

УДК 533.72

© 1998 г. А.В. ВЕРМЕЛЬ, Н.К. МАКАШЕВ

## ОСОБЕННОСТИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ "ХВОСТОВ" ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Приведены результаты аналитического и численного исследования свойств высокоскоростных "хвостов" функции распределения – решения БГК-модели кинетического уравнения Больцмана для плоского течения Куэтта сжимаемого газа.

Некоторые химические реакции и неупругие процессы в газе идут с участием молекул, энергия движения или возбуждения которых в типичных условиях значительно превышает среднее, "тепловое" значение  $O(kT)$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура газа. Известно, что высокоэнергетичные "хвосты" молекулярных распределений могут сильно возмущаться протекающими в газе реакциями [1, 2], его движением [3, 4], а также процессами переноса [5, 6].

Наиболее трудны для решения проблемы, возникающие при определении вида и свойств высокоскоростных "хвостов" функций распределения: сложность оператора столкновений в уравнении Больцмана делает уникальным событием получение какого-либо точного результата. Широко используемые для численного решения уравнения Больцмана методы прямого статистического моделирования Монте-Карло объективно плохо приспособлены для исследований вида и свойств "хвостов" функций распределения.

В этой связи определенные возможности открывает использование модельных кинетических уравнений типа БГК-модели [7]. Именно БГК-модель уравнения Больцмана была впервые использована в [5] для исследования влияния на хвосты функции распределения молекул процесса переноса тепла между параллельными пластинами при малых значениях числа Кнудсена  $Kn = 1_* / L$ , где  $1_*$  – характерная величина длины пробега,  $L$  – расстояние между пластинами.

В данной работе с помощью БГК-модели анализируется плоское течение Куэтта сжимаемого газа. Получаемое решение кинетического БГК-уравнения хорошо соответствует ситуации, существующей в ламинарном неизотермическом пограничном слое, когда неравновесные хвосты функции распределения формируются исключительно за счет неоднородного поля температуры газа без значительного влияния молекул, отразившихся от пластины с более высокой температурой (как это имеет место в случае теплопередачи, см. [5]).

**1. Постановка задачи о решении БГК-модели в случае течения Куэтта.** Для плоского течения Куэтта модельное кинетическое уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука [7] может быть записано в виде

$$c_y \frac{\partial f}{\partial y} - c_y \frac{du}{dy} \frac{\partial f}{\partial c_x} = An(f_0 - f) \quad (1.1)$$

Здесь  $f$  – функция распределения молекул по скоростям,  $f_0$  – та же функция в условиях локального равновесия,  $c$  – собственная скорость молекулы,  $u$  – скорость газа в

направлении оси  $x$ , вдоль которой одна из пластин движется со скоростью  $W$ ,  $y$  – ось координат, нормальная оси  $x$ , а также поверхности пластин,  $n$  – числовая плотность молекул,  $A = kT/\mu$  – константа,  $\mu$  – вязкость газа, пропорциональная, как и его теплопроводность, температуре  $T$ , что является свойством модельного уравнения (1.1).

Предполагаем, что отражение молекул пластинами происходит диффузно (т.е. с максвелловским распределением по скоростям частиц) при температуре стенок  $T_w$ .

В общем случае решение для  $f$  может быть найдено интегрированием (1.1) при известных полях макропараметров  $n, u, T$ , которые в свою очередь зависят от  $f$  и удовлетворяют уравнениям переноса

$$\frac{dP_{yy}}{dy} = 0, \quad \frac{dP_{xy}}{dy} = 0, \quad \frac{dq_y}{dy} + P_{xy} \frac{du}{dy} = 0 \quad (1.2)$$

где  $P_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $q_y$  – поток тепла в направлении оси  $y$ .

