

УДК 532.517.4:532.529

© 1998 г. И.В. ДЕРЕВИЧ

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА С ДИСПЕРСНОЙ ПРИМЕСЬЮ ЧАСТИЦ

На основе двухточечной функции плотности вероятности распределения скоростей и координат частиц получена замкнутая модель влияния примеси частиц на характеристики дисперсного турбулентного потока. Исследованы процессы переноса турбулентной энергии и турбулентной диссипации по спектру. Проведено сравнение различных моделей двухфазной турбулентности.

Интерес к турбулентным двухфазным течениям связан с возможностью управления параметрами турбулентности при добавлении в поток сравнительно небольшой объемной концентрации примеси. Частицы примеси вовлекаются в хаотическое движение в результате флуктуаций силы вязкого сопротивления. Интенсивность турбулентного движения частиц зависит от отношения плотностей жидкой фазы и материала примеси, формы частиц и соотношения характерных размеров частиц и турбулентных вихрей. Здесь исследуется течение с частицами, размер которых меньше микромасштаба турбулентности Колмогорова (приближение "точечных" частиц). С увеличением концентрации примеси турбулентные характеристики несущего потока изменяются по сравнению с однофазным течением. В случае точечных частиц интенсивность обратного влияния пропорциональна массовой концентрации примеси.

Для расчетов турбулентных течений с примесью частиц и переменных Эйлера привлекаются двухпараметрические модели [1–3], в которых учитывается только одна сторона инерции частиц. Предполагается, что пульсационная энергия вихрей всех размеров расходуется на вовлечение примеси в хаотическое движение и в уравнениях для турбулентных характеристик несущей фазы учитывается только дополнительная диссипация, обусловленная присутствием частиц. Результаты расчетов по моделям [1–3] не согласуются с данными экспериментов [4, 5] и прямого численного моделирования дисперсного потока [6].

Турбулентный поток имеет существенную структурную неоднородность. Перенос турбулентной энергии по спектру от энергоемких вихрей к микровихрям обеспечивает вязкую диссипацию турбулентности. В результате скоростной неоднородности турбулентного течения реализуется вторая – "активная" сторона инерции частиц. Участие инерционной примеси в энергоемких пульсациях приводит к интенсификации инерционного переноса кинетической энергии по спектру и расширению диапазона мелко-масштабных флуктуаций скорости несущей фазы. Эта концепция высказана впервые в [7, 8] и нашла экспериментальное подтверждение в [4, 5].

В случае турбулентного потока со сдвигом скорости кроме внутренней неоднородности существует внешняя неоднородность, связанная с градиентами осредненных параметров. Хаотическое движение частиц переносит импульс в область с меньшим значением осредненной скорости и дополнительно генерирует турбулентность из осредненного движения.

В работе используется двухточечная функция плотности вероятности распределения скоростей и координат частиц, на основе которой осуществляется корректный переход от переменных Лагранжа отдельных частиц к переменным Эйлера для дис-

персной фазы [9], определяются межфазные слагаемые и учитывается обратное влияние примеси на параметры несущей среды [10].

1. Уравнение для функции плотности вероятности. Уравнения движения несжимаемой жидкости с примесью точечных частиц имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu_f \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} - \\ - \frac{\rho_p}{\rho_f} \sum_{p=1}^N \frac{\omega_p}{\Omega_N} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) \frac{1}{\tau_p} [U_i(\mathbf{x}, t) - V_{pi}(t)], \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $U_i(\mathbf{x}, t)$, $P(\mathbf{x}, t)$ – скорость и давление жидкой фазы, ν_f – кинематическая вязкость сплошной среды, ρ_f , ρ_p – плотности жидкой фазы и материала частиц, $\mathbf{R}_p(t)$, $\mathbf{V}_p(t)$ – радиус-вектор и скорость p -й частицы, ω_p – объем p -й частицы, Ω_N – объем течения, содержащий N частиц, τ_p – время динамической релаксации частиц, зависящее от относительной скорости обтекания частиц, $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция Дирака.

Движение твердых частиц в сплошной среде вызывается силой вязкого сопротивления и массовой силой

$$\frac{dV_{pi}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_p} (U_i(\mathbf{R}_p, t) + \tau_p g_i - V_{pi}), \quad \frac{d\mathbf{R}_{pi}(t)}{dt} = \mathbf{V}_{pi} \quad (1.2)$$

где g_i – ускорение массовых сил.

Для перехода от переменных Лагранжа (1.2) к переменным Эйлера дисперсной фазы определяем двухточечную функцию плотности вероятности распределения частиц по координатам и скоростям

$$\Phi_{12}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{V}_\alpha, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{V}_\beta, t) = \sum_{p=1}^N \frac{\omega_p}{\Omega_N} \prod_{\alpha=1}^2 \delta(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{R}_p^\alpha) \delta(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_p^\alpha)$$

Объемная концентрация, скорость и совместное распределение концентрации частиц в точках \mathbf{x}_α и \mathbf{x}_β выражаются через плотность вероятности

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}_\alpha, t) &= \int d\mathbf{x}_\beta \int d\mathbf{V}_\alpha \int d\mathbf{V}_\beta \Phi_{12} d\mathbf{V}_\beta \\ C(\mathbf{x}_\alpha, t) \mathbf{V}(\mathbf{x}_\alpha, t) &= \int d\mathbf{x}_\beta \int d\mathbf{V}_\beta \int d\mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \Phi_{12} d\mathbf{V}_\alpha \\ C_{12}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta, t) &= \int d\mathbf{V}_\alpha \int d\mathbf{V}_\beta \Phi_{12} d\mathbf{V}_\beta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Осреднение по ансамблю реализаций турбулентного потока в (1.3) приводит к осредненным и пульсационным компонентам скорости и перемещения

$$\mathbf{V}_p^\alpha(t) = \langle \mathbf{V}(\mathbf{R}_p^\alpha(t), t) \rangle + \mathbf{v}_p^\alpha(t) \quad (1.4)$$

$$C(\mathbf{x}_\alpha, t) \mathbf{v}_\alpha = \int d\mathbf{x}_\beta \int d\mathbf{V}_\beta \int d\mathbf{V}_\alpha (\mathbf{V}_\alpha - \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle) \Phi_{12} d\mathbf{V}_\alpha$$

$$\mathbf{R}_p^\alpha(t) = \langle \mathbf{R}_p^\alpha(t) \rangle + \mathbf{r}_p^\alpha(t) = \int_0^t [\langle \mathbf{V}(\mathbf{R}_p^\alpha(s'), s') \rangle + \mathbf{v}_p^\alpha(s')] ds' \quad (1.5)$$

В переменных пульсаций скорости частиц уравнение для плотности вероятности $\Phi_{12}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{v}_\beta, t)$ имеет вид [11]

$$\frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \langle \langle \mathbf{V}_{\alpha k} \rangle \rangle + v_{\alpha k} \right\} \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial x_{\alpha k}} - \left[\frac{\partial \langle \mathbf{V}_{\alpha i} \rangle}{\partial t} + \langle \langle \mathbf{V}_{\alpha k} \rangle \rangle + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +v_{\alpha k} \left. \frac{\partial \langle V_{\alpha i} \rangle}{\partial x_k} - \frac{1}{\tau_p} (\langle U_{\alpha i} \rangle + \tau_p g_i - \langle V_{\alpha i} \rangle) \right] \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial v_{\alpha i}} \Bigg\} = \\
& = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial v_{\alpha i}} \frac{1}{\tau_p} (\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle - v_{\alpha i} \langle \Phi_{12} \rangle)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Из условия симметрии при перестановке индексов выражение для корреляции $\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle$ представим как

$$\begin{aligned}
\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle = & - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 \left\{ [\langle u_{\alpha i} v_{\beta j} \rangle + \langle u_{\beta j} v_{\alpha i} \rangle] \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial v_{\beta j}} - \right. \\
& \left. - [\langle u_{\alpha i} R_{\beta j}^{\beta} \rangle + \langle u_{\beta j} R_{\alpha i}^{\alpha} \rangle] \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial x_{\beta j}} \right\}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

В зависимости от степени вовлеченности частиц в турбулентное движение их можно условно разбить на два класса. К первому классу относятся частицы с временем динамической релаксации, превосходящим временной масштаб энергоемких вихрей $\tau_p > T_E$. Эти частицы слабо реагируют на мелкомасштабную турбулентную структуру и флуктуации скорости жидкой фазы можно моделировать гауссовским случайным полем с автокорреляционной функцией, зависящей от интегрального временного масштаба. Для второго класса малоинерционных частиц, время динамической релаксации которых порядка временного микромасштаба турбулентности $\tau_p \sim T_\lambda \ll T_E$, необходимо учитывать микроструктуру турбулентного течения. Здесь проводится раздельное рассмотрение реакции частиц различной инерционности на флуктуации скорости несущей фазы с последующей аппроксимацией результатов на частицы с временем динамической релаксации в диапазоне $T_\lambda < \tau_p < T_E$. Эта методика справедлива при достаточно больших числах Рейнольдса турбулентности, когда спектры энергоемких вихрей и вязкой диссипации в пространстве волновых чисел отделены друг от друга инерционным интервалом.

