

УДК 532.582.3

© 1998 г. С.Е. СЕЛЕЗНЕВА

ОСТРЫЙ ТОНКИЙ КОНУС В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Проведено исследование пределов применимости асимптотического решения задачи обтекания тонких конусов несжимаемой жидкости.

Асимптотическая задача о течении в окрестности носка острого конуса сводится к решению уравнения Лежандра с нецелыми собственными числами $n = 1 \div 2$, представляемому в виде гипергеометрических рядов. Их вычисление, как и непосредственное решение краевой задачи при помощи ЭВМ, не представляет в настоящее время проблемы, но несколько затруднено для тонких конусов с малым углом полураствора θ_0 вследствие сингулярности решения при $\theta_0 \rightarrow 0$. Для данного случая в [1] получено асимптотическое решение, спектр собственных значений задачи найден также в [2]. Ниже приведено исследование пределов применимости асимптотического решения. Показано, что его можно использовать для конусов с углом полураствора $\theta_0 \leq 20^\circ$.

В сферической системе координат (r, θ, φ) с центром в носке обтекаемого тела и лучом $\theta = 0$, обратным вектору скорости набегающего потока (фиг. 1), уравнение для потенциала скорости имеет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (1)$$

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad V_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$$

Поставленной задаче отвечает семейство решений

$$\Phi = CU_\infty r^n \Theta(\theta), \quad C = \text{const}; \quad V_r = nCU_\infty r^{n-1} \Theta(\theta), \quad V_\theta = CU_\infty r^{n-1} \Theta'(\theta) \quad (2)$$

Постоянная C имеет размерность L^{1-n} (L – некоторая длина) и должна определяться сопряжением этого локального решения с глобальным. Зависимость $\Theta(\theta)$ получается из решения задачи на собственные значения

$$(\Theta' \sin \theta)' + n(n+1) \sin \theta \Theta = 0; \quad V_\theta \sim \Theta' = 0, \quad \theta = 0, \quad \pi - \theta_0 \quad (3)$$

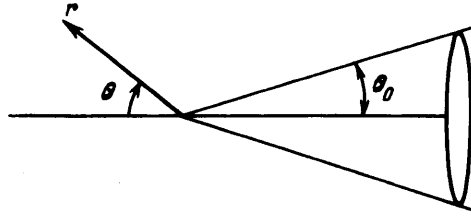
Заменой $t = \cos \theta$ уравнение (3) приводится к каноническому уравнению Лежандра

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(1-t^2) \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right] + n(n+1) \Theta = 0 \quad (4)$$

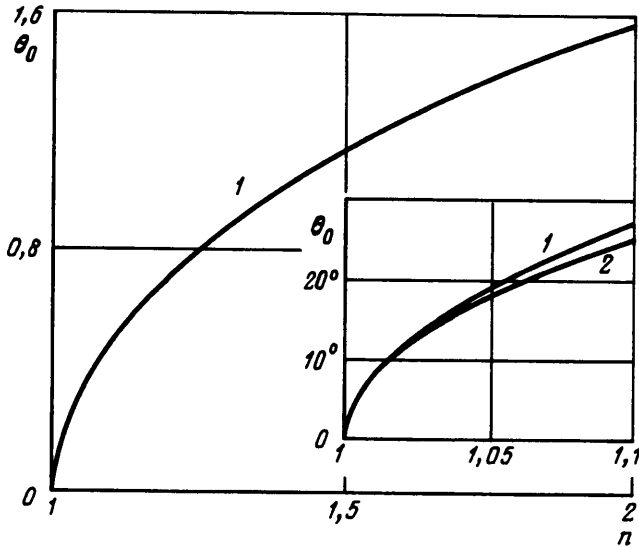
$$\theta = 0, \quad t = 1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0, \quad \theta = \pi - \theta_0, \quad t = t_0 = -\cos \theta_0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

При целых n этому уравнению удовлетворяют полиномы Лежандра $P_n(t)$, $P_n(1) = 1$. Два из них

$$\Theta_1 = -P_1 = -t, \quad n = 1, \quad \theta_0 = 0; \quad \Theta_2 = -P_2 = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}, \quad n = 2, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$



Фиг. 1. Система координат



Фиг. 2. Собственные значения $n(\theta_0)$, 1 – точное, 2 – асимптотическое решения

соответствуют невозмущенному потоку и течению в окрестности точки торможения у плоскости соответственно. Углом полураствора конуса $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ соответствует интервал значений $1 \leq n \leq 2$. При $n > 2$ собственные функции содержат уже дополнительные (кроме оси симметрии и поверхности конуса) лучи с выполнением условия $\partial\Theta/\partial\theta = 0$. Например, при $\Theta = P_3$ это $\theta_1 = 75^\circ$ и $\theta_2 = 135^\circ$. Сами по себе эти решения описывают течение в углах между этими лучами и могут представлять интерес лишь как члены ряда в разложении решения для конуса конечной длины.