Если  $Kn \ll 1$ , решение для  $f$  вне пристеночных слоев Кнудсена обычно находится из (1.1) с помощью известного метода Чепмена–Энскога. Согласно этому решению,  $f$  явно зависит от  $n, u, T$  и их пространственных производных и на слагаемые порядка  $O(Kn)$  отличается от  $f_0$ . Подстановка такого решения в (1.2) дает замкнутые макроскопические уравнения для  $n, u, T$ , что позволяет определить их поля в рассматриваемом течении, а также найти  $f$ . В [8] показано, что при  $Kn \ll 1$  вне слоев Кнудсена уравнения (1.2) с погрешностью  $O(Kn^2)$  совпадают с уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad p = nkT$$

$$\frac{d}{dy} \left( T \frac{du}{dy} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left( T \frac{dT}{dy} \right) + \Phi_0 T \left( \frac{du}{dy} \right)^2 = 0 \quad (1.3)$$

причем в более высоких по числу  $Kn$  приближениях в (1.3) изменяется только величина не зависящей от  $y$  "константы"  $\Phi_0$ .

Решение системы (1.3) нетрудно получить после перехода от  $y$  к координате  $s$  согласно выражениям

$$s = \int_0^{y_1} \eta dy_1, \quad y_1 = \frac{y}{L}, \quad \eta = \frac{n}{n_*}, \quad n_* L = \int_0^L n dy \quad (1.4)$$

В результате уравнения (1.3) принимают вид

$$\frac{dnT}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 u}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 T}{ds^2} + \Phi_0 \left( \frac{du}{ds} \right)^2 = 0$$

благодаря которому при  $Kn \ll 1$  и для граничных условий

$$u(s=0) = 0, \quad u(s=1) = W, \quad T(s=0) = T(s=1) = T_w$$

в главном приближении находим распределение макропараметров в пространстве между пластинами

$$n = \frac{p_*}{kT}, \quad u = Ws, \quad T = T_w + \frac{1}{2} \Phi_0 W^2 (s - s^2) \quad (1.5)$$

Здесь и далее  $p_*$  – давление газа, не зависящее от  $y$ .

Рассмотренная газодинамическая часть проблемы опирается, как уже отмечалось, на классическое решение Чепмена–Энскога для  $f$ , справедливое в случае  $Kn \ll 1$  в области "купола" функции распределения  $f$ , т.е. при скоростях молекул порядка их тепловой скорости  $c_T$ , что достаточно для вычисления по  $f$  макропараметров  $n, u, T$ , а также переносных свойств газа.

Высокоскоростные хвосты функции распределения, в случае БГК-модели сильно неравновесные (т.е. обладающие свойством  $(f - f_0) \sim f_0$ ) для скоростей молекул порядка [5]

$$c \sim c_T \text{Kn}^{-1/3} \sim c_* \quad (1.6)$$

не могут быть найдены в рамках обычной процедуры приближенного решения уравнения (1.1) в случае  $\text{Kn} \ll 1$ . Иллюстрацией этого являются возможная при  $c \geq c_*$  смена знака вычисляемой таким образом функции  $f$  и конечная относительная величина неравновесной поправки к  $f_0$ , изначально предполагаемая малой.

**2. Особенности альтернативного решения.** Рассмотрим альтернативный подход к получению приближенного аналитического решения уравнения (1.1), основанный на использовании приведенной функции распределения  $\Phi \equiv f/f_0$ , которая при  $\text{Kn} \ll 1$  и для больших скоростей молекул  $c \sim c_*$  значительно медленнее, чем  $f$  и  $f_0$ , меняется в поле течения.

Исследование вида функции распределения  $f$  и вычисление переносных свойств  $P_{yy}$ ,  $P_{xy}$  и  $q_y$  существенно упрощаются после перехода к усредненным по  $c_{\perp} \equiv (c_x, c_z)$  функциям распределения  $f_i(y, c_y)$ . Действительно, можно показать, что

$$q_y = \frac{m}{2} (\int c_y^3 f_1 dc_y + \int c_y f_2 dc_y), \quad f_1 \equiv \int f dc_{\perp}, \quad f_2 \equiv \int c_{\perp}^2 f dc_{\perp}$$

$$P_{xy} = m \int c_y f_3 dc_y, \quad f_3 \equiv \int c_x f dc_{\perp}, \quad P_{yy} = m \int c_y^2 f_1 dc_y$$

Здесь  $m$  – масса молекулы.

