

УДК 532.529:532.593

© 1998 г. В.А. БАЙКОВ, И.А. СЕРЕДА

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ПРОСТРАНСТВУ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Исследованы особенности эволюции импульсных нелинейных возмущений в газожидкостной среде пузырьковой структуры с периодическим изменением объемной концентрации газа в смеси вдоль распространения импульса. Проанализировано влияние периода и амплитуды изменения неоднородности газосодержания на распространение одиночного импульса в средах как с теплообменом, так и без него. Показано, что влияние теплообмена качественно не меняет картины.

Характерная особенность двухфазных сред пузырьковой структуры – наличие мелкомасштабных течений, вызванных радиальными пульсациями пузырьков. Эффекты, связанные с этими течениями, подробно рассмотрены в [1]. Усиление нелинейных волн, распространяющихся в газожидкостной среде, возможно не только за счет инерции жидкости при радиальном течении вокруг пузырьков и упругости газа в пузырьках, но и за счет падения объемной концентрации газа в направлении распространения волны (т.е. происходит рост в целом среднего давления в волне) [2, 3]. В случае же увеличения концентрации газа в смеси происходит уменьшение амплитуды и скорости распространения волн. Этот эффект исследовался аналитически в длинноволновом приближении в предположении, что газосодержание мало меняется на расстоянии порядка длины волны [2], а также численно [3]. В данной работе численно рассматривается взаимодействие одиночного возмущения с пространственной неоднородностью (периодически меняющимся газосодержанием). Установлено, что процесс отражения существенно зависит от периода неоднородности. Расчеты проводились как без учета потерь энергии за счет теплообмена и вязкости жидкости (разд. 3, 4, где выявлены основные эффекты, связанные с периодической неоднородностью), так и с учетом этих потерь (разд. 5).

1. Распространение ударных импульсов в области, занятой газом, описывается обычными уравнениями газовой динамики в предположении, что газ идеальный и калорически совершенный. Запишем в эйлеровых координатах замкнутую систему уравнений, описывающую динамическое поведение пузырьковой жидкости. При этом будем следовать допущениям механики многофазных сред и предположениям постоянства плотности и температуры несущей фазы (жидкости) [1]. Тогда уравнения сохранения масс жидкости и газа в пузырьках и сохранения импульса системы примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v}{\partial x} = 0, \quad \frac{d\rho_2^0 a^3}{dt} = 0 \\ \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v \quad \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 = \alpha_1 \rho_1^0, \quad \rho_2 = \alpha_2 \rho_2^0$$

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 \left( p_2 - 2 \frac{\sigma}{a} \right), \quad \rho_1^0 = \rho_{10}^0$$

В качестве условия совместного деформирования фаз примем уравнение Рэлея – Ламба, записанное с поправками на случай ансамбля пузырьков [1, 4]

$$(1 - \varphi_1) \frac{d\omega}{dt} + \frac{3}{2}(1 - \varphi_2)\omega^2 + \frac{4\nu_1}{a}\omega = \frac{p_2 - p - 2\sigma/a}{\rho_1} \quad (1.2)$$

$$\frac{da}{dt} = \omega, \quad \varphi_1 = 1, 1\alpha_2^{1/3}, \quad \varphi_2 = 1, 47\alpha_2^{1/3}$$

Уравнение сохранения внутренней энергии газа в пузырьках для идеального и калорически совершенного газа можно записать в виде

$$\frac{d \ln p_2}{dt} = \gamma \frac{d \ln \rho_2^\circ}{dt} + \frac{n(\gamma - 1)}{p_2} q$$

$$p_2 = c_{v2}(\gamma - 1)\rho_2^\circ T_2, \quad n = \frac{3\alpha_2}{4\pi a^3}$$

$$T_1 = T_{10}, \quad q = 4\pi a^2 \lambda_2 \text{Nu} \frac{T_1 - T_2}{2a} \quad (1.3)$$

$$\text{Nu} = \sqrt{\text{Pe}} \quad (\text{Pe} > 100), \quad \text{Nu} = 10 \quad (\text{Pe} \leq 100)$$