В случае примеси инерционных частиц используется метод функциональных производных Фурутцу – Новикова [12]

$$\begin{aligned}
\langle u_{\alpha i} v_{\beta j} \rangle &= \int_0^t ds \int \langle u_i(\mathbf{x}_\alpha, t) u_k(\mathbf{x}_1, s) \rangle \left\langle \frac{\delta v_{\beta j}}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, s)} \right\rangle d\mathbf{x}_1 \\
\langle u_{\alpha i} R_{\beta j}^{\beta} \rangle &= \int_0^t ds \int \langle u_i(\mathbf{x}_\alpha, t) u_k(\mathbf{x}_1, s) \rangle \left\langle \frac{\delta R_{\beta j}^{\beta}}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, s)} \right\rangle d\mathbf{x}_1
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Функциональная производная от смещения определяется с учетом (1.5)

$$\frac{\delta R_{\beta j}^{\beta}(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, s)} = \frac{\partial \langle V_{\beta j} \rangle}{\partial x_n} \int_0^t \frac{\delta r_{\beta n}^{\beta}(s')}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, s)} ds' + \int_0^t \frac{\delta v_{\beta j}^{\beta}(s')}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, s)} ds' \tag{1.9}$$

Способ учета неоднородности турбулентного потока в функциональных производных (1.8), (1.9) принципиально отличается от [3, 13]. В соответствии с (1.2) и (1.4) записываем уравнение для пульсаций скорости частиц

$$\frac{dv_{\beta j}(t)}{dt} + v_{\beta k}(t) \frac{\partial \langle V_j(\mathbf{R}_p(t), t) \rangle}{\partial x_k} = \frac{1}{\tau_p} [u_j(\mathbf{R}_p(t), t) - v_{\beta j}(t)] \tag{1.10}$$

Хаотическое движение частиц вызывается пульсациями силы вязкого сопротив-

ления, а неоднородность потока учитывается как поправка. В рамках этого приближения из (1.10) имеем

$$v_{pj}(t) = \frac{1}{\tau_p} \int_0^t A' u'_j ds' - \tau_p \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} \int_0^t \left(\frac{t-s'}{\tau_p} \right) A' u'_k \frac{ds'}{\tau_p} \quad (1.11)$$

$$A' = \exp\left(-\frac{t-s'}{\tau_p}\right), \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}(\mathbf{R}_p(s'), s')$$

Из (1.11) следует, что в неоднородном потоке пульсации смещения инерционных частиц усиливают интенсивность турбулентных флуктуаций скорости.

Используя (1.11) в (1.5), получаем выражение для перемещения частиц

$$r_{pj}(t) = \int_0^t (1-A') u'_j ds' - \tau_p^2 \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} \int_0^t \left\{ (1-A') - \frac{(t-s')}{\tau_p} A' \right\} u'_k \frac{ds'}{\tau_p} \quad (1.12)$$

Ограничиваясь первым порядком производных от осредненной скорости дисперсной фазы в (1.11), (1.12), определяем значения функциональных производных, входящих в выражение (1.8)

$$\frac{\delta u_{pj}^\beta(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, s)} = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p^\beta(s)) \left\{ \frac{\delta_{jk}}{\tau_p} A - \frac{\partial \langle V_{\beta j} \rangle}{\partial x_k} \left(\frac{t-s}{\tau_p} \right) A \right\} \quad (1.13)$$

$$\frac{\delta R_{pj}^\beta(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, s)} = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p^\beta(s)) \left\{ \delta_{jk}(1-A) + \tau_p \frac{\partial \langle V_{\beta j} \rangle}{\partial x_k} \left[\frac{(t-s)}{\tau_p} (1+A) - 2(1-A) \right] \right\} \quad (1.14)$$

Из (1.8), (1.13) и (1.14) видно, что в выражение для $\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle$ входят корреляции пульсаций скорости жидкой фазы на траектории частицы, которые представляются в виде

$$\langle u_i(\mathbf{x}_\alpha, t) u_j(\mathbf{R}_p^\beta(s), s) \rangle = \langle u_i(\mathbf{x}_\alpha, t) u_j(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{R}_p^\beta(\xi), t - \xi) \rangle, \quad \xi = t - s \quad (1.15)$$

Корреляции пульсаций скорости (1.15) зависят от макромасштабов, представляющих изменение осредненных параметров потока, и микромасштабов, связанных с внутренней пульсационной структурой турбулентности

$$\langle u_i(\mathbf{x}_\alpha, t) u_j(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{R}_p^\beta(\xi), t - \xi) \rangle = \langle E_{ij}(\mathbf{x}_{\alpha\beta} - 0, 5\mathbf{R}_p^\beta(\xi), t - 0, 5\xi; \mathbf{Y} + \mathbf{R}_p^\beta(\xi), \xi) \rangle \quad (1.16)$$

Здесь $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = 0,5(\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{x}_\beta)$ – средняя координата, $\mathbf{Y} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta$ – расстояние между точками, E_{ij} – эйлерова двухточечная двухвременная корреляция пульсаций скорости сплошной среды в системе координат, движущейся с осредненной скоростью потока

$$E_{ij}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}, t_{\alpha\beta}; \mathbf{Y}, \xi) = \langle u_i(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) u_j(\mathbf{x}_\beta, t_\beta) \rangle, \quad t_{\alpha\beta} = 0,5(t_\alpha + t_\beta)$$

Осреднение в (1.16) проводится по ансамблю случайных траекторий частиц. Используя существенное различие в величине масштабов по средним и относительным переменным в (1.16), записываем

$$\begin{aligned} & \langle E_{ij}(\mathbf{x}_{\alpha\beta} - 0, 5\mathbf{R}_p^\beta(\xi), t - 0, 5\xi; \mathbf{Y} + \mathbf{R}_p^\beta(\xi), \xi) \rangle \approx \\ & \approx \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle - \frac{\xi}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle + \left\langle \left(\langle V_{\beta k} \rangle + v_{\beta k}^\beta(\xi) \right) \frac{\partial E_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_k} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle = \langle E_{ij}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}, t; \mathbf{Y} + \mathbf{R}_p^\beta(\xi), \xi) \rangle$$

При подстановке выражений (1.17), (1.13) и (1.14) в (1.7) возникают функции, описывающие отклик частиц на пульсации скорости несущей фазы

$$\begin{aligned}
 \int_0^t A \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle \frac{d\xi}{\tau_p} &= q_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta}, \quad T_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}, \mathbf{Y}) = \langle u_{\alpha i} u_{\beta j} \rangle \\
 \int_0^t \frac{\xi}{\tau_p} A \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle \frac{d\xi}{\tau_p} &= p_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta} \\
 \int_0^t \left\{ \frac{\xi}{\tau_p} (1+A) - 2(1-A) \right\} \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle \frac{d\xi}{\tau_p} &= h_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta} \\
 \int_0^t (1-A) \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle \frac{d\xi}{\tau_p} &= g_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta}, \quad A = \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_p}\right)
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Вид функции $h_{\alpha\beta}$ при $\alpha = \beta$ совпадает с полученным ранее в [3]. Характерный временной масштаб корреляции в (1.18) порядка макромасштаба турбулентности T_E в представлении Эйлера. Корреляция пульсаций скорости задается в виде, удовлетворяющем при $\xi = 0$ или $\mathbf{Y} = 0$ условию равновесия

$$\frac{\partial E_{ij}(\mathbf{Y}, \xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial E_{ij}(\mathbf{Y}, \xi)}{\partial Y_k} = 0$$

