МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1998

УДК 532.135:539.374

© 1998 г. В.М. ЧЕСНОКОВ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТОНКОСЛОЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ СРЕД В ДЕФОРМИРУЕМЫХ КАНАЛАХ И ПОЛОСТЯХ

Поставлена и решена задача о пространственном течении вязкопластичной среды в тонком слое, ограниченном двумя деформируемыми материальными поверхностями, точки которых смещаются поперек слоя. Получены выражения для проекций скорости, расхода и уравнения для давления и границы области сдвигового течения.

В [1] приведен способ решения задачи о течении вязкопластичной среды между двумя параллельными пластинами, перемещающимися во взаимно перпендикулярных направлениях. В данной работе дается дальнейшее развитие этого способа решения уравнений Г. Генки, применимого в тех случаях, когда тензор напряжения сводится только к двум компонентам касательного напряжения. Плоская задача о течении вязкопластической среды в тонких слоях рассматривалась в [2]. Были даны постановки и решены некоторые задачи управления плоским течением вязкопластичных сред. Там же получены уравнения квазистационарного течения такой среды в приближении тонкого слоя

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{2}$$

$$\tau_{xz}=\left(\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z},\quad \tau_{yz}=\left(\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}$$

$$H=\sqrt{\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right)^2},\quad \tau=\sqrt{(\tau_{xz})^2+(\tau_{yz})^2}\geqslant\tau_0$$

Здесь p – давление, τ_{xz} и τ_{yz} – проекции касательного напряжения, μ – коэффициент динамической (пластический) вязкости, τ_0 – предельное напряжение сдвига.

Система уравнений (1), (2) записывается в векторной форме

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\quad \nabla p=\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z},\quad \boldsymbol{\tau}=\left(\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\frac{\partial \mathbf{v}_{xy}}{\partial z} \tag{3}$$

$$H=\left|\frac{\partial \mathbf{v}_{xy}}{\partial z}\right|,\quad \nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j},\quad \mathbf{v}_{xy}=\upsilon_x\mathbf{i}+\upsilon_y\mathbf{j}$$

Система уравнений (3) решается при следующих граничных условиях:

$$z = h_1(x,y,t):\ \mathbf{v}_{xy} = 0, \quad v_z = \frac{\partial h_1}{\partial t} \tag{4}$$

$$z = h_2(x,y,t):\ \mathbf{v}_{xy} = 0, \quad v_z = \frac{\partial h_2}{\partial t}$$

$$z = z_1(x,y,t):\ \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 \tag{5}$$

$$z = z_2(x,y,t):\ \boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau}_0$$

$$\mathbf{v}_{xy}(x,y,z_1,t) = \mathbf{v}_{xy}(x,y,z_2,t) = \mathbf{v}_0(x,y,t) \tag{6}$$

$$p|_{\Gamma_1} = p_1(x,y,t), \quad p|_{\Gamma_2} = p_2(x,y,t)$$

Здесь Γ_1 и Γ_2 – некоторые цилиндрические поверхности внутри слоя, на которых задается давление; $\boldsymbol{\tau}_0 = \tau_0 / H\partial\mathbf{v}_{xy} / \partial z$ – вектор предельного напряжения сдвига; h_1, h_2 – координаты z точек граничных поверхностей; z_1, z_2 – координаты точек границ "квазитвердой" области. Знаки перед вектором $\boldsymbol{\tau}_0$ в равенствах (5) выбираются в зависимости от знака проекции вектора $\partial\mathbf{v}_{xy}/\partial z$ на направление вектора $\mathbf{v}_{xy}$ для интервалов $z \in [h_1, z_1]$ и $z \in [z_2, h_2]$.

Эти граничные условия справедливы в приближении тонкого слоя, т.е. $\partial h_i/\partial x \sim h/l_1$, $\partial h_i/\partial y \sim h/l_2$, $h/l_i \ll 1$, $i = 1,2$; h – характерный поперечный размер слоя, например, его средняя толщина; l_1 и l_2 – характерные размеры слоя в направлениях осей x и y.

Интегрируя первое уравнение системы (3) по z и удовлетворяя граничным условиям (5), для касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}$ получим

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla p z + \mathbf{C}_1(x,y,t), \quad z \in [h_1, h_2] \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \nabla p z_1 + \mathbf{C}_1 = -\nabla p z_2 - \mathbf{C}_1, \quad \nabla p(z_2 - z_1) = -2\boldsymbol{\tau}_0 \tag{8}$$