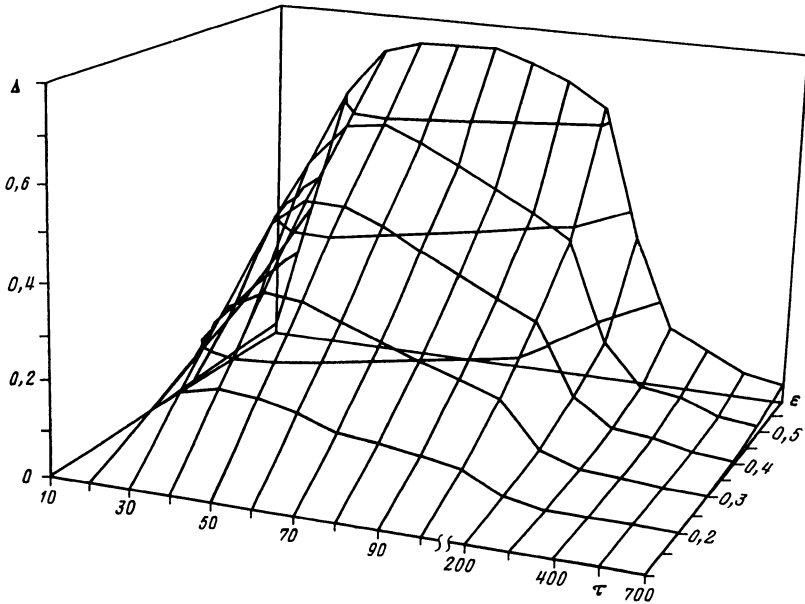
$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_1}{|T_1 - T_2|} \frac{a|\omega|}{a_2}, \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2^\circ c_{p2}}$$

Здесь  $\rho, p, \nu$  – соответственно средние плотность, приведенное давление и скорость смеси;  $T_i, \rho_i^\circ, \rho_i, p_i, \alpha_i$  – температура, истинная и средняя плотности, давление и объемное содержание  $i$ -й фазы; нижние индексы 1, 2 относятся к параметрам соответственно жидкости и газа;  $a, \omega$  – радиус и радиальная скорость пузырьков;  $\varphi_{1,2}$  – поправочные коэффициенты, учитывающие неоднородность пузырьков;  $\nu_1, \sigma$  – коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения;  $c_{v2}, c_{p2}, \gamma, a_2, \lambda_2$  – удельная теплоемкость при постоянных объеме и давлении, показатель адиабаты, коэффициенты температуро- и теплопроводности газа; нижним индексом ноль отмечены начальные значения параметров.

Для численного интегрирования соответствующей системы уравнений воспользуемся методикой [4], позволяющей представить систему (1.1)–(1.3) в виде системы сеточных уравнений, состоящей из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени, для решения которых удобно использовать модифицированный метод Эйлера – Коши, и одного уравнения второго порядка по пространственной переменной, которое решается методом прогонки.

**2. Моделировалось распространение одиночных импульсов в жидкости с пузырьками нерастворимого газа.** В качестве несущей жидкости бралась вода ( $\rho_1^\circ = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu_1 = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ). Газ в пузырьках – воздух, для которого значения термодинамических параметров, соответствующие начальному давлению  $p_0 = 0,1 \text{ МПа}$  и температуре  $T_0 = 294 \text{ К}$ , следующие:  $\nu = 1,4$ ,  $c_2 = 716 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{град}$ ,  $\lambda_2 = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^3 \cdot \text{град}$ .

Рассмотрим следующую задачу: трапециевидная волна, распространяясь по газу, входит в однородную двухфазную пузырьковую среду с начальным газосодержанием  $\alpha_{20} = 0,04$  и радиусом пузырей  $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$ . Параметры исходного трапециевидного возмущения подобраны так, что образуется один солитон. Вопрос о существовании солитонов в пузырьковых средах в слабонелинейном приближении подробно рассмотрен в [5]. Выделившийся солитон попадает в неоднородную газожидкостную среду. Пройдя определенное расстояние, солитон вновь выходит в однородную среду с