Для инерционных частиц $\tau_p \gg T_E$ из (1.18) следует

$$q_{\alpha\beta} \sim T_E / \tau_p, \quad p_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta} \sim (T_E / \tau_p)^2, \quad h_{\alpha\beta} \sim (T_E / \tau_p)^4 \tag{1.19}$$

В противоположном случае $\tau_p \ll T_E$ имеем

$$q_{\alpha\beta} \rightarrow p_{\alpha\beta} \rightarrow 1, \quad g_{\alpha\beta} \sim T_E / \tau_p, \quad h_{\alpha\beta} \sim (T_E / \tau_p)^2 \tag{1.20}$$

В результате подстановки (1.18) в (1.7) находим выражение для корреляции $\langle u_{\alpha} \Phi_{12} \rangle$ в случае инерционных частиц ($\tau_p > T_E$)

$$\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle = - \sum_{\beta=1}^2 \left[\tau_p G_{\alpha\beta}^{\circ} T_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial x_{\beta j}} + Q_{\alpha\beta}^{\circ} T_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial v_{\beta j}} \right] \tag{1.21}$$

$$G_{\alpha\beta}^{\circ} T_{ij}^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta} + \tau_p h_{\alpha\beta} T_{ik}^{\alpha\beta} \frac{\partial \langle V_{\beta j} \rangle}{\partial x_k}$$

$$Q_{\alpha\beta}^{\circ} T_{ij}^{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta} - \frac{\tau_p p_{\alpha\beta}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} T_{ij}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\langle V_{\alpha k} \rangle + \langle V_{\beta k} \rangle) \frac{\partial T_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (S_{ik,j}^{\alpha\beta} + S_{i,jk}^{\alpha\beta}) + T_{ik}^{\alpha\beta} \frac{\partial \langle V_{\beta j} \rangle}{\partial x_k} + T_{jk}^{\alpha\beta} \frac{\partial \langle V_{\alpha i} \rangle}{\partial x_k} \right]$$

$$S_{ik,j}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}, \mathbf{Y}) = \langle u_{\alpha i} u_{\alpha k} u_{\beta j} \rangle$$

В отличие от [3, 13] в корреляцию (1.2) входят не только слагаемые, связанные с пульсациями скорости несущей фазы и градиентом скорости дисперсной, но и члены, представляющие нестационарность, конвективный и турбулентный диффузионный перенос интенсивности хаотического движения частиц.

Для частиц с малой инерцией $\tau_p \ll T_E$ необходимо учитывать микроструктуру турбулентности. Для расчета корреляции пульсаций скоростей несущей фазы и частиц в

(1.7) записываем

$$\langle u_{\alpha i} v_{\beta j} \rangle = \frac{1}{\tau_p} \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_p}\right) \langle u_{\alpha i} u_j(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{R}_p^\beta(\xi), t - \xi) \rangle d\xi \quad (1.22)$$

В результате интегрирования (1.22) по частям получаем

$$\langle u_{\alpha i} v_{\beta j} \rangle = T_{ij}^{\alpha\beta} + \int d\mathbf{Y}_p \int_0^t A \left\langle G(\mathbf{Y}_p, \xi) \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} u_{\alpha i} u_j(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{Y}_p, t - \xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - V_{pk}^\beta(t - \xi) \frac{\partial}{\partial x_{\beta k}} u_{\alpha i} u_j(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{Y}_p, t - \xi) \right\} \right\rangle d\xi \quad (1.23)$$

$$G_p(\mathbf{Y}_p, \xi) = \delta(\mathbf{Y}_p - \mathbf{R}_p(\xi))$$

Здесь $G_p(\mathbf{Y}_p, \xi)$ – плотность вероятности перехода частицы за время ξ на расстояние $\mathbf{R}_p(\xi)$. Из (1.23) следует, что существенный вклад в корреляцию (1.22) вносит конвективный перенос, связанный с различием в лагранжевых траекториях частиц и элементов сплошной среды. Выражение для третьих моментов скорости в (1.23) следует из уравнения баланса двухточечной корреляции флуктуаций скорости несущей фазы на траектории частицы

$$-\left\langle V_{pk}^\alpha \frac{\partial D_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha k}} + V_{pk}^\beta \frac{\partial D_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta k}} \right\rangle + \frac{\partial \langle D_{ij}^{\alpha\beta} \rangle}{\partial t_{\alpha\beta}} = \\ = -\left\langle U_{\alpha k} \frac{\partial D_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha k}} + U_{\beta k} \frac{\partial D_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta k}} \right\rangle - \langle D_{ik}^{\alpha\beta} \rangle \frac{\partial \langle U_{\beta j} \rangle}{\partial x_k} - \langle D_{jk}^{\alpha\beta} \rangle \frac{\partial \langle U_{\alpha i} \rangle}{\partial x_k} - \\ - \frac{1}{\rho_f} \left\langle \frac{\partial u_{\alpha i} P_\beta}{\partial x_{\beta j}} + \frac{\partial u_{\beta j} P_\alpha}{\partial x_{\alpha i}} \right\rangle + \nu_f \left\langle \frac{\partial^2 D_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha k} \partial x_{\alpha k}} + \frac{\partial^2 D_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta k} \partial x_{\beta k}} \right\rangle \quad (1.24)$$

$$\langle D_{ij}^{\alpha\beta} \rangle = \langle u_i(\mathbf{R}_p^\alpha, t_\alpha) u_j(\mathbf{R}_p^\beta, t_\beta) \rangle$$

Из сравнения выражений (1.7), (1.21) и (1.23), (1.24) следует, что в корреляции $\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle$ появляются дополнительные слагаемые, связанные с микроструктурой турбулентности. Интенсивность хаотического движения примеси малоинерционных частиц определяется не только энергоемкими флуктуациями скорости, но и динамикой переноса энергии по спектру, обменными членами, а также вязкими напряжениями в сплошной среде. Степень участия частиц в различных механизмах мелкомасштабного переноса турбулентной энергии определяется характерными временами затухания автокорреляционных функций в слагаемых (1.24). Точное выражение получается для функции вовлечения примеси в процесс диссипации энергии (последние члены в (1.24))

$$q_{\alpha\beta}'' \left\langle \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_k} \frac{\partial u_{\beta j}}{\partial x_k} \right\rangle = - \int_0^t A \frac{\partial^2}{\partial Y_k \partial Y_k} \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle \frac{d\xi}{\tau_p} \quad (1.25)$$

Характерное время затухания корреляции в (1.25) порядка временного микромасштаба турбулентности. Корреляции с пульсациями давления имеют существенно нелокальный характер, однако временной масштаб перераспределения турбулентной энергии между различными направлениями порядка интегрального макромасштаба турбулентности. Слагаемые в (1.23), (1.24) аппроксимируются в виде, удовлетворяющем требованию уменьшения вклада в корреляцию $\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle$ внутренней структуры с ростом инерционности частиц. Приближенное выражение для $\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle$ во всем диапа-

зоне времен динамической релаксации частиц записывается в виде, аналогичном (1.21) с модифицированным коэффициентом $Q_{\alpha\beta}$, в которой включены по сравнению с выражением (1.21) дополнительные члены

$$\begin{aligned}
 Q_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta} &= Q_{\alpha\beta}^{\circ} T_{ij}^{\alpha\beta} + \tau_p \nu_f q_{\alpha\beta}'' \frac{\partial^2 T_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial Y_k \partial Y_k} - \\
 &- \frac{\tau_p P_{\alpha\beta}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{\rho_f} (\langle P_{\alpha} u_{\beta j} \rangle \delta_{ik} + \langle P_{\beta} u_{\alpha i} \rangle \delta_{jk}) - \frac{\nu_f}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ij}^{\alpha\beta} \right] - \right. \\
 &\left. - \frac{\partial}{\partial Y_k} (S_{ik,j}^{\alpha\beta} - S_{i,kj}^{\alpha\beta}) - \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial}{\partial Y_i} \langle P_{\alpha} u_{\beta j} \rangle - \frac{\partial}{\partial Y_j} \langle P_{\beta} u_{\alpha i} \rangle \right) \right\} \quad (1.26)
 \end{aligned}$$

Выражения (1.6), (1.7), (1.21) и (1.26) представляют замкнутое уравнение для двухточечной функции плотности вероятности частиц.