Уравнения для  $f_i$  следуют из (1.1) после интегрирования по  $c_{\perp}$  с учетом определения функций  $f_i$ , а также свойств симметрии  $f$  и  $f_0$ . В рассматриваемом случае достаточно определить три функции  $f_1, f_2, f_3$ , уравнения для которых имеют вид замкнутой системы трех соотношений

$$c_y \frac{\partial f_1}{\partial y} = An(f_{01} - f_1)$$

$$c_y \frac{\partial f_3}{\partial y} + c_y f_1 \frac{du}{dy} = -Anf_3$$

$$c_y \frac{\partial f_2}{\partial y} + 2c_y f_3 \frac{du}{dy} = An(f_{02} - f_2)$$

$$f_{0i} = n \left( \frac{m}{2kT} \right)^{a_i} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{mc_y^2}{2kT} \right), \quad i = 1, 2$$

$$a_1 = 1/2, \quad a_2 = -1/2$$

После перехода к координате  $s$  (1.4), новым независимым и зависимым безразмерным переменным  $v = c \sqrt{h_*}$ ,  $h_* \equiv m/2kT_w$ ,  $\eta = n/n_*$ ,  $\tau = T/T_w$ ,  $U = u/W$  (где  $T_w$  – температура стенки, см. (1.4)), а также обезразмеренным функциям распределения

$$F_1 = f_1/n_* \sqrt{h_*}, \quad F_2 = (f_2/n_*) \sqrt{h_*}, \quad F_3 = f_3/(\text{Kn} S n_*)$$

для  $F_i$  получим уравнения

$$\text{Kn} v_y \frac{\partial F_1}{\partial s} = F_{01} - F_1 \quad (2.1)$$

$$\text{Kn} \nu_y \frac{\partial F_3}{\partial s} + \nu_y F_1 \frac{dU}{ds} = -F_3 \quad (2.2)$$

$$\text{Kn} \nu_y \frac{\partial F_2}{\partial s} + 2 \text{Kn}^2 S^2 \nu_y F_3 \frac{dU}{ds} = F_{02} - F_2 \quad (2.3)$$

В заменах переменных и уравнениях (2.1)–(2.3) параметры  $\text{Kn}$  (число Кнудсена) и  $S$  (аналог скоростного отношения) определяются согласно формулам

$$\text{Kn} \equiv \frac{1}{\text{An}_* L \sqrt{h_*}} \ll 1, \quad S \equiv W \sqrt{h_*} = O(1)$$

Граничные условия для  $F_i$  на стенке  $s = 0$  в случае предполагаемого диффузного характера отражения молекул с их полной аккомодацией на поверхности имеют вид

$$s = 0, \quad \nu_y > 0: F_i = F_{iW}$$

$$F_{1W} = \frac{\eta_W}{\sqrt{\pi}} \exp(-\nu_y^2), \quad F_{2W} = \frac{(1 + S^2 U_0^2) \eta_W}{\sqrt{\pi}} \exp(-\nu_y^2)$$

$$F_{3W} = -\frac{S U_0 \eta_W}{\sqrt{\pi}} \exp(-\nu_y^2), \quad \eta_W = -2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^0 F_1 \nu_y d\nu_y \quad (2.4)$$

$$U_0 = U(s = 0)$$

Здесь  $\eta_W$  – безразмерная плотность отраженных молекул, определяемая условием непротекания.

Аналогичные условия на стенке  $s = 1$  при вычислениях удобно заменить условиями симметрии

$$F_{1,2}(s, \nu_y) = F_{1,2}(1 - s, -\nu_y), \quad F_3(s, \nu_y) = -F_3(1 - s, -\nu_y) \quad (2.5)$$

Для рассматриваемого здесь течения Куэтта воспроизведем решение уравнения (2.1) способом, предложенным в [5]. Необходимое выражение для  $F_1$  должно быть справедливо при  $\text{Kn} \ll 1$  и  $1 \ll |\nu_y| \ll \text{Kn}^{-1/3}$ .