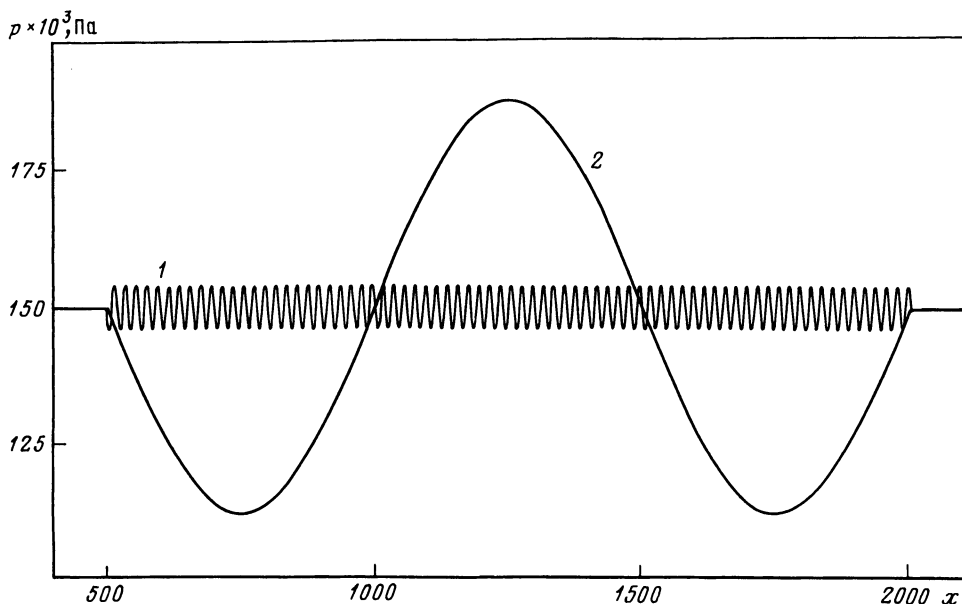


Фиг. 1. Зависимость относительной потери амплитуды ( $\Delta$ ) одиночным импульсом от параметров неоднородности ( $\epsilon, \tau$ )

теми же значениями газосодержания и радиусов пузырей, что и на первом отрезке. Таким образом, весь участок распространения начального импульса по газожидкостной среде можно разбить на три отрезка. Представим их в безразмерных координатах (соответствующих количеству точек по пространственной переменной в сеточной схеме для численного решения): 1)  $0 < x < 500$  – участок трансформации начального возмущения в солитон; 2)  $500 \leq x \leq 2000$  – участок с неоднородным распределением газосодержания  $\alpha_{20}(x) = \alpha_{20}^0 [1 + \epsilon \sin((x - 500)\pi / \tau)]$  (назовем  $\epsilon$  относительной амплитудой неоднородности,  $\tau$  – ее периодом); 3)  $2000 < x < 2500$  – участок стабилизации, выделенный для оценки влияния неоднородности на прошедший через нее одиночный импульс.

3. Численные расчеты проводились для различных значений относительной амплитуды ( $\epsilon = 0,2; 0,3; \dots; 0,7$ ) и периода ( $\tau = 10, 20, \dots, 100, 200, \dots, 700$ ) неоднородности. Для исследования влияния периодической неоднородности будем пренебрегать потерями энергии за счет вязкости и теплообмена, т.е. в уравнениях (1.2)  $\gamma_1 = 0$ , а в уравнениях (1.3)  $q = 0$ . При взаимодействии солитона с пространственной неоднородностью происходило частичное отражение волны от неоднородностей газосодержания, а в некоторых случаях – распад солитона на две (или более) нелинейные волны, движущиеся в том же направлении, что и исходное возмущение, и взаимодействующие между собой. Влияние периодической неоднородности на проходящий через нее одиночный импульс оценивалось через относительную потерю амплитуды импульса  $\Delta(\epsilon, \tau) = 1 - A^3/A^1$ , где  $A^i$  – амплитуда импульса на участке  $i$ . На фиг. 1 показана поверхность  $\Delta(\epsilon, \tau)$ , полученная по результатам численного расчета. Для более детального обсуждения результатов численных расчетов удобно разбить рассматриваемую область параметров  $(\epsilon, \tau)$  на три части:  $0 < \tau \leq 10$ ,  $10 < \tau < 500$ ,  $\tau \geq 500$ . Полуширина одиночного импульса на первом участке в безразмерных координатах приблизительно равна 50.