Из выражений для касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}$ (3) и последнего равенства (8) следует, что векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}_0$, $\partial\mathbf{v}_{xy} / \partial z$ и ∇p коллинеарны, их направления не зависят от координаты z, а вектор ∇p направлен противоположно вектору $\boldsymbol{\tau}_0$. Как следует из первых двух равенств (8), постоянный вектор $\mathbf{C}_1$ также коллинеарен этим векторам. В этом случае выражения для координат z_1 и z_2 точек границ "квазитвердой" области, размера области сдвигового течения z_0, касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}$, градиента давления p и вектора $\mathbf{v}_{xy}$, проекции скорости точек среды на плоскость xy определяются из второго уравнения системы (3) и уравнения (7) с учетом (8) и граничных условий (4) и (5)

$$\mathbf{C}_1 = -\nabla p h_0, \quad z_1 = h_0 - \frac{\tau_0}{|\nabla p|}, \quad z_2 = h_0 + \frac{\tau_0}{|\nabla p|} \tag{9}$$

$$z_1 + z_2 = 2h_0, \quad z_1 - h_1 = h_2 - z_2 = z_0 = h - \frac{\tau_0}{|\nabla p|}$$

$$h_0 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2), \quad h = \frac{1}{2}(h_2 - h_1), \quad \boldsymbol{\tau} = \nabla p(z - h_0)$$

$$\nabla p = \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{z_0 - h}, \quad |\nabla p| = \frac{\tau_0}{h - z_0} \tag{10}$$

$$\mathbf{v}_{xy} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{h - z_0}\begin{cases}(z - h_1)(z - h_1 - 2z_0), & z \in [h_1, z_1] \\ -z_0^2, & z \in [z_1, z_2] \\ (h_2 - z)(h_2 - z - 2z_0), & z \in [z_2, h_2]\end{cases} \tag{11}$$

Проекция вектора скорости на ось z находится из последнего уравнения системы (3) с учетом (11) для каждой из областей течения $z \in [h_1, z_1]$, $z \in [z_1, z_2]$, $z \in [z_2, h_2]$. При этом используются граничные условия (4) для проекции скорости v_z и условия ее непрерывности на границе "квазитвердой" области

$$v_z = -\frac{1}{2\mu}\left[\nabla^2 p \begin{cases} (z-h_1)^3/3 - z_0(z-h_1)^2 \\ -(h_2-z)^3/3 + z_0(h_2-z)^2 \end{cases} + \right. \tag{12}$$

$$\left. +\nabla p \cdot \nabla \begin{cases} (z-h_1)^3/3 - z_0(z-h_1)^2 \\ -(h_2-z)^3/3 + z_0(h_2-z)^2 \end{cases}\right] + \begin{cases} \partial h_1/\partial t, & z \in [h_1, z_1] \\ \partial h_2/\partial t, & z \in [z_2, h_2] \end{cases}$$

$$v_z = -\frac{1}{2\mu}\left[(\nabla^2 p) z_0^2 \begin{cases} -z + (z_0 + 3h_1)/3 \\ -z + (3h_2 - z_0)/3 \end{cases} + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \nabla p \begin{cases} -\nabla(z_0^2 z) + z_0(z_0 + 2h_1)\nabla z_0 + z_0^2 \nabla h_1 \\ -\nabla(z_0^2 z) - z_0(z_0 - 2h_2)\nabla z_0 + z_0^2 \nabla h_2 \end{cases}\right] + \begin{cases} \partial h_1/\partial t, & z \in [z_1, h_0] \\ \partial h_2/\partial t, & z \in [h_0, z_2] \end{cases}$$

Приравниванием верхнего и нижнего выражений (13) при $z = h_0$ получаем дифференциальное уравнение, связывающее давление с формой области сдвигового течения $z_0(x, y, t)$

$$\nabla\left[\left(\frac{1}{3}z_0^3 - hz_0^2\right)\nabla p\right] = -2\mu\frac{\partial h}{\partial t} \tag{14}$$

Это же уравнение получается путем интегрирования уравнения неразрывности (3) по всей области течения $z \in [h_1, h_2]$. Уравнения (10) и (14) образуют систему для определения давления и формы области сдвигового течения.

Найдем выражение для расхода вязкопластичной среды через произвольную цилиндрическую поверхность, ограниченную заданными поверхностями h_1 и h_2. Для этого проинтегрируем левую и правую части уравнения (14) по некоторой замкнутой области D, расположенной в плоскости xy и ограниченной кривыми ABC и AEC, одна из которых считается заданной, например ABC, а другая, AEC, – произвольной

$$\frac{1}{\mu}\iint_D \nabla\left[\left(\frac{1}{3}z_0^3 - hz_0^2\right)\nabla p\right] dxdy = -2\iint_D \frac{\partial h}{\partial t} dxdy \tag{15}$$

Применив к интегралу в левой части равенства (15) преобразование Гаусса [2], представим его в виде

$$-\frac{1}{\mu}\int_L \frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{1}{3}z_0^3 - hz_0^2\right)dx - \frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{1}{3}z_0^3 - hz_0^2\right)dy = 2\iint_D \frac{\partial h}{\partial t} dxdy \tag{16}$$