2. Уравнение для первых и вторых моментов пульсаций скорости дисперсной и сплошной фаз. Из уравнения для функции плотности вероятности следует система уравнений для моментов пульсаций скорости частиц. Уравнения для концентрации и осредненной скорости дисперсной фазы имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle C \rangle \langle V_i \rangle &= 0 \\
 \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} &= \frac{\langle U_i \rangle + \tau_p g_i - \langle V_i \rangle}{\tau_p} - \frac{D_{ik}^p}{\tau_p} \frac{\partial \ln \langle C \rangle}{\partial x_k} \\
 D_{ik}^p &= \tau_p (\langle v_i v_k \rangle + G_{\alpha\alpha}^{\circ} \langle u_i u_k \rangle) \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Здесь D_{ik}^p – коэффициент турбулентной диффузии частиц, учитывающий их хаотическое движение и неоднородность осредненной скорости дисперсной фазы. В отличие от [13] в выражение для коэффициента диффузии частиц (2.1) входит производная от осредненной скорости именно дисперсной, а не несущей фазы. Это представляется более коррективным, так как поле осредненной скорости частиц формируется в результате перемещения со скоростью течения и при столкновениях частиц с поверхностью.

Уравнение для вторых двухточечных моментов пульсаций скорости дисперсной фазы вытекает из уравнения для плотности вероятности частиц

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} (\langle V_{\alpha k} \rangle + \langle V_{\beta k} \rangle) \frac{\partial Z_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial x_k} + (\langle V_{\alpha k} \rangle - \langle V_{\beta k} \rangle) \frac{\partial Z_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial Y_k} + \\
 + \frac{1}{2 \langle C_{12} \rangle} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle C_{12} \rangle (H_{ik,j}^{\alpha\beta} + H_{i,kj}^{\alpha\beta}) + \frac{1}{\langle C_{12} \rangle} \frac{\partial}{\partial Y_k} \langle C_{12} \rangle (H_{ik,j}^{\alpha\beta} - H_{i,kj}^{\alpha\beta}) + \\
 + Z_{ik}^{\alpha\beta} \frac{\partial \langle V_{\beta j} \rangle}{\partial x_k} + Z_{jk}^{\alpha\beta} \frac{\partial \langle V_{\alpha i} \rangle}{\partial x_k} = \frac{2}{\tau_p} (Q_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta} - Z_{ij}^{\alpha\beta}) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

$$Z_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}, \mathbf{Y}) = \langle v_{\alpha i} v_{\beta j} \rangle, \quad H_{ik,j}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}, \mathbf{Y}) = \langle v_{\alpha i} v_{\alpha k} v_{\beta j} \rangle$$

Здесь третий двухточечный момент пульсаций скорости равен

$$\langle v_{\alpha i} v_{\beta j} v_{\beta k} \rangle \langle C_{12} \rangle = \int d\mathbf{v}_{\alpha} \int v_{\alpha i} v_{\beta j} v_{\beta k} \langle \Phi_{12} \rangle d\mathbf{v}_{\beta}$$

Слагаемые с производными от третьих корреляций по координате $\mathbf{x}_{\alpha\beta}$ представляют турбулентный перенос энергии дисперсной фазы в результате пространственной неоднородности. Производные от третьих моментов по относительной координате \mathbf{Y} описывают передачу пульсационной энергии дисперсной фазы по спектру. Член в правой части (2.2) представляет источник хаотического движения частиц. Из поведения функции (1.19), (1.20) и выражений (1.21), (1.26) следует, что основным источником турбулентного движения примеси является участие в энергоемких флуктуациях скорости несущей фазы $Q_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta} \approx q_{\alpha\beta} T_{ij}^{\alpha\beta}$.

Межфазное слагаемое в уравнении для осредненной скорости несущей среды определяется на основе корреляции $\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle u_i u_k \rangle - v_f \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \right) = \\ & = - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} - \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{1}{\tau_p} [\langle C u_i \rangle + \langle C \rangle (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle)] \\ & \langle u_{\alpha i} C(\mathbf{x}_{\beta i}, t) \rangle = -\tau_p G_{\alpha\beta}^{\circ} T_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x_{\beta j}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обратное влияние частиц на турбулентность и распределение турбулентной энергии по спектру описывается в уравнении для вторых моментов пульсаций скорости несущей фазы слагаемым

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{\rho_p}{\rho_f} \left\langle \sum_{p=1}^N \frac{\omega_p}{\Omega_N} \delta(\mathbf{x}_{\beta} - \mathbf{R}_p^{\beta}) \frac{1}{\tau_p} (U_{\beta j} - V_{\beta j}^{\beta}) u_{\alpha i} \right\rangle \quad (2.4)$$

Используя в (2.4) выражения для $\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle$ при $\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{x}_{\beta} \rightarrow \mathbf{x}$, получаем уравнение для вторых одноточечных моментов скорости несущей среды

$$\begin{aligned} & (1 + p_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + (\langle U_k \rangle + p_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle \langle V_k \rangle) \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \\ & + \langle u_j u_k \rangle \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + p_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \right) + \langle u_i u_k \rangle \left(\frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + p_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} \right) = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ (1 + p_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) \left[\langle u_i u_j u_k \rangle + \left\langle \frac{P}{\rho_f} (u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}) \right\rangle - \right. \right. \\ & \left. \left. - v_f \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} \right] \right\} + (1 + p_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) \left\langle \frac{P}{\rho_f} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle - \\ & - 2 v_f (1 + q_{\alpha\alpha}' \langle G_p \rangle) \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + 2 \frac{\langle G_p \rangle}{\tau_p} (1 - q_{\alpha\alpha}) \langle u_i u_j \rangle + \\ & + \left[(\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) \left(g_{\alpha\alpha} \langle u_j u_k \rangle + \tau_p h_{\alpha\alpha} \langle u_j u_n \rangle \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_n} \right) + \right. \\ & \left. + (\langle U_j \rangle - \langle V_j \rangle) \left(g_{\alpha\alpha} \langle u_i u_k \rangle + \tau_p h_{\alpha\alpha} \langle u_i u_n \rangle \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_n} \right) \right] \frac{\partial \langle G_p \rangle}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\langle G_p \rangle = \langle C \rangle \rho_p / \rho_f$ — массовая концентрация частиц примеси.

Из (2.5) видно, что частицы дают вклад во все механизмы переноса турбулентной энергии несущей фазы. Вклад примеси зависит от времени релаксации частиц и характерного времени затухания корреляций, вызывающих определенный процесс переноса. Появляются также дополнительные слагаемые, вызванные флуктуациями относительной скорости фаз и неоднородностью концентрации примеси. Из поведения функций реакции частиц (1.19), (1.20) следует, что по мере снижения инерционности и вовлечения примеси в энергоемкое турбулентное движение вклад дополнительной диссипации из-за пульсационного скоростного скольжения уменьшается. Однако в результате участва частиц в мелкомасштабном движении увеличивается роль примеси в турбулентной диссипации. Процесс изменения диссипации в несущей фазе связан с дополнительным переносом турбулентной энергии по спектру в двухфазном потоке и исследуется на основе уравнения для вторых двухточечных моментов

$$(1 + p_{\alpha\beta} \langle G_p \rangle) \frac{\partial T_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial t} = -(1 + p_{\alpha\beta} \langle G_p \rangle) \left\{ \frac{\partial}{\partial Y_k} (S_{ik,j}^{\alpha\beta} - S_{i,jk}^{\alpha\beta}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial}{\partial Y_i} \langle P_{\alpha} u_{\beta j} \rangle - \frac{\partial}{\partial Y_j} \langle u_{\alpha i} P_{\beta} \rangle \right) \right\} + 2\nu_f (1 + q_{\alpha\beta}' \langle G_p \rangle) \frac{\partial^2 T_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial Y_k \partial Y_k} - \frac{2 \langle G_p \rangle}{\tau_p} (1 - q_{\alpha\beta}) T_{ij}^{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

Слагаемые в правой части уравнения (2.6) представляют инерционный перенос энергии по спектру, механизм "стремления к изотропии", связанный с пульсациями давления, а также диссипация турбулентности в результате скоростного пульсационного скольжения фаз (последнее слагаемое).

Для очень инерционных частиц $\tau_p \gg T_E$ функции отклика частиц на флуктуации скорости в (2.5), (2.6) стремятся к нулю и эффект обратного влияния примеси на турбулентность исчезает. В случае частиц очень малой инерционности $\tau_p \ll T_\lambda$ уравнения (2.5) и (2.6) совпадают с уравнением однофазной среды с градиентом плотности.