Период неоднородности существенно меньше полуширины одиночного импульса ( $0 < \tau \leq 10$ ). В этом случае неоднородность среды практически не оказывает влияния на эволюцию солитона. На фиг. 2 (кривая 1) приведена зависимость амплитуды оди-



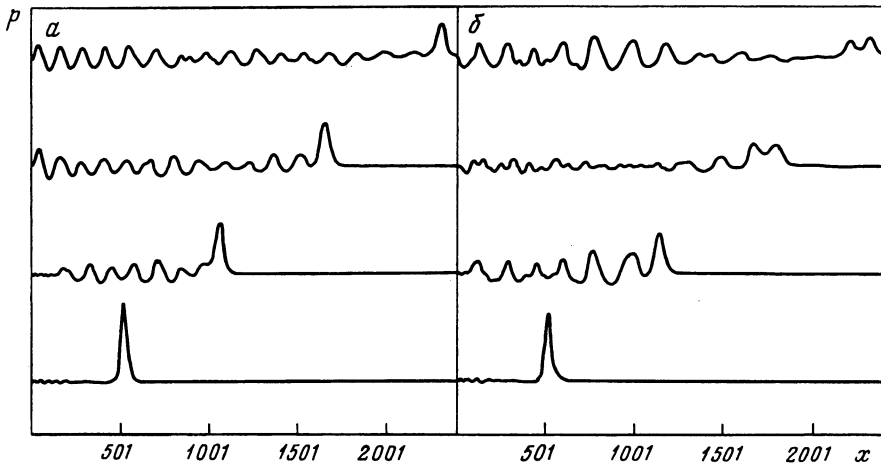
Фиг. 2. Зависимость амплитуды одиночного импульса от пройденного им расстояния: 1 –  $\epsilon = 0,5$ ,  $\tau = 10$ , 2 –  $\epsilon = 0,7$ ,  $\tau = 500$

ночного импульса от пройденного расстояния при  $\epsilon = 0,5$ ,  $\tau = 10$ . Потеря солитоном амплитуды не превышает 2% от начального значения (фиг. 1, 2). Это можно объяснить тем, что отраженные от неоднородности газосодержания волны взаимодействуют с солитоном и им же захватываются.

Период неоднородности существенно больше полуширины одиночного импульса ( $\tau \geq 500$ ). Потеря солитоном энергии так же, как и в предыдущем случае, незначительна (фиг. 1). Полученные численно результаты качественно согласуются с результатами работы [2], где было показано, что для слабонелинейных волн медленное изменение газосодержания приводит к увеличению или уменьшению амплитуды и полуширины импульса, причем амплитуда  $A$  растет (падает) с изменением газосодержания как  $A \sim \alpha_{20}^{-1/2}(x) \sim c_0^{1/2}(x)$ , где  $\alpha_{20}$  – начальное распределение газосодержания,  $c_0(x)$  – равновесная скорость звука. Зависимость амплитуды одиночного импульса от пройденного расстояния в неоднородной среде с параметрами  $\epsilon = 0,7$ ,  $\tau = 500$  представлена на фиг. 2 (кривая 2).

Период неоднородности порядка полуширины импульса. Этот случай принципиально отличается от предыдущих тем, что здесь существен эффект отражения от неоднородностей (перепадов) газосодержания. Амплитуда одиночного импульса существенно уменьшается на втором участке (фиг. 1). Причем максимальное падение амплитуды происходит, когда период неоднородности  $\tau \sim 40-50$ , т.е. при значениях  $\tau$  порядка полуширины одиночного импульса. С уменьшением (или увеличением)  $\tau$  влияние неоднородности на конечное изменение амплитуды распространяющегося импульса уменьшается и при существенном изменении  $\tau$  переходим к предыдущим случаям. Здесь существенную роль играет и амплитуда неоднородности, а именно с увеличением  $\epsilon$  увеличивается и потеря амплитуды импульсом (см. фиг. 1). Характерные сценарии представлены на фиг. 3, где показана эволюция одиночного импульса в неоднородной среде.