Криволинейный интеграл в полученном равенстве представим суммой интегралов по кривым ABC и AEC. Покажем, что интегралы по произвольной кривой AEC и фиксированной кривой ABC равны расходу вязкопластичной среды через цилиндрические поверхности, в основании которых лежат эти кривые. Для этого подсчитаем расход среды через эти цилиндрические поверхности с учетом (11). Беря интегралы по z в пределах от h_1 до h_2, получим из (16) интегральное уравнение, связывающее давление p, границу области сдвигового течения z_0 и расход среды Q через произвольную цилиндрическую поверхность, в основании которой кривая AEC, ограниченную поверхностями $h_1(x, y, t)$ и $h_2(x, y, t)$

$$Q|_{AEC} = -\frac{1}{\mu} \int\limits_{AEC} \frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{1}{3}z_0^3 - hz_0^2\right) dx - \frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{1}{3}z_0^3 - hz_0^2\right) dy \tag{17}$$

$$Q|_{AEC} = Q|_{ABC} - 2\iint\limits_{D} \frac{\partial h}{\partial t} dxdy$$

Здесь $Q|_{ABC}$ берется в алгебраическом смысле: если среда втекает в область D через границу ABC с внешней нормалью n, то $Q|_{ABC} < 0$, а если среда вытекает из области D через границу ABC, то $Q|_{ABC} > 0$. Если давление p и уравнения граничных поверхностей не зависят от координат y или x, то из выражений (9)–(14) и (17) следуют выражения для плоского течения вязкопластичной среды. Так, например, полагая $\nabla = (\partial / \partial x)_i$, получим соотношения [2], характеризующие плоское течение вязкопластичной среды в плоскостях, параллельных плоскости xz.

Рассмотрим однонаправленное стационарное течение вязкопластичной среды в щелевом призматическом канале произвольного сечения. В этом случае $\upsilon_y = 0$, а величина $h = (h_2 - h_1)/2$ – функция только координаты y. Стенки канала считаются неподвижными (недеформируемыми). В этом случае $\partial h/\partial t = 0$. Из (11) с учетом (10) следует $\partial p/\partial y = 0$. Таким образом, соотношения (10), (14) и (17) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau_0}{h - z_0} \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{3}z_0^2 - hz_0^2\right) \frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0 \tag{19}$$

$$Q = \frac{1}{\mu}\int \frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{1}{3}z_0^2 - hz_0^2\right) dy = \text{const} \tag{20}$$

Из уравнения (19) следует, что выражение $(\partial p / \partial x)(z_0^2 / 3 - hz_0^2)$ функция только координаты y. Можно показать, что в этом случае из (18) и (20) следует

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} = -\frac{p_1 - p_2}{l} \tag{21}$$

где l – длина канала, на концах которого заданы давления p_1 и p_2 ($p_1 > p_2$). Уравнение границы сдвигового течения $z_0(y)$ получается из соотношений (18) и (21)

$$z_0(y) = h(y) - \frac{\tau_0 l}{p_1 - p_2} \tag{22}$$

Формула расхода среды получается из выражения (20) подстановкой этого выражения для z_0

$$Q = \frac{1}{\mu}\int\left[\frac{2h^3(p_1 - p_2)}{3l} - h^2\tau_0 + \frac{1}{3}\ \frac{\tau_0^3 l^2}{(p_1 - p_2)^2}\right] dy \tag{23}$$

Если в (23) принять, что подынтегральная функция не зависит от y, т.е. величина h является постоянной и $y_2 - y_1 = 1$ м, то получится формула расхода вязкопластичной среды в канале прямоугольного сечения [2].

Заключение. Предложенный способ интегрирования уравнений движения вязкопластичных сред в узких слоях может быть применен к решению ряда задач о сложном сдвиге, впервые рассмотренных в [4]. Это в значительной степени упростит процесс интегрирования дифференциальных уравнений движения таких сред, поскольку система нелинейных скалярных уравнений заменяется системой квазилинейных векторных уравнений.

Приведенное решение задачи о течении вязкопластичной среды в пространственном тонком слое может быть использовано для решения важных прикладных задач, таких, как задача сдавливания тонкого слоя вязкопластичной среды между двумя поверхностями достаточно произвольной формы и задача вытеснения вязкопластичной среды из узкого канала произвольного профиля и ряда других задач. Кроме этого, приведенное решение позволяет ставить и решать задачи управления течениями вязкопластичных сред в пространственных тонких слоях, а также задачи перемешивания таких сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Об одном методе исследования пространственных течений вязкопластичных сред // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 150–158.
2. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Исследование течений вязкопластичных сред в каналах и полостях с изменяемыми формами их стенок (Элементы теории и техническое приложение). М.: "Полиграфсервис", 1995. 128 с.
3. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 671 с.
4. *Мясников В.П.* Течение вязкопластичной среды при сложном сдвиге // ПМТФ. 1961. № 5. С. 76–87.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1996