3. Уравнение для турбулентной диссипации двухфазной среды. Влияние частиц на турбулентную диссипацию несущей фазы описывается межфазным слагаемым, которое следует из (1.1) при $x_\beta, x_\alpha \rightarrow x$

$$\beta_{ii}^p = 2\nu_f \frac{\rho_p}{\rho_f} \left\langle \sum_{p=1}^N \frac{\omega_p}{\Omega_N} \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \partial(x_\beta - \mathbf{R}_p^\beta)(U_{\beta i} - V_{\beta i}^\beta) \right\rangle \quad (3.1)$$

Используя выражения для корреляции $\langle u_{\alpha i} \Phi_{12} \rangle$, получаем аналогично [14] незамкнутое уравнение для диссипации при больших числах Рейнольдса турбулентности

$$(1 + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\langle U_k \rangle + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle \langle V_k \rangle) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \\ = -2\nu_f \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right\rangle \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_n} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(1 + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) \left(\langle u_k \epsilon' \rangle + 2 \frac{\nu_f}{\rho_f} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\rangle \right) \right] + \\ + 2\nu_f (1 + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right\rangle - 2\nu_f^2 (1 + q_{\alpha\alpha}^{\text{IV}} \langle G_p \rangle) \left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_n} \right\rangle - \\ - 2 \frac{\langle G_p \rangle}{\tau_p} (1 - q''_{\alpha\alpha}) \epsilon + \frac{2}{3} g''_{\alpha\alpha} \epsilon (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) \frac{\partial \langle G_p \rangle}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

Из (3.2) видно, что участие частиц в мелкомасштабном движении интенсифицирует процессы переноса и генерации турбулентной диссипации. Появляются дополнительные слагаемые, связанные с пульсационным скоростным скольжением фаз и неоднородностью концентрации примеси. Функции реакции частиц на мелкомасштабные флуктуации скорости несущей фазы в (3.2) равны

$$\begin{aligned}
 P''_{\alpha\beta} \left\langle \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_k} \frac{\partial u_{\beta j}}{\partial x_k} \right\rangle &= - \int_0^1 \frac{\xi}{\tau_p} A \frac{\partial^2}{\partial Y_k \partial Y_n} \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle \frac{d\xi}{\tau_p} \\
 g''_{\alpha\beta} \left\langle \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_k} \frac{\partial u_{\beta j}}{\partial x_k} \right\rangle &= - \int_0^1 (1-A) \frac{\partial^2}{\partial Y_k \partial Y_k} \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle \frac{d\xi}{\tau_p} \\
 q''_{\alpha\beta} \left\langle \frac{\partial^2 u_{\alpha i}}{\partial x_k \partial x_n} \frac{\partial^2 u_{\beta j}}{\partial x_k \partial x_n} \right\rangle &= \int_0^1 A \frac{\partial^4}{(\partial Y_k)^2 (\partial Y_n)^2} \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle \frac{d\xi}{\tau_p}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Условие равновесия на микромасштабах при $\xi = 0$ или $Y = 0$ накладывает ограничения на вид автокорреляционной функции в (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^{2n} \langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle}{\partial^{2n} Y_k} = 0, \quad n = 1, 2$$

В уравнении для турбулентной диссипации, за исключением слагаемых с конвективным переносом и нестационарностью, моделируются все члены. В уравнение (3.2) неявно входят три различных временных масштаба. Во-первых, макромасштаб изменения осредненных параметров. Во-вторых, слагаемые, связанные с диффузионным переносом, порождением диссипации из осредненного движения и неоднородностью концентрации, аналогичны переносу и генерации турбулентной энергии и имеют характерное время порядка интегрального макромасштаба. В-третьих, на микромасштабах реализуется процесс искажения микровихрей (слагаемое с третьими корреляциями производных) и вязкая диссипация микропульсаций (слагаемое с производением вторых производных). Характерный временной масштаб этих процессов порядка микромасштаба турбулентности

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_{ma}, t_{mi}) = \varepsilon(t, T_\lambda t / T_\varepsilon) \tag{3.5}$$

Скорость изменения турбулентной диссипации однофазной среды на линии тока равна

$$\begin{aligned}
 \frac{D\varepsilon}{Dt} &= \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{ma} + \frac{T_\lambda}{T_\varepsilon} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{mi}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \\
 \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{mi} &= -2\nu_f \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right\rangle - 2\nu_f^2 \left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_n} \right\rangle = \frac{P_\varepsilon - D_\varepsilon}{T_\lambda} = -\frac{\varepsilon}{T_\lambda}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь T_ε – время переноса пульсационной энергии от энергоемких вихрей к микровихрям $T_\varepsilon = E/(C_{2\varepsilon}\varepsilon) \sim T_E \gg T_\lambda$, $C_{2\varepsilon}$ – константа модели, $P_\varepsilon, D_\varepsilon$ – порождение микровихрей за счет их деформации в поле энергоемких вихрей и вязкая диссипация микрофлуктуаций. В двухфазном потоке скорость изменения турбулентной диссипации на микромасштабах имеет вид

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{mi} = \frac{(1 + P''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) P_\varepsilon - (1 + q''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) D_\varepsilon}{T_\lambda} - \langle G_p \rangle \frac{\varepsilon}{T_\lambda} f''_{\alpha\alpha} \tag{3.7}$$

где $\Omega_\lambda = \tau_p/T_\lambda$ – параметр инерционности частиц, ответственный за вовлечение примеси в микромасштабное движение, $f''_{\alpha\alpha} = (1 - q''_{\alpha\alpha})/\Omega_\lambda$.

Используя методы замыкания слагаемых в (3.2) с порождением и турбулентной диффузией [14], получаем уравнение для диссипации двухфазного потока при больших числах Рейнольдса турбулентности

$$\begin{aligned}
 & (1 + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\langle U_k \rangle + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle \langle V_k \rangle) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \\
 & = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{E} \langle u_i u_k \rangle \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left((1 + p''_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) C_{\varepsilon} \frac{E}{\varepsilon} \langle u_k u_n \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \right) - \\
 & - C_{2\varepsilon} \left[[1 + (p''_{\alpha\alpha} + f''_{\alpha\alpha}) \langle G_p \rangle] - (p''_{\alpha\alpha} - q''_{\alpha\alpha}) \langle G_p \rangle \chi_{\varepsilon} \right] \frac{\varepsilon^2}{E} + \frac{2}{3} g''_{\alpha\alpha} \varepsilon (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) \frac{\partial \langle G_p \rangle}{\partial x_i} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Здесь C_{ε} , $C_{\varepsilon 1}$ – постоянные модели, значения параметра $D_{\varepsilon}/T_{\lambda}$ и отношение $\chi_{\varepsilon} = D_{\varepsilon}/\varepsilon > 1$ получены в следующем разделе.

Для частиц, время динамической релаксации которых значительно превосходит временной микромасштаб турбулентности, функции реакции частиц на мелкомасштабные флуктуации скорости уменьшаются и влияние частиц на микроструктуру пропадает. Если время динамической релаксации существенно меньше временного микромасштаба, уравнение (3.8) переходит в уравнение однофазной среды с неоднородной плотностью.

4. Расчет временных масштабов. Функции реакции частиц на турбулентные флуктуации определяются значениями корреляции пульсаций скорости несущей фазы на траектории частиц

$$\langle E_{ij}^{\alpha\beta} \rangle = \int \langle E_{ij}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}, t; \mathbf{Y} + \mathbf{Y}_p, \xi) G_p(\mathbf{Y}_p, \xi) \rangle d\mathbf{Y}_p \quad (4.1)$$

За время жизни энергоемких вихрей амплитуда хаотической скорости инерционных частиц меняется незначительно и перемещение частиц равно

$$R_{pi}(\xi) \approx (\langle W_i \rangle + v_i) \xi, \quad \langle W_i \rangle = \langle V_i \rangle - \langle U_i \rangle \quad (4.2)$$

где $\langle \mathbf{W} \rangle$ – относительная осредненная скорость дисперсной фазы, v_i – характерная амплитуда пульсаций скорости дисперсной примеси, индекс $\alpha\beta$ в обозначении корреляций скорости в дальнейшем опускается.

