальном условии первого типа $\Theta_{in} = 0$ показывают, что у вертикальных стенок жидкость течет вверх, а в центре квадрата – соответственно вниз. Граница раздела фаз в центре квадрата выпуклая вниз. Интересен факт, что в этом случае доля твердого вещества превышает решение (1.4) и составляет $V_s/V = 0,307$. Чтобы понять, почему конвекция приводит не к понижению, а к повышению твердого вещества в ячейке, обратимся к фиг. 2, на которой представлены местные числа Нуссельта на всех границах. Из фиг. 2 видно, что суммарный поток тепла, забираемый на верхней стороне квадрата, оказывается меньше единицы. Кроме того, тепловые потоки на боковых гранях отбираются из рассматриваемой области и количество тепла, поступающее к границе раздела твердое – жидкое, оказывается меньше единицы (в случае решения (1.4) тепловой поток на границе раздела фаз в точности равен единице). Отметим, что существуют области вблизи нижних углов квадрата, где местное число Нуссельта меньше единицы, это происходит из-за возникновения вторичных течений в этих углах. Они при данном Cr существуют и вверху у границы раздела фаз (см. фиг. 1), которая обозначена кривой 2.

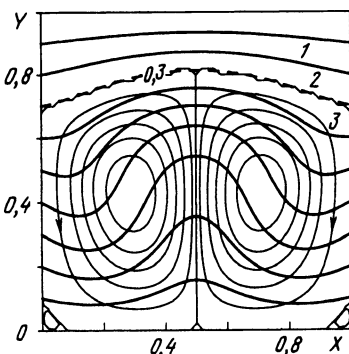
Результаты расчета стационарного течения при том же числе Грасгофа $1,7 \cdot 10^4$, но при втором типе начальных условий $\Theta_{in} = 1$, что жидкость у вертикальных стенок дви-



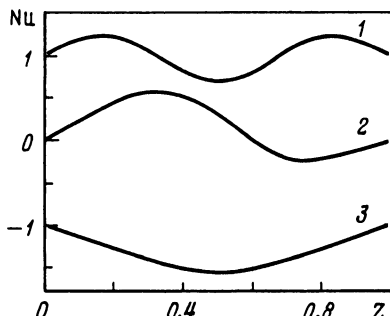
Фиг. 1. Функция тока и изотермы ($\Theta_{in} = 0$): 1 – изотермы, 2 – граница раздела фаз, 3 – функция тока



Фиг. 2. Локальные числа Нуссельта ($\Theta_{in} = 0$): 1 – Nu_{dx} , 2 – $Nu_{ly} = Nu_{ry}$, 3 – Nu_{ix} ; $Z = X$ для Nu_{dx} и Nu_{ix} , $Z = Y$ для Nu_{ly} и Nu_{ry}



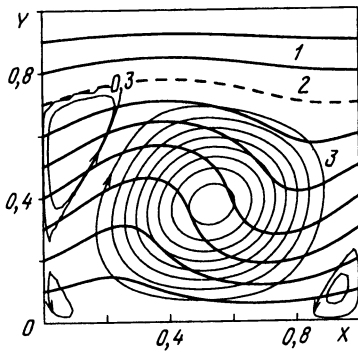
Фиг. 3. Функция тока и изотермы ($\Theta_{in} = 1$): 1 – изотермы, 2 – граница раздела фаз, 3 – функция тока



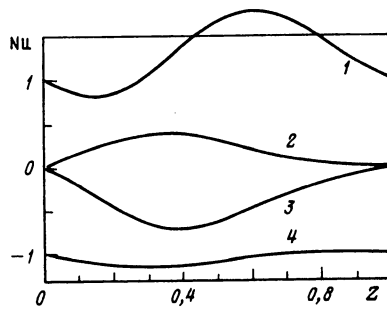
Фиг. 4. Локальные числа Нуссельта ($\Theta_{in} = 1$): 1 – Nu_{dx} , 2 – $Nu_{ly} = Nu_{ry}$, 3 – Nu_{ix} ; $Z = X$ для Nu_{dx} и Nu_{ix} , $Z = Y$ для Nu_{ly} и Nu_{ry}

жется вниз, а в центре квадрата – вверх. Вторичные течения в этом случае наблюдаются только в нижних углах рассматриваемой области. Граница раздела фаз (фиг. 3, кривая 2) выпуклая вверх и наименьшая толщина твердой фазы находится вдоль линии симметрии. Доля твердого вещества равна $V_s/V = 0,23$, что существенно меньше значения из аналитического решения (1.4). Тепловой поток на боковых гранях вплоть до $Y = 0,6$ поступает в расчетную область и отдается из нее при $0,6 < Y < 1$, причем приток тепла превышает потери через боковые грани (см. фиг. 4). Тепловой поток, отбираемый из ячейки через верхнюю грань, во всех ее точках больше единицы, а поступающий через нижнюю грань в центральной части оказывается меньше единицы, т.е. существует область в центре нижней грани, где при данном числе St местный тепловой поток из-за наличия конвекции уменьшается по сравнению с задачей чистой теплопроводности. При больших числах Gr , например $7,0 \cdot 10^4$, этот эффект отсутствует.

