

УДК 533.6.011.72

© 1998 г. А.В. ОМЕЛЬЧЕНКО, В.Н. УСКОВ

## МАКСИМАЛЬНЫЕ УГЛЫ ПОВОРОТА СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА В УДАРНО-ВОЛНОВЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается возможность создания ударно-волновых систем для достижения максимальных углов поворота сверхзвукового потока. Исследуется связь таких систем с геометрически обусловленными оптимальными системами, а также с ударно-волновыми структурами, которые образуются в результате взаимодействия газодинамических разрывов.

Первые исследования ударно-волновых систем, состоящих из нескольких плоских косых и замыкающего прямого скачков уплотнения, были проведены в конце 40-х годов Г.И. Петровым, Е.П. Уховым [1], а также К. Осватичем (библиография в [2]) при анализе потерь полного давления в сверхзвуковых входных диффузорах. В [3] показана эффективность использования оптимальных систем для восстановления таких газодинамических переменных, как скоростной напор, плотность и др.

Полученные в данной работе решения несут не только теоретический, но и прикладной характер и могут быть использованы при газодинамическом проектировании сверхзвуковых воздухозаборников, крыльев, аппаратов струйных технологий и других технических объектов.

1. Рассматривается плоский сверхзвуковой поток совершенного невязкого газа, последовательно проходящий систему  $S_{n,\sigma}$ , которая состоит из  $n$  волн (ударных или изоэнтропных) и замыкающей волны  $\sigma$ . Интенсивности  $J_k = p_k/p_{k-1}$  первых  $n$  волн не зависят друг от друга ( $k = 1, \dots, n$ ), а интенсивность замыкающей волны  $J_\sigma = p_{n+1}/p_n$  зависит при фиксированном значении показателя адиабаты  $\gamma$  только от числа Маха  $M_n$  перед ней.

В [1–3] доказано, что для ряда газодинамических переменных  $f$  существуют оптимальные ударно-волновые системы  $S_{n,\sigma}^{(f)}$ , обеспечивающие максимальные значения  $f$  за системой. При этом тип и количество входящих в  $S_{n,\sigma}^{(f)}$  волн существенно зависят от числа Маха  $M$  набегающего потока, а также от вида переменной  $f$ .

Так, в задаче восстановления полного давления [1–3] для любого  $M > 1$  в качестве замыкающей волны целесообразно использовать прямой скачок уплотнения, а в качестве предшествующих волн – изоэнтропную волну сжатия  $s$  или систему из  $n$  косых скачков равной интенсивности. Для обеспечения максимального значения скоростного напора при  $M < \sqrt{2}$  следует создать систему из изоэнтропной волны разрежения  $r$  и замыкающего слабого скачка, а в случае  $M > \sqrt{2}$  – систему из  $n$  косых и замыкающего слабого скачков либо систему из волны сжатия и слабого скачка [3].

При прохождении ударно-волновой системы сверхзвуковой поток поворачивается на угол  $\beta_s$ , который рассчитывается по формуле

$$\beta_s = \sum_{k=1}^n \beta_k(M_{k-1}, J_k) + \beta_\sigma(M_n) \quad (1.1)$$

Здесь  $M_{k-1}$  – число Маха перед  $k$ -й волной ( $M_0 \equiv M$ ),  $\beta_k$  – угол поворота потока на  $k$ -й волне ( $k = 1, \dots, n$ ), а  $\beta_\sigma$  – угол поворота на замыкающей волне.

Конкретный вид входящих в (1.1) функций  $\beta_k(M_{k-1}, J_k)$  зависит от типа волны. Так, на скачке уплотнения  $s$  она имеет вид

$$\beta_k^{(s)} = \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{J_m(M_{k-1}) - J_k}{J_k + \varepsilon}} \frac{(1 - \varepsilon)(J_k - 1)}{(1 + \varepsilon)M_{k-1}^2 - (1 - \varepsilon)(J_k - 1)} \right] \quad (1.2)$$

$$J_m(M) = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

а на изотропной волне  $w$  угол поворота рассчитывается по формуле

$$\beta_k^{(w)} = \omega(M_{k-1}) - \omega(M_k) \quad (1.3)$$

где  $\omega(M)$  – функция Прандтля – Майера.

Так как числа Маха  $M$  и  $M_{k-1}$  связаны соотношением [3]

$$\mu_{k-1} = \mu \prod_{i=1}^{k-1} \frac{J_i + \varepsilon}{J_i(1 + \varepsilon J_i)}, \quad \mu = 1 + \varepsilon(M^2 - 1), \quad k = 2, \dots, n \quad (1.4)$$

то угол поворота потока на  $k$ -й волне при фиксированных  $M$  и  $\gamma$  зависит не только от интенсивности  $J_k$  этой волны, но и от интенсивностей всех предшествующих волн.