Считая пульсации скорости частиц нормальным случайным процессом, из (4.1) и (4.2) получаем выражение для корреляции пульсаций скорости

$$\langle E_{ij}(\mathbf{Y} + \mathbf{R}_p^{\beta}(\xi), \xi) \rangle \approx \int E_{ij}(\mathbf{Y} + (\langle \mathbf{W} \rangle + \mathbf{v})\xi, \xi) \varphi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (4.3)$$

$$\varphi(\mathbf{v}) = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{(2\pi Z_{ii}^{\alpha\beta})^{1/2}} \exp\left(-\frac{v_i^2}{2Z_{ii}^{\alpha\beta}}\right)$$

Здесь $\varphi(\mathbf{v})$ – плотность вероятности пульсаций скорости частиц. Временной интегральный масштаб флуктуаций скорости несущей фазы на траектории частиц, входящий в выражения (1.18), вычисляется на основе (4.3)

$$T_{pE} = \langle u_i u_j \rangle^{-1} \int_0^{\infty} d\mathbf{v} \int E_{ij}(\langle \mathbf{W} \rangle + \mathbf{v})\xi, \xi) \varphi(\mathbf{v}) d\xi \quad (4.4)$$

Для частиц малой инерционности $\tau_p \sim T_{\lambda} \ll T_E$ – временные масштабы корреляций в (1.25), (3.3) соответствуют инерционному интервалу спектра. Преобразование Фурье корреляционных функций (4.1) приводит к выражению

$$\langle E_{ij}(\mathbf{Y} + \mathbf{R}_p(\xi), \xi) \rangle = \int E_{ij}(k, \xi) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Y}) \langle \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_p) \rangle d\mathbf{k} \quad (4.5)$$

$$E_{ij}(k, \xi) = (4\pi k^2)^{-1} E(k, t) (\delta_{ij} - k^{-2} k_i k_j), \quad d\mathbf{k} = dk_1 dk_2 dk_3$$

Частицы с малой инерцией вовлекаются в энергоемкое хаотическое движение несущей фазы. Частота изменений скорости частиц значительно ниже частоты микропульсаций скорости сплошной среды. Поэтому смещение частиц за время жизни микропульсаций также можно аппроксимировать выражением (4.2). Полагая энергоемкие флуктуации скорости нормальным случайным процессом, получаем из (4.2), (4.5)

$$\langle E(\mathbf{Y} + \mathbf{R}_p(\xi), \xi) \rangle = \int E_p(\mathbf{k}, \xi) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Y}) d\mathbf{k}$$

$$E_p(\mathbf{k}, \xi) = E(\mathbf{k}, \xi) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{W} \rangle \xi - 0,5k^2 \langle v^2 \rangle \xi^2] \quad (4.6)$$

В системе координат, связанной с осредненной скоростью потока, инерционный диапазон спектра в переменных Эйлера аппроксимируется в виде [15]

$$E(k, \xi) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \exp[-\alpha(k\eta)^{4/3} - (\omega_k \xi)^2] \quad (4.7)$$

Здесь $\omega_k = \varepsilon^{1/3} k^{2/3} / \beta$ – частота, обусловленная затуханием вихрей в результате каскадного переноса энергии по спектру ($\beta \approx 1$), $\eta = (v_f^3 / \varepsilon)^{1/4}$ – пространственный микромасштаб Колмогорова, C_K – универсальная константа Колмогорова, параметр $\alpha = 3C_K/2$ соответствует условию

$$\varepsilon = 2v_f \int_0^\infty k^2 E(k, 0) dk \quad (4.8)$$

Из (4.5)–(4.7) следует, что эффективная частота микрофлуктуаций скорости жидкой фазы на траектории частицы равна

$$\omega_{pk} = \frac{uk}{\beta_p}, \quad \beta_p = \left\{ \frac{q\alpha\alpha}{2} \left[1 + \frac{2}{q\alpha\beta^2} \text{Re}_E^{-1/2}(k\eta)^{-2/3} \right] \right\}^{-1/2} \quad (4.9)$$

Здесь $\text{Re}_E = E^{1/2} L_E / v_f = E^2 / (v_f \varepsilon)$ – число Рейнольдса турбулентности, L_E – пространственный макромасштаб энергоемких флуктуаций.

Корреляции производных от пульсаций скорости имеют вид

$$\frac{\partial^{2n} \langle E_{ii}(\mathbf{R}_p(\xi), \xi) \rangle}{(\partial Y_k)^{2n}} = - \int_0^\infty k^{2n} E_p(k, \xi) dk, \quad n = 1, 2$$

Интегральные временные масштабы корреляций с производными от пульсаций скорости на траектории частицы находятся из соотношения

$$T_p^{(2n)} = \left[\int_{k_\lambda}^\infty k^{2n} E_p(k, 0) dk \right]^{-1} \left[\int_{k_\lambda}^\infty dk \int_0^\infty k^{2n} E_p(k, \xi) d\xi \right] \quad (4.10)$$

Здесь k_λ – граница диапазона вязкой диссипации, определяемая из условия $15v_f k_\lambda^2 E = \varepsilon$ ($k_\lambda^{-1} = \lambda$ – пространственный микромасштаб Тейлора [15, 16]). При вычислении (4.10) используется упрощающее предположение ($\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{W} \rangle = k \langle W \rangle$). В результате при $n = 1$ получаем выражение для временного микромасштаба корреляции произведения первых производных скорости несущей фазы на траектории частицы

$$T_p'' = \sqrt{\pi} \frac{\beta_p}{\beta_E} \frac{T_E}{\text{Re}_E^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}(\gamma\beta_p)^2\right] \sim \tau_\eta \quad (4.11)$$

Здесь интегральный временной масштаб энергоемких флуктуаций скорости жидкой фазы выражается через турбулентную энергию и диссипацию $T_E = \beta_E E / \varepsilon$ (β_E – константа), $\tau_\eta = (v_f \varepsilon)^{1/2}$ – временной микромасштаб Колмогорова, $\gamma = \langle W \rangle / u$ – параметр, описывающий влияние осредненного скольжения фаз на время контакта частиц с флуктуациями скорости.

Временной масштаб корреляции произведения вторых производных от пульсаций скорости жидкой фазы ($n = 2$) вычисляется из (4.10)

$$T_p^{IV} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(7/4)\alpha^{7/8}}{2\Gamma(5/2)} \frac{\beta_p}{\beta_E} \frac{T_E}{\text{Re}_E^{3/4}} \exp\left[-\frac{1}{4}(\gamma\beta_p)^2\right] \sim \frac{\eta}{u} \ll T_p'' \quad (4.12)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Временной масштаб, определяющий значение функции $q_{\alpha\alpha}^{IV}$, значительно меньше временного масштаба в функциях $q_{\alpha\beta}'', p_{\alpha\beta}'', \delta_{\alpha\beta}'',$ входящих в уравнение для диссипации (3.8).

Вязкая диссипация микромасштабных пульсаций скорости сплошной среды в уравнении для диссипации (3.6) и (3.7) имеет вид

$$\frac{D_\epsilon}{T_\lambda} = 2\nu_f^2 \int_0^\infty k^4 E(k,0) dk = \frac{3}{2} C_K \frac{\Gamma(5/2)}{\alpha^{5/2}} \text{Re}_E^{1/2} \frac{\epsilon^2}{E} \quad (4.13)$$

Временной масштаб микрофлуктуаций скорости несущей фазы в инерционном диапазоне спектра и значение параметра χ_ϵ в (3.8) определяется для эйлеровой корреляции (4.7)

$$T_\lambda = \frac{3\pi}{4} \beta \alpha^{5/4} \frac{E}{\epsilon} \text{Re}_E^{-1/2} \sim \tau_\eta, \quad \chi_\epsilon = \frac{D_\epsilon}{\epsilon} = \frac{3\pi}{4} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \frac{\beta}{\alpha^{1/4}} > 1$$

5. Вырождение изотропного турбулентного дисперсного потока за решеткой. Из (2.5), (3.8) получаем систему уравнений для турбулентной энергии и диссипации в однородном, изотропном потоке с однородной концентрацией примеси

$$(1 + p_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle) \frac{\partial E}{\partial t} + (\langle U_x \rangle + p_{\alpha\alpha} \langle G_p \rangle \langle V_x \rangle) \frac{\partial E}{\partial x} = - (1 + \langle G_p \rangle q_{\alpha\alpha}'' + \beta_E^{-1} \langle G_p \rangle f_{\alpha\alpha}) \epsilon, \quad f_{\alpha\alpha} = (1 - q_{\alpha\alpha}) \Omega_E^{-1} \quad (5.1)$$

$$(1 + p_{\alpha\alpha}' \langle G_p \rangle) \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\langle U_x \rangle + p_{\alpha\alpha}' \langle G_p \rangle \langle V_x \rangle) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = - C_{2\epsilon} \{ [1 + (p_{\alpha\alpha}'' + f_{\alpha\alpha}') \langle G_p \rangle] - (p_{\alpha\alpha}'' - q_{\alpha\alpha}^{IV}) \langle G_p \rangle \chi_\epsilon \} \frac{\epsilon^2}{E} \quad (5.2)$$

где $\Omega_E = \tau_p / T_E$ – параметр инерционности, регулирующий вовлечение частиц в энергоемкое хаотическое движение.