Проведем анализ для половины области течения  $s \leq 0,5$ . Полученные результаты могут быть распространены на вторую половину области течения с учетом свойств его симметрии. Перепишем (2.1) для приведенной функции распределения  $\Phi_1 = F_1/F_{01}$

$$\text{Kn} \nu_y \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + A_1 \Phi_1 = 1$$

$$A_1 = 1 + \text{Kn} \nu_y \left[ \frac{d \ln \eta}{ds} + \left( \frac{\nu_y^2}{\tau} - \frac{1}{2} \right) \frac{d \ln \tau}{ds} \right] \quad (2.6)$$

В силу (1.4) вне пристеночного слоя Кнудсена  $d \ln \eta/ds = -d \ln \tau/ds$ , поэтому

$$A_1 = A_1^* \equiv 1 + \text{Kn} \nu_y \left( \frac{\nu_y^2}{\tau} - \frac{3}{2} \right) \frac{d \ln \tau}{ds}$$

Представим решение уравнения (2.6) в интегральной форме

$$\Phi_1^{(+)} = C_0 \exp\left(-\int_0^s \frac{A_1 d\sigma}{\text{Kn} \nu_y}\right) + \frac{1}{\text{Kn} \nu_y} \int_0^s \exp\left(-\int_{\sigma}^s \frac{A_1 dz}{\text{Kn} \nu_y}\right) d\sigma, \quad \nu_y \geq 0 \quad (2.7)$$

$$\Phi_1^{(-)} = C_1 \exp\left(\int_s^{0,5} \frac{A_1 d\sigma}{\text{Kn} \nu_y}\right) - \frac{1}{\text{Kn} \nu_y} \int_s^{0,5} \exp\left(\int_s^{\sigma} \frac{A_1 dz}{\text{Kn} \nu_y}\right) d\sigma, \quad \nu_y < 0$$

Вне слоя Кнудсена интегрирование (2.7) по частям при условии, что  $A_1^* > 0$ , приводит к результату

$$\Phi_1^* = \frac{1}{A_1^*} + \frac{Kn v_y}{A_1^{*3}} \frac{dA_1^*}{ds} + \frac{3Kn^2 v_y^2}{A_1^{*5}} \left( \frac{dA_1^*}{ds} \right)^2 - \frac{Kn^2 v_y^2}{A_1^{*4}} \frac{d^2 A_1^*}{ds^2} + O(Kn^3) \quad (2.8)$$

Данное выражение обладает локальными свойствами и равномерно пригодно для любых по величине  $v_y \geq 0$ . Оно представляет собой фактически разложение решения для  $\Phi_1^*$  по степеням  $Kn^{2/3}$  и, будучи переразложено по степеням  $Kn$  при  $v_y \sim 1$ , дает решение Чепмена–Энскога для  $\Phi_1$ . Если  $v_y \sim Kn^{-1/3}$ , разность  $\Phi_1 - 1 = O(1)$ , т.е.  $f_1$  оказывается сильно возмущенной относительно  $f_{01}$ .

Область пригодности решения (2.8) при  $v_y < 0$  ограничена условием  $A_1^* > 0$ . Для  $A_1^* < 0$  решение  $\Phi_1$  должно обладать нелокальными свойствами, поскольку для обеспечения условия  $\Phi_1 > 0$  слагаемое с  $\partial\Phi_1/\partial s$  из уравнения (2.6) должно быть учтено в главном приближении.