В области, где период неоднородности  $\tau \sim 40-50$ , т.е. в области наибольшего "затухания" амплитуды за счет отражения, начальный одиночный импульс становится неустойчивым при своей эволюции по периодической неоднородности (участок 2) и



Фиг. 3. Эволюция одиночного импульса в неоднородной среде с параметрами:  $a - \epsilon = 0,5$ ,  $\tau = 40$ ,  $b - \epsilon = 0,7$ ,  $\tau = 50$

распадается на несколько (два из которых отчетливо видны на фиг. 3б) одиночных импульсов, бегущих в том же направлении, что и первоначальный импульс. Отраженные волны в этом случае, взаимодействуя с неоднородностью и между собой, порождают на участке 2 явно неперриодические колебания (фиг. 3). В случае же, когда одиночный импульс устойчив (т.е. когда  $\tau \notin [40, 50]$ ), картина отраженных волн перриодическая и ее период совпадает с периодом неоднородности.

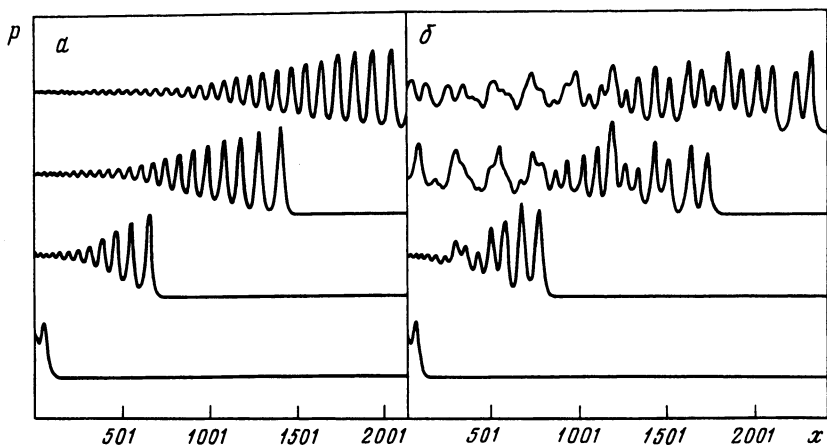
4. Помимо односолитонного случая моделировалось распространение ударных волн типа ступеньки (с  $\Delta P = 0,1$  МПа) в жидкости с пузырьками газа в однородном и неоднородном (с  $\tau = 50$ ,  $\epsilon = 0,5$ ) случаях (фиг. 4, а и б соответственно). Расчеты производились в предположении отсутствия потерь энергии за счет вязкости и межфазного теплообмена. В неоднородном случае участок распространения волны, как и ранее, разбивался на три отрезка: 1-й и 3-й – однородная среда, 2-й – среда с перриодической неоднородностью, причем параметры неоднородности таковы, что одиночный импульс при этих значениях параметров неустойчив. Из фиг. 4, а видно, что в случае однородности газожидкостной системы с  $\alpha_{20} = 0,04$  в процессе своего распространения ударная волна выделяет серию одиночных импульсов, расположенных в порядке убывания амплитуд так, что импульс, имеющий максимальную амплитуду, имеет и наибольшую скорость.