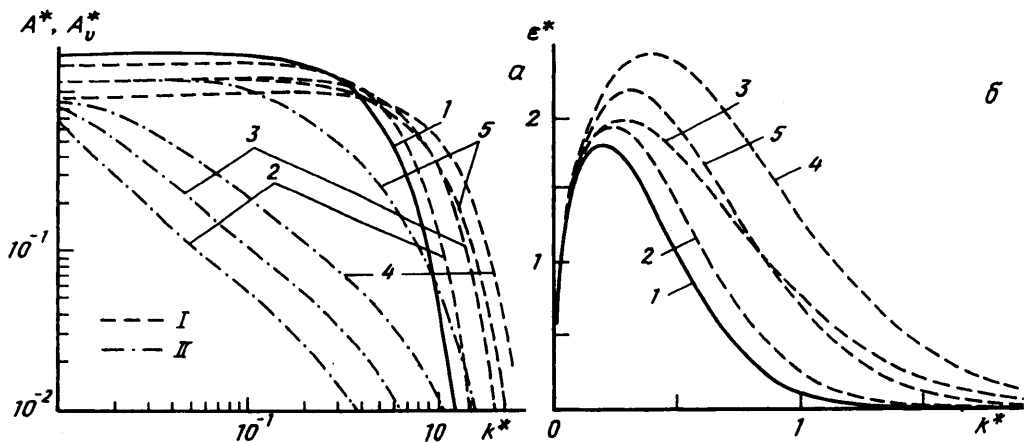
Влияние частиц на турбулентную диссипацию получается, с одной стороны, из решения уравнения (5.2). С другой стороны, величина диссипации оценивается на основе распределения турбулентной энергии несущей фазы по спектру (4.8).

Искажение микроструктуры турбулентности реализуется для малоинерционных частиц $\tau_p \sim T_\lambda \ll T_E$, которые полностью вовлекаются в энергоемкое турбулентное движение ($f_{\alpha\beta} = 0$). Участие частиц в турбулентном движении увеличивает интенсивность передачи турбулентной энергии по спектру. Расчет спектра турбулентной энергии двухфазной среды в инерционном интервале основан на теории [16]. Характерное время переноса энергии по спектру аппроксимируется выражением

$$T_{in}(k) = \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} + \tau_\eta \quad (5.4)$$

В инерционном интервале поток энергии по спектру постояен, что позволяет записать уравнение для спектра несущей фазы в присутствии частиц

$$\frac{d}{dk} \left\{ \frac{kE(k)}{C_K T_{in}(k)} [1 + \langle G_p \rangle p_{\alpha\alpha}(k_E)] \right\} = -2\nu_f k^2 E(k) [1 + \langle G_p \rangle q_{\alpha\alpha}''(k)]$$



Фиг. 1. Влияние дисперсной примеси на распределение пульсационной энергии (а) и диссипации по спектру (б) ($Re_E = 10^4$): кривые 1 – однофазная среда, кривые 2–5 – поток с частицами при $\langle G_p \rangle = 2$ и $\Omega_\lambda = 20; 10; 5; 1$; кривые I, II – для несущей и дисперсной фаз

Здесь граничное значение пульсационной энергии сплошной среды определяется при $k \sim k_E$ ($k_E^{-1} = L_E$).

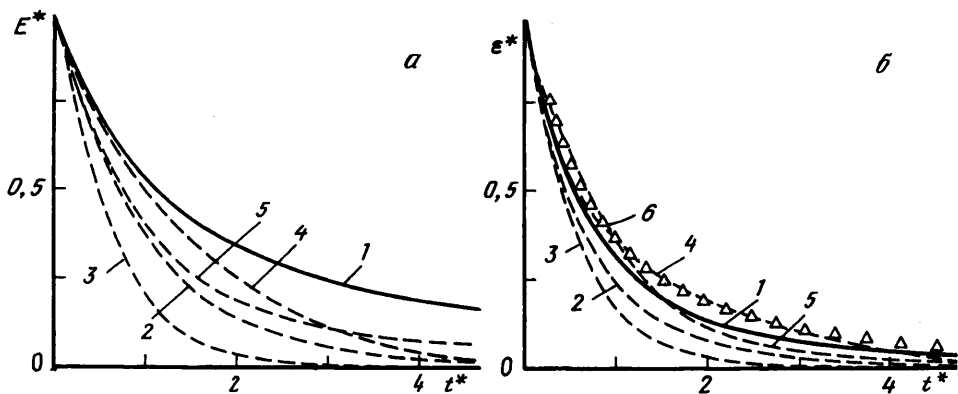
При исследовании распределения по волновым числам турбулентной энергии дисперсной фазы учитываем влияние инерции частиц во время переноса энергии по спектру $T_{pin}(k) = T_{in}(k) + \tau_p$. На основе уравнения для двухточечных корреляций пульсаций скорости дисперсной фазы (2.2) записываем

$$\frac{d}{dk} \left(\frac{kE_v(k)}{C_K T_{pin}(k)} \right) = -\frac{2}{\tau_p} (q_{\alpha\alpha}(k)E(k) - E_v(k))$$

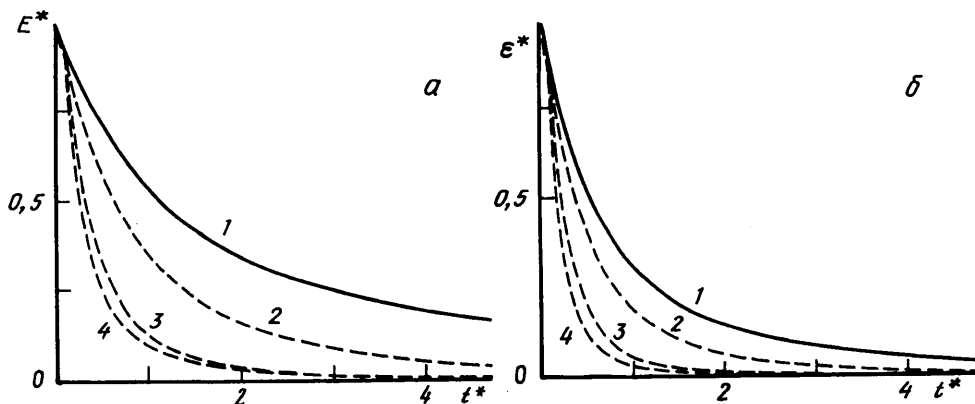
где $E_v(k)$ – преобразование Фурье двухточечной корреляции флуктуаций скорости дисперсной фазы. Граничное условие $E_v(k_E) = q_{\alpha\alpha}(k_E)E(k_E)$.

Фигура 1 иллюстрирует влияние частиц на микроструктуру турбулентности при различных значениях параметра инерционности частиц Ω_λ . На фигуре показаны зависимости параметров $A^* = (k^*)^{5/3} E^*(k^*)$, $A_v^* = (k^*)^{5/3} E_v^*(k^*)$ и $\epsilon^* = \epsilon/\epsilon_0$ (индекс ноль соответствует значению диссипации в однофазном течении) от безразмерного волнового числа $k^* = k\eta_0$ (здесь $E^*(k^*) = E(k)/(\nu_f^5 \epsilon_0)^{1/4}$). Степень влияния примеси на спектры немонотонно зависит от инерции частиц. Для частиц с $\Omega_\lambda \ll 1$ или $\Omega_\lambda \gg 1$ влияние примеси на спектры исчезает. Наибольшее воздействие реализуется при $\Omega_\lambda \sim 1$. При этом значение максимума диссипации увеличивается и смещается в сторону больших волновых чисел. Результаты качественно согласуются с данными экспериментов [4, 5] и прямого численного моделирования [6].