Под оптимальной для  $\beta_s$  системой  $S_{n,\sigma}^{(\beta)}$  понимается система, обеспечивающая при заданных  $M$  и  $\gamma$  максимальное по модулю значение угла  $\beta_s$ . Основной задачей данного исследования является анализ возможности создания таких систем, а также определение интенсивностей входящих в  $S_{n,\sigma}^{(\beta)}$  волн.

2. Простейшей ударно-волновой системой является система  $S_\sigma$ , состоящая из одной волны  $\sigma$ . Такая система оптимальна для  $\beta_s$ , если угол поворота потока в  $S_\sigma$  совпадает с максимально возможным углом поворота в волне.

Для скачка уплотнения максимальный угол  $\beta_l^{(s)}(M)$  реализуется, если  $J = J_l(M)$ , где

$$J_l = \frac{\mu - (1 + \varepsilon)}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\mu - (1 + \varepsilon)}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\mu(1 + 2\varepsilon) - 1}{\varepsilon}} \quad (2.1)$$

при этом из (1.2) следует

$$\beta_l^{(s)} = \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{J_l - 1}{J_l + \varepsilon}} \frac{(1 + \varepsilon) + (J_l + \varepsilon)}{1 + \varepsilon J_l} \frac{(1 - \varepsilon)(J_l - 1)}{2(J_l + \varepsilon)} \right] \quad (2.2)$$

Зависимость  $\beta_l^{(s)}(M)$  иллюстрирует фиг. 1 (кривая 1) (здесь и далее все расчеты выполнены для  $\gamma = 1,4$ ); отмеченная пунктиром на фиг. 1 область показана в увеличенном масштабе на фиг. 2. Как видно из фиг. 1, 2, функция  $\beta_l^{(s)}(M)$  монотонно возрастает от  $\beta_l = 0$  при  $M = 1$  до максимально возможного значения угла поворота на одиночном скачке

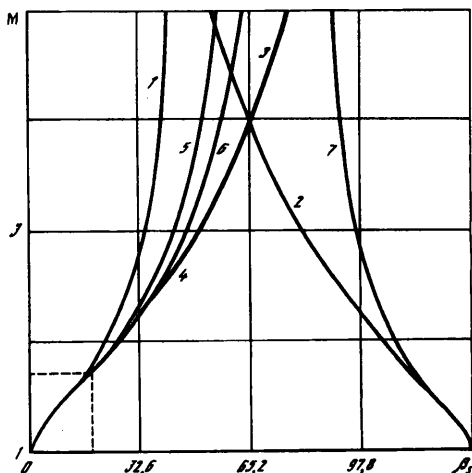
$$\beta_a = \operatorname{arctg} \frac{1 - \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.3)$$

которое получается из (2.1) и (2.2) при  $M \rightarrow \infty$ .

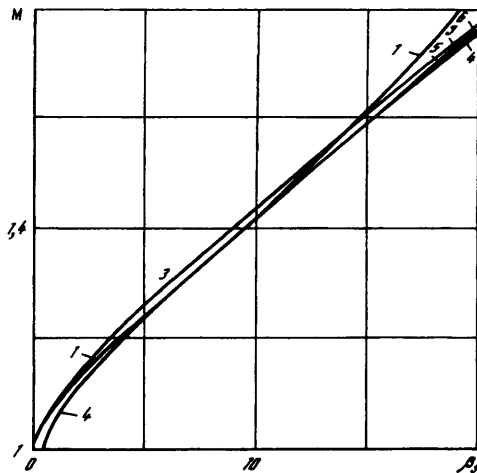
В изоэнтропной волне разрежения предельный угол  $\beta_l^{(r)}$  поворота определяется из (1.3) при условии  $M_1 \rightarrow \infty$  и равен

$$\beta_l^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\mu - 1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (2.4)$$

(кривая 2 на фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Максимальные углы поворота в ударно-волновых системах при больших значениях  $M$ : 1–3 – максимальные углы поворота потока на одиночном скачке уплотнения, волне разрежения и волне сжатия соответственно; 4 – суммарный угол поворота в оптимальной системе, состоящей из изоэнтропной волны и замыкающей скачка; 5, 6 – суммарные углы поворота потока в оптимальных системах, состоящих из двух и трех скачков уплотнения соответственно; 7 – максимальный угол поворота потока в системе, состоящей из скачка уплотнения и замыкающей волны разрежения

Фиг. 2. Максимальные углы поворота в ударно-волновых системах при малых значениях  $M$ . Нумерация кривых см. фиг. 1