Для подтверждения этого рассмотрим выражение для  $\Phi_1^{(-)}$  из (2.7), полагая, что  $v_y < v_{y,0} < 0$ , где  $v_{y,0}$  – корень уравнения

$$A_1^*(s, v_{y,0}) = 0$$

из-за чего  $A_1^*(s, v_y) < 0$  и решение (2.8) неприменимо. В данных условиях можно показать, что основной вклад во второе слагаемое справа в (2.7) дает малая окрестность точки  $s_0, s_0 > s$ , где

$$A_1^*(s_0, v_y) = 0$$

В результате оценка методом перевала приводит к решению, которое служит хорошей иллюстрацией механизма потери функции распределения локальных свойств

$$\Phi_1^{(-)} \approx -\frac{1}{Kn v_y} \exp\left(\int_s^{s_0} \frac{A_1^* dz}{Kn v_y}\right) \sqrt{-\frac{2Kn v_y \pi}{A_1^{*'}(s_0)}} \gg 1$$

$$A_1^{*'}(s_0) \equiv \left(\frac{dA_1^*}{ds}\right)_{s_0}$$

откуда для  $F_1^{(-)}$  имеем

$$F_1^{(-)}(s, v_y) \approx F_{01}(s_0, v_y) \exp\left(\frac{s_0 - s}{Kn v_y}\right) \sqrt{-\frac{2\pi}{A_1^{*'}(s_0) Kn v_y}} \gg F_{01}(s, v_y) \quad (2.9)$$

Из (2.9) непосредственно следует, какой механизм в первую очередь отвечает за нелокальность решения для  $F_1$ : именно, главной причиной нелокальности является то, что в областях течения с более высокой температурой газа "быстрых" молекул "хвоста" функции распределения  $f$  настолько много, что даже влияние большого числа столкновений на пучки быстрых молекул может быть менее важным фактором в формировании решения для  $f$ .

При приближении точки вычисления функции распределения к плоскости симметрии течения ( $s \rightarrow 0,5$ ) скорость  $v_{y,0} \rightarrow -\infty$ . Поэтому в этом случае нелокальное решение не реализуется, а справедливо разложение (2.8). Этим обстоятельством рассматриваемое течение Куэтта отличается от случая теплопередачи [5], где можно подбором условий

получить одно нелокальное решение для всего поля течения в целом. Реализующийся в течении Куэтта максимум температуры около плоскости симметрии  $s = 0,5$  делит решение на два идентичных, определенных в своих половинах течения, и таких, что изменением одного невозможно повлиять в явном виде на другое.

Для последующего сравнения и проверки результатов расчетов  $\Phi_i$  использовались двучленные приближенные разложения типа (2.8), обладающие, согласно [5], достаточно высокой точностью. Таким образом, при условии, что  $A_1 > 0$ , для  $\Phi_1$  использовалось выражение

$$\Phi_1^a = \frac{1}{A_1} + \frac{Kn \nu_y}{A_1^3} \frac{dA_1}{ds}, \quad A_1 > 0 \quad (2.10)$$

В уравнении (2.3) с погрешностью  $O(Kn^2)$  можно пренебречь вторым членом слева. После этого по аналогии с уравнением (2.1) находим, что

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{F_2}{F_{02}} \approx \Phi_2^a = \frac{1}{A_2} + \frac{Kn \nu_y}{A_2^3} \frac{dA_2}{ds} \\ A_2 &= 1 + Kn \nu_y \frac{d \ln F_{02}}{ds}, \quad A_2 > 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнение (2.2) преобразуем следующим образом. Поскольку в навье-стоксовском приближении