Динамика изменения характеристик при течении двухфазного потока за решеткой показана на фиг. 2. Здесь безразмерные переменные $i^* = i\epsilon_0/E_0$, $E^* = E/E_0$ (индексом ноль обозначены в данном случае значения в начальный момент времени). Примесь частиц подается в поток при $i^* = 0,1$. Наибольшее уменьшение интенсивности турбулентности по сравнению с однофазным потоком наблюдается при $\Omega_E = 1$, что соответствует максимальному значению $f_{\alpha\alpha}$ в (5.1). Ослабление энергоемких флуктуаций скорости снижает также величину диссипации (фиг. 2). С ростом параметра инерционности Ω_E влияние примеси частиц на турбулентность уменьшается. Для малоинерционных частиц $\Omega_\lambda \sim 1$ увеличивается турбулентная диссипация, что согласуется с данными прямого численного моделирования [6]. Точки б на фиг. 2 – результаты расчета диссипации по спектру сплошной среды (4.8).



Фиг. 2. Влияние частиц на вырождение энергии (а) и турбулентной диссипации (б) несущей фазы за решеткой ($Re_E = 10^4$): кривые 1 – однофазная среда, кривые 2–5 – поток с частицами при $\langle G_p \rangle = 1$ и $\Omega_E = 10; 1; 0,1; 0,01$; 6 – турбулентная диссипация по спектру



Фиг. 3. Результаты расчета по модели [1] энергии (а) и турбулентной диссипации (б) несущей фазы за решеткой ($Re_E = 10^4$): кривые 1 – однофазная среда, кривые 2–4 – поток с частицами при $\langle G_p \rangle = 1$ и $\Omega_E = 10; 1; 0,1$

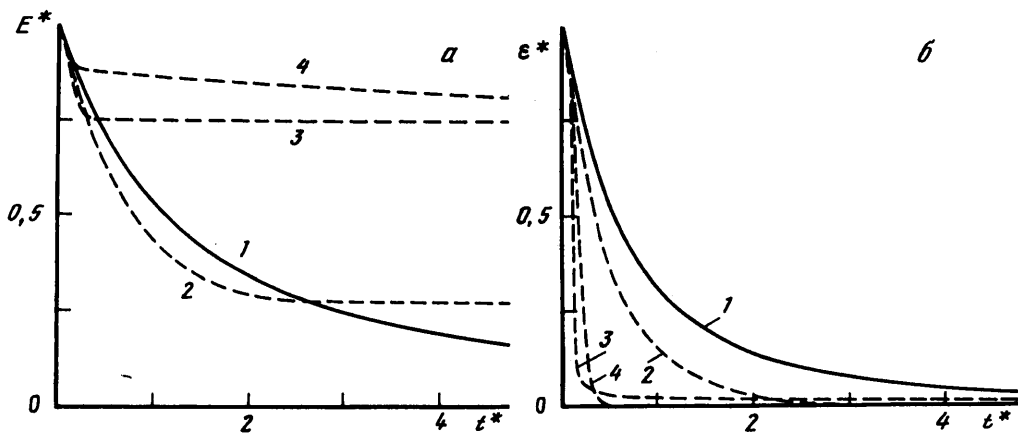
Рассмотрим модели двухфазного течения [1, 3], учитывающие только диссипативный характер воздействия примеси на турбулентность. Модель [2] отличается от [1, 3] значениями констант в межфазных слагаемых.

В [1] в уравнениях (5.1) и (5.2) $p_{\alpha\alpha} = p''_{\alpha\alpha} = q''_{\alpha\alpha} = q_{\alpha\alpha}^{IV} = 0$. Для функций, учитывающих межфазные слагаемые в [1], предложены формулы

$$f_{\alpha\alpha} = (1 + \Omega_E)^{-1}, \quad f''_{\alpha\alpha} = (1 + C_{t1}\Omega_E)^{-1}, \quad C_{t1} \approx 1,45$$

Результаты расчетов по модели [1] представлены на фиг. 3. Присутствие дисперсной примеси всегда приводит к снижению как турбулентной энергии, так и турбулентной диссипации. Причем степень искажения параметров турбулентности увеличивается с уменьшением инерционности частиц.

В [3] в уравнениях (5.1), (5.2) также $p_{\alpha\alpha} = p''_{\alpha\alpha} = q''_{\alpha\alpha} = q_{\alpha\alpha}^{IV} = 0$. Функция $f_{\alpha\alpha}$ в (5.1) совпадает с настоящей работой, а межфазное слагаемое в уравнении (5.2) моделируется выражением $f''_{\alpha\alpha} = \exp(-1/\Omega_\lambda)/\Omega_E$. При $\Omega_\lambda \sim 1$ функция, учитывающая влияние частиц на турбулентную диссипацию, становится аномально большой: $f''_{\alpha\alpha} \sim Re_E^{1/2}$,



Фиг. 4. Результаты расчета по модели [3] энергии (а) и турбулентной диссипации (б) несущей фазы за решеткой. Обозначения, как на фиг. 3

что приводит к резкому вырождению диссипации и нефизичному поведению турбулентной энергии несущей среды (фиг. 4). В случае инерционных частиц воздействие примеси на турбулентность в [3] также ослабевает.

Заключение. Представлена модель взаимного влияния примеси частиц и сплошной среды при двухфазном течении, в которой учитывается двойственный характер воздействия примеси на турбулентность. С одной стороны, инерция частиц приводит к пульсационному скоростному скольжению фаз. В результате вовлечение массы примеси в хаотическое движение требует работы со стороны несущей фазы. С другой стороны, участие частиц в энергоемких пульсациях интенсифицирует процессы порождения и переноса турбулентной энергии от макровихрей к мелкомасштабным флуктуациям, что приводит к изменению спектра сплошной среды. Модификация турбулентной микроструктуры в присутствии небольшой объемной концентрации примеси дает возможность целенаправленного управления такими макропараметрами потока, как гидравлическое сопротивление и интенсивность теплопереноса.

Работа выполнена при поддержке Международного фонда INTAS (грант 94-4348) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00-353).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газозвеси. Киев: Наук. думка, 1987. 239 с.
2. Rizk M.A., Elghobashi S.E. A two-equation turbulence model for dispersed dilute confined two-phase flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. № 1. P. 119–133.
3. Волков Э.П., Зайчик Л.И., Першуков В.А. Моделирование горения твердого топлива. М.: Наука, 1994. 320 с.
4. Rodgers C.B., Eaton J.K. The effect of small particles on fluid turbulence in flatplate, turbulent boundary layer in air // Phys. Fluids. A. 1991. V. 3. № 5. Pt 1. P. 928–937.
5. Schreck S., Kleis S.J. Modification of grid-generated turbulence by solid particles // J. Fluid Mech. 1993. V. 249. P. 665–688.
6. Elghobashi S., Truesdell G.C. On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. I. Turbulence modification // Phys. Fluids. A. 1993. V. 5. № 7. P. 1790–1801.
7. Деревич И.В. Спектр пульсаций скорости газа с частицами при однородной изотропной турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 69–74.
8. Деревич И.В. Спектр пульсаций скорости и температуры газа в турбулентном потоке газозвеси // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 55. № 1. С. 26–33.

9. Деревич И.В. Статистическое описание турбулентного потока газозвеси крупных частиц, соударяющихся со стенками канала // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 66. № 4. С. 387–397.
10. Деревич И.В. Влияние примеси крупных частиц на турбулентные характеристики газозвеси в каналах // ПМТФ. 1994. № 2. С. 70–78.
11. Деревич И.В. Столкновение частиц в турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 104–116.
12. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
13. Зайчик Л.И. Об уравнении для функции плотности вероятности скорости частиц в неоднородном турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 117–124.
14. Hanjalić K., Launder B.E. A Reynolds stress model of turbulence and its application for thin shear flows // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. № 4. P. 609–638.
15. Smith L.M., Reynolds W.C. The dissipation-range spectrum and the velocity derivative skewness // Phys. Fluids. A. 1991. 3. № 5. Pt 1. P. 992–994.
16. Driscoll R.J., Kennedy L.A. A model for the turbulent energy spectrum // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 5. P. 1228–1233.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1997