В случае с непостоянным газосодержанием, когда на втором участке

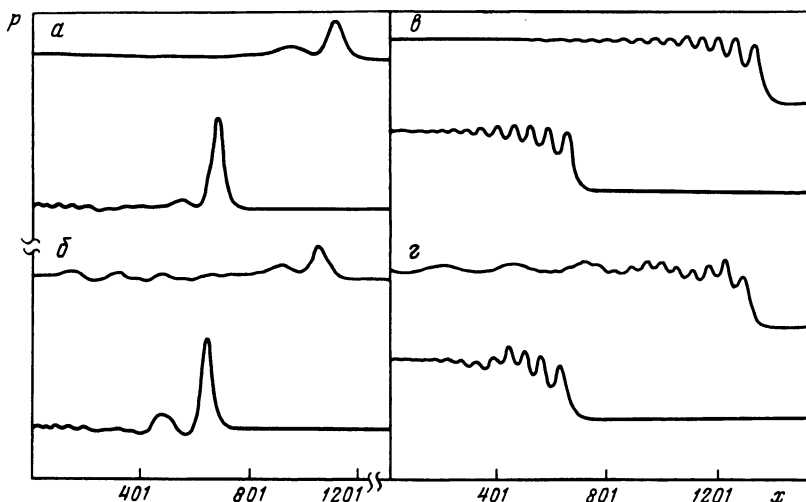
$$\alpha_{20}(x) = \alpha_{20}^{\circ} \left( 1 + 0,5 \sin \frac{\pi(x - 500)}{50} \right), \quad \alpha_{20}^{\circ} = 0,04$$

картина распространения ударной волны существенно меняется. Выделившиеся за фронтом волны импульсы расположены уже не в порядке убывания амплитуды, а достаточно произвольным образом. Как и в случае с одиночным импульсом, выделяющиеся из ударной волны импульсы, по-видимому, неустойчивы и их взаимодействие приводит к сложной картине распространения ударной волны (фиг. 4, б).

Ниже (фиг. 5) представлены результаты расчетов с учетом потерь энергии за счет межфазного теплообмена и вязкости. Моделировалось распространение как одиночных импульсов, так и ударных волн при разных значениях параметров неоднородности  $\epsilon$  и  $\tau$ . На фиг. 5 приведены результаты расчетов: а и б – одиночный импульс в однородной и неоднородной средах, в и г – ударная волна в однородной и неоднородной средах соответственно при  $\tau = 50$ ,  $\epsilon = 0,5$ . Численный расчет показал, что зона



Фиг. 4. Эволюция ударной волны в однородной (а) и неоднородной среде с параметрами:  $\tau = 50$ ,  $\epsilon = 0,5$  (б)



Фиг. 5. Эволюция одиночного импульса и ударной волны с учетом потерь энергии за счет вязкости и межфазного теплообмена: а, в – однородная среда; б, г – неоднородная среда с параметрами  $\tau = 50$ ,  $\epsilon = 0,5$

неустойчивости волны по параметрам  $\tau$ ,  $\epsilon$  такая же, как и в задаче без межфазного теплообмена: максимальное влияние неоднородности на проходящую через нее волну наблюдается при  $\tau \approx 50$  (т.е. при периоде неоднородности, равном полуширине одиночного импульса, происходит возникновение неустойчивости и максимальное затухание одиночного импульса, см. фиг. 5, б и г). Хотя потери энергии и влияют на эволюцию как одиночного импульса, так и ударных волн, но качественно картина развития неустойчивости в среде с периодической по пространству неоднородностью не меняется.

**Заключение.** Эволюция нелинейных волн в газожидкостных средах с периодической по пространству неоднородностью существенно зависит от параметров неоднородности.

Численно решалась задача о распространении одиночного импульса при его последовательном прохождении трех участков: первый – однородная среда, второй – среда с периодической неоднородностью по газосодержанию, третий – однородная среда.

Показано, что при прохождении одиночным импульсом среды с периодом неоднородности, существенно большим (меньшим) полуширины импульса, его амплитуда на третьем участке практически не отличается от амплитуды на первом. В случае, когда период неоднородности порядка полуширины импульса, происходит его затухание за счет отражения от неоднородностей. При некоторых значениях периода неоднородности одиночный импульс неустойчив и распадается на одиночные нелинейные волны меньшей амплитуды, бегущие в том же направлении, что и начальный импульс.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. *Ахатов И.Ш., Байков В.А., Байков Р.А.* Распространение нелинейных волн в газожидкостных средах с переменным по пространству газосодержанием // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 180–183.
3. *Газизов Р.К., Губайдуллин А.А.* Усиление ударных волн в пузырьковой жидкости с градиентом концентрации газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 49–54.
4. *Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И.* Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры // ПМТФ. 1978. № 2. С. 78–86.
5. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1984. 237 с.

Уфа

Поступила в редакцию  
27.11.1997