$$F_3^{NS} \equiv -\nu_y F_{01} \frac{\partial U}{\partial s}$$

то (2.2) можно записать в виде

$$Kn \nu_y \frac{\partial F_3}{\partial s} = \Phi_1 F_3^{NS} - F_3$$

Подставляя сюда  $\Phi_3 \equiv F_3/F_3^{NS}$ , получим

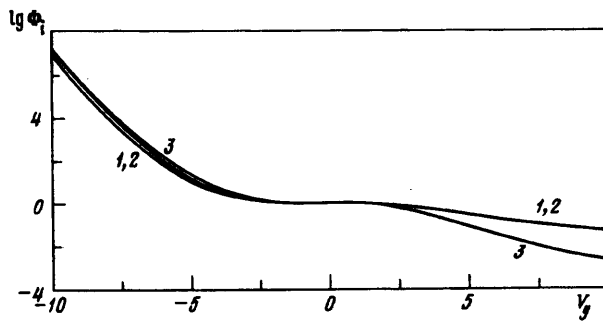
$$\Phi_3 \approx \Phi_3^a = \frac{1}{A_1^2} + \frac{3 Kn \nu_y}{A_1^4} \frac{dA_1}{ds}, \quad A_1 > 0 \quad (2.12)$$

Согласно (2.10)–(2.12), функция распределения  $f_i$  и, естественно, производные от нее функции распределения  $f_i$  становятся сильно неравновесными при выполнении условия (1.6), т.е. когда  $L/\nu^2$  – масштаб изменения  $f$  по пространству становится соизмерим с длиной пробега быстрых молекул  $L Kn \nu$  [5].

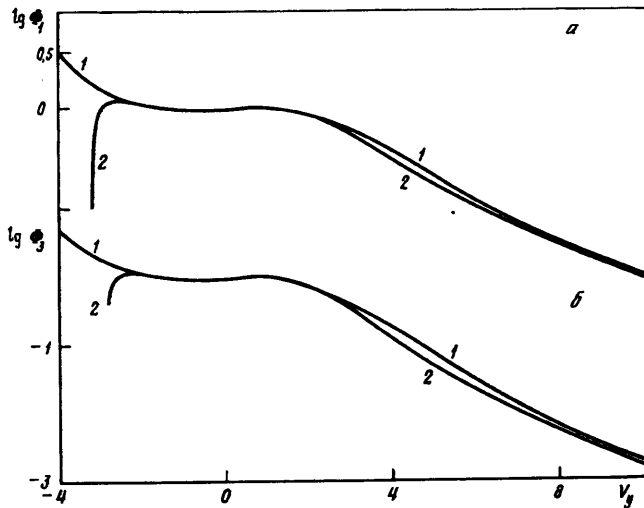
Как уже отмечалось выше, численное решение уравнений (2.1)–(2.3) с граничными условиями (2.4), (2.5) проводилось по алгоритму, предложенному в [9]. Алгоритм представляет собой последовательность итераций, в которых на первом этапе какой-либо из них интегрируются уравнения для  $f_i$  с соответствующими граничными условиями (2.4), (2.5) и известными полями макропараметров, а на втором этапе – уравнения переноса (1.2) с уточненными переносными свойствами и эффектами скольжения.

**3. Обсуждение результатов.** Вид функций  $\Phi_i$  показан на фиг. 1 через их зависимости от скоростей молекул. Положительным скоростям молекул соответствует направление их движения от стенки к плоскости симметрии течения  $s = 0,5$ . Виден сильный рост функций распределения для отрицательных скоростей молекул, т.е. для частиц, движущихся к стенке в сторону уменьшения температуры газа. Механизм возникновения этого роста и сопутствующей ему нелокальности функции распределения описан выше.

На фиг. 2 приведено сравнение полученных численно функций  $\Phi_i$  с их приближенными представлениями первыми двумя членами разложений  $\Phi_i^a$ . Обращает на себя



Фиг. 1. Примеры численного расчета приведенных функций распределения  $\Phi_i(u_y)$  при  $Kn = 0,02$ ,  $S = 1$ ,  $y_1 = 0,05$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $i = 1, 2, 3$