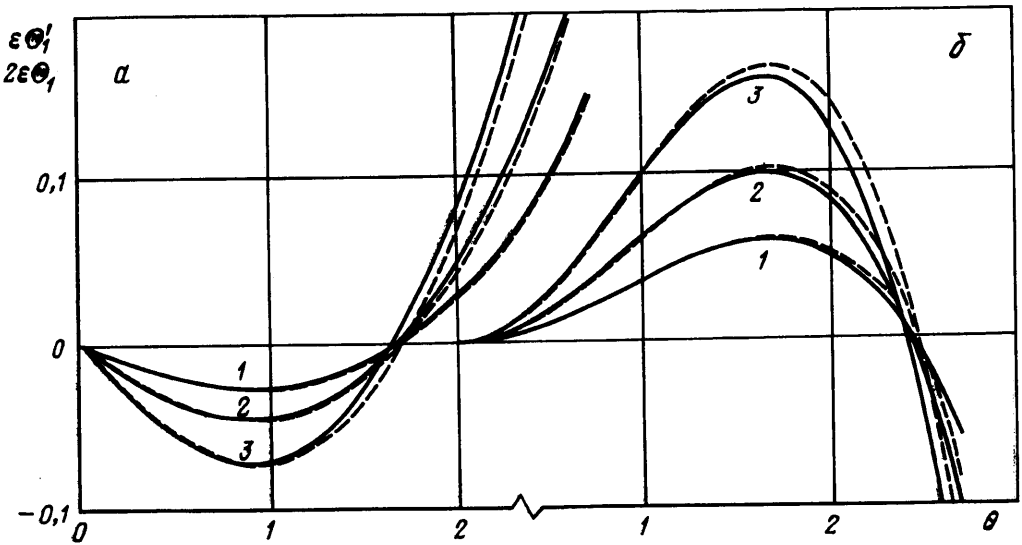
Уравнение (4) при нецелых n , $|t| < 1$ имеет частные решения, регулярные в одной из особых точек $t = \pm 1$ и сингулярные в другой. Формальное решение поставленной задачи дается функцией Лежандра первого рода или гипергеометрическим рядом

$$\Theta(t) = -P_n(t) = -F(-n, n+1, 1, (1-t)/2), \quad P_n(1) = 1 \quad (6)$$

Набор функций Лежандра¹ с противоположным знаком и является решением задачи (4)–(5) в области $0 < \theta < \pi - \theta_0$, где собственное число n при этом определяется условием (5).

Для тонких конусов $\theta_0 \ll 1$, $n \approx 1$ прямое решение этой задачи несколько затруднено тем, что поверхность конуса оказывается в области влияния особой точки $t = 1$. Но в этом случае можно получить асимптотическое решение уравнения (4) посред-

¹ Эти функции затабулированы в [3], однако лишь для редкой сетки по n и в области $0 \leq \theta \leq \pi/2$,



Фиг. 3. Сравнение точного и линейризованного решений: *a* – $\epsilon \Theta_1'$, *б* – $\epsilon \Theta_1$, при $n = 1,03; 1,05; 1,08$ (линии 1–3)

ством его линейризации. Это уравнение линейно по n и нелинейно по отношению к задаче на собственные значения, так как от θ_0 зависят одновременно и Θ и n .

Для конусов с малым углом раствора в [1] было найдено решение

$$\Theta = -t + \epsilon \Theta_1 + \dots, \quad n = 1 + \epsilon, \quad \epsilon \ll 1 \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), удерживая лишь члены порядка ϵ , выбором постоянных в решении исключая особенность при $t \rightarrow 1$ и обеспечивая условие $\Theta_1(1) = 0$, нетрудно получить

$$\Theta_1 = t[\ln 2 - \ln(1+t)] + 1 - t \quad (8)$$

Так как $1 + t_0 \approx \theta_0^2/2$ при малых θ_0 , то из условия $\partial\Theta/\partial t = 0$ следует

$$\epsilon = n - 1 \approx \theta_0^2/2 \quad (9)$$

Обобщение формулы (9) на случай $n > 2$ получено в [2].

Для исследования пределов применимости асимптотического решения на фиг. 2 приведено сравнение зависимости $n(\theta_0)$, найденной при помощи численного суммирования 10^4 членов ряда (6) (линия 1) с функцией (9), (линия 2). Видно хорошее совпадение вплоть до значения $n = 1,05$ (соответствующего углу $\theta_0 \approx 20^\circ$). Во всей области значений n зависимость $n(\theta_0)$ можно приблизительно описать формулой

$$n - 1 \approx 0,525\theta_0^2 - 0,238\theta_0^3 + 0,1\theta_0^4.$$

На фиг. 3 кривые 1–3 изображают $\epsilon \Theta_1$ и $\epsilon \Theta_1'$ соответственно при $n = 1,03; 1,05; 1,08$. Сплошные линии относятся к численному решению, хорошо совпадающему с линейризованным для значений $n \leq 1,05$. При увеличении n несовпадение становится существенным в области вблизи поверхности конуса. Таким образом, аналитическое решение (7)–(8) имеет доказанную точность по крайней мере при $n \leq 1,05$. Автор выражает признательность В.В. Луневу и Г.Ю. Степанову за полезные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонор А.Л. Асимптотическое решение нелинейной осесимметричной задачи входа в жидкость тонкого тела // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 4. С. 812–817.
2. Судаков Г.Г. Асимптотическое решение задачи об обтекании идеальной жидкостью вершин тел и крыльев // Уч. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21. № 6. С. 3–9.
3. Таблицы присоединенных функций Лежандра. М.: ВЦ АН СССР, 1962. 322 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1996