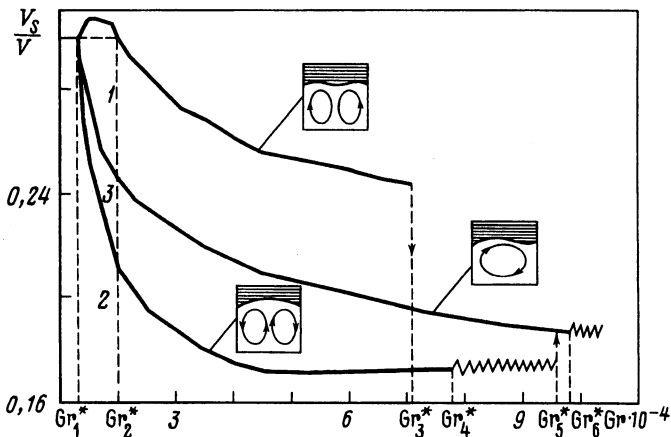
Стационарные решения при том же $Gr = 1,7 \cdot 10^4$ и третьем типе начальных условий $\Theta_{in} = 1 - X$ (на фиг. 5 и 6) несимметричны. Существование несимметричных решений в симметричных задачах естественной конвекции является известным фактом и приводится, например, в [4]. При рассматриваемом Gr оно показывает наличие вторичных вихрей слева вверху и в нижних углах квадрата (фиг. 5). В случае отсутствия фазового перехода для решений такого типа суммарный поток, поступающий снизу, в



Фиг. 5. Функция тока и изотермы ($\Theta_{in} = 1 - X$): 1 - изотермы, 2 - граница раздела фаз, 3 - функция тока



Фиг. 6. Локальные числа Нуссельта ($\Theta_{in} = 1 - X$): 1 - Nu_{dx} , 2 - Nu_{ry} , 3 - Nu_{ly} , 4 - Nu_{lx} ; $Z = X$ для Nu_{dx} и Nu_{lx} , $Z = Y$ для Nu_{ly} и Nu_{ry}



Фиг. 7. Зависимость доли твердой фазы от числа Грасгофа ($Gr \cdot 10^{-4}$): 1, 2, 3 - кривые решений первого, второго и третьего типа; Gr_i^* ($i = 1, \dots, 6$) - критические числа Грасгофа ($\cdot 10^{-4}$): 1,3; 2; 7,1; 7,8; 9,3; 9,8

точности передается вверх, а получаемый справа выходит влево. В нашем случае такая симметрия не наблюдается и поток тепла, получаемый справа, меньше, чем отдаваемый влево, а тепловой поток, входящий снизу, превышает теряемый сверху. Как и в предыдущих двух случаях, при данном Gr существует область в левом нижнем углу квадрата, где местный тепловой поток меньше единицы.

Наиболее интересна зависимость доли твердого вещества от Gr для полученных решений (фиг. 7). Все три типа решения (линии 1-3) имеют одно и то же первое критическое число $Gr = 1,3 \cdot 10^4$, отвечающее началу конвекции. Первый тип решения (кривая 1) в диапазоне изменения $1,3 \cdot 10^4 < Gr < 2 \cdot 10^4$ имеет долю твердого вещества, превышающую аналитическое решение чистой теплопроводности (1.4). Максимум этой доли равен $V_s/V = 0,308$ и достигается при $Gr = 1,55 \cdot 10^4$. С увеличением $Gr > 2 \cdot 10^4$ доля твердого вещества падает и при $Gr = 7,1 \cdot 10^4$ первый тип решения становится неустойчивым и переходит на третий тип решения (при третьем типе начальных условий).

Второй тип решения ($\Theta_{in} = 1$, кривая 2) показывает уменьшение доли твердого вещества до $Gr = 5 \cdot 10^4$, после чего ее величина стабилизируется за счет роста вторичных вихрей в нижних углах квадрата и соответственно потерь переноса тепла через

нижнюю границу. Впоследствии наблюдается незначительный рост доли твердого вещества и при $Gr = 7,8 \cdot 10^4$ начинается автоколебательный режим, т.е. для $Gr > 7,8 \cdot 10^4$ не удается получить стационарное решение этого типа. При $Gr = 9,3 \cdot 10^4$ автоколебательный режим становится абсолютно неустойчивым и решение переходит к течению третьего типа (кривая 3), которое в свою очередь становится автоколебательным при $Gr = 9,8 \cdot 10^4$.

Отметим, что автоколебательный режим для течения первого типа не обнаружен. Видимо, диапазон существования этого режима достаточно узок. Также не найдено число Gr , при котором решение третьего типа перестает быть автоколебательным.

Большинство расчетов проведено на сетке 52×52 , а для диапазона существования доли твердого вещества большей, чем для задачи чистой конвекции, на сетке 102×102 .

Заключение. Получено четыре типа различных решений, из которых три отвечают задаче конвекции, а одно – задаче чистой теплопроводности. Определены критические числа Грасгофа: потери гидростатической устойчивости, перехода симметричных решений на несимметричное. Найдено, что для симметричного течения, направленного у стенок вертикально вверх, есть диапазон числа Gr , при котором доля твердого вещества превышает его долю при чистой теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полежаев В.И. Течение и теплообмен при естественной конвекции газа в замкнутой области после потери устойчивости гидростатического равновесия // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 124–129.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 6. С. 93–99.
3. Зубков П.Т., Федоров К.М. Конвекция в цилиндрической ячейке с замерзающей жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 125–129.
4. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.

Сургут

Поступила в редакцию
24.II.1997