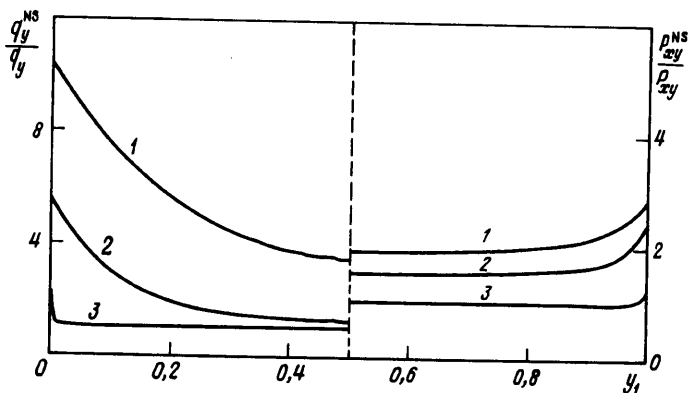


Фиг. 2. Сравнение точных (кривые 1) и приближенных (кривые 2) решений при  $Kn = 0,02$ ,  $S = 1$ ,  $y_1 = 0,05$ :  
а -  $\Phi_1(u_y)$ ,  $\Phi_1^a(u_y)$ ; б -  $\Phi_3(u_y)$ ,  $\Phi_3^a(u_y)$

внимание высокая точность этих приближенных "неклассических" решений в области их применимости. Для достаточно больших по величине отрицательных скоростей  $u_y$  справедливость приближенных решений нарушается, что хорошо иллюстрируется кривыми на фиг. 2.

На фиг. 3 представлены результаты вычислений переносных свойств при разных значениях числа  $Kn$ . При малых числах  $Kn$  отличие  $P_{xy}$  и  $q_y$  от решения Навье–Стокса обнаруживается только в узких областях около стенок, что согласуется с [8] и с тем обстоятельством, что в рассматриваемом случае в течении отсутствует горячая стенка, слой Кнудсена около которой сильно возмущает решение на значительных расстояниях от этой поверхности.

**Заключение.** На примере плоского течения Куэтта сжимаемого газа, в рамках модельного кинетического уравнения БГК при малых числах  $Kn$  продемонстрировано, каким образом происходит нарушение локально-равновесной формы хвостов функции распределения молекул за счет молекулярного переноса тепла и импульса. Показано, что при конечных значениях числа Маха основной причиной такого нарушения является неоднородное поле температуры газа, возникающее из-за его нагрева за счет работы сил вязкого трения.



Фиг. 3. Сравнение полей истинных значений  $P_{xy}$  и  $q_y$  с величинами  $P_{xy}^{NS}$  и  $q_y^{NS}$ , определенными по формулам приближения Навье–Стокса для истинных полей макропараметров  $n, u, T$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $Kn = 1; 0,5; 0,02$  при  $S = 1$

Предложен алгоритм эффективного решения БГК-модели на хвостах функции распределения, который базируется на использовании распределений, усредненных по ряду компонент скорости частиц. Для этих усредненных функций получены приближенные решения, которые являются обобщением известных решений Чепмена–Энскога на область больших скоростей молекул.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00573; грант поддержки ведущих научных школ 96-15-9603).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ступоченко Е.В., Осипов А.И. Нарушение максвелловского распределения при химических реакциях // Теорет. и эксперим. химия. 1967. Т. 3. № 1. С. 76–81.
2. Асмолов Е.С., Макашев Н.К. О возмущении равновесной кинетики высокопороговых химических реакций // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 3. С. 562–566.
3. Макашев Н.К. О влиянии движения газа на кинетику реакций колебательно-возбужденных молекул // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 100–105.
4. Макашев Н.К. Неравновесная диссоциация двухатомных молекул в течениях с конвективным и диффузионным переносом частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 147–153.
5. Абрамов А.А., Макашев Н.К. Химические реакции, теплопередача и быстрые частицы // Инж.-физ. журн. 1982. Т. 43. № 1. С. 37–43.
6. Макашев Н.К., Провоторов В.П. Неравновесная диссоциация двухатомных молекул в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 161–170.
7. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
8. Макашев Н.К., Носик В.И. Стационарное течение Куэтта (с теплопередачей) газа максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 5. С. 1077–1081.
9. Бишаев А.М., Рыков В.А. Решение стационарных задач кинетической теории газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 172–182.

Москва

Поступила в редакцию  
29.I.1997