Наконец, в изоэнтропной волне сжатия максимальный угол  $\beta_1^{(c)}$  реализуется в случае звукового течения за ней ( $M_1 = 1$ )

$$\beta_1^{(c)} = \omega(M) \quad (2.5)$$

Функция  $\beta_1^{(c)}(M)$  монотонно возрастает от нуля при  $M = 1$  до максимально возможного значения угла поворота потока в изоэнтропной волне при  $M \rightarrow \infty$

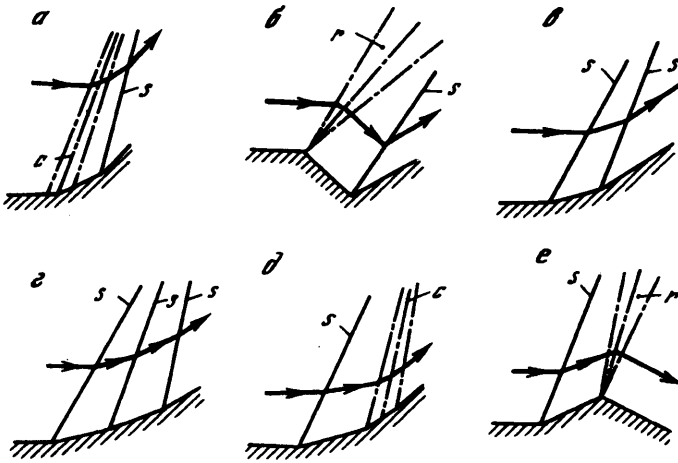
$$\beta_b = \frac{\pi}{2} \frac{1 - \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}} \quad (2.6)$$

(кривая 3 на фиг. 1 и 2).

Функция  $\beta_1^{(r)}(M)$ , напротив, с ростом  $M$  монотонно убывает, принимая значение  $\beta_1^{(r)} = \beta_b$  при  $M = 1$ , и стремится к нулю при  $M \rightarrow \infty$ . Это следует из более общего свойства симметричности кривых 2 и 3 относительно вертикальной прямой  $\beta = \beta_b$ . Действительно

$$\begin{aligned} \beta_1^{(r)} + \beta_1^{(c)} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left( \arctg \sqrt{\mu - 1} + \arctg \frac{1}{\sqrt{\mu - 1}} \right) - \\ &- \left( \arctg \sqrt{M^2 - 1} + \arctg \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right) \equiv \beta_b \end{aligned} \quad (2.7)$$

Простейшую систему  $S_\sigma$  можно рассматривать как частный случай ударно-волновой



Фиг. 3. Простейшие типы ударно-волновых систем: а, б – системы, состоящие из изоэнтропной волны и замыкающего скачка уплотнения; в, г – двух- и трехскачковые системы; д, е – системы с замыкающей изоэнтропной волной

системы  $S_{n,\sigma}$ , интенсивности первых  $n$  волн в которой равны единице. При этом  $\beta_s = \beta_\sigma$ . В случае  $J_k \neq 1$  эти углы могут различаться как по величине, так и по знаку.

В данной работе исследуются системы, в которых поворот потока осуществляется в том же направлении, что и на замыкающей волне, т.е. системы, для которых

$$\text{sign } \beta_s = \text{sign } \beta_\sigma \quad (2.8)$$

Для таких систем справедлива следующая лемма.

*Лемма.* В оптимальной для  $\beta_s$  системе  $S_{n,\sigma}^{(\beta)}$  угол поворота потока на замыкающей волне  $\sigma$  представляет собой максимально возможный угол  $\beta_l$  поворота потока на одиночной волне, рассчитываемый по числу Маха  $M_n$  перед ней.

*Доказательство.* Пусть в системе  $S_{n,\sigma}$  угол  $\beta_\sigma \neq \beta_l(M_n)$ . Тогда, варьируя интенсивность  $J_l$  замыкающей волны, можно увеличить абсолютное значение угла поворота потока на ней, не изменив при этом углы поворота потока на предыдущих  $n$  волнах. С учетом (2.8) это приведет к соответствующему увеличению  $|\beta_s|$ . Следовательно, равенство  $\beta_\sigma = \beta_l(M_n)$  является необходимым условием оптимальности системы  $S_{n,\sigma}$ .

3. Следуя методологии [3], вначале рассматриваются системы  $S_{w,s}$ , состоящие из изоэнтропной волны и замыкающего скачка (фиг. 3, а, б). В силу проведенных в разд. 2 рассуждений интенсивность этого скачка в оптимальной системе определяется из формулы (2.1) по числу Маха перед ним.

Для нахождения точек, подозрительных на экстремум, используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа

$$L = \omega(M) - \omega(M_1) + \beta_2^{(s)}(M_1, J_2) + \lambda \left( \mu_1 - \frac{(1 + \varepsilon J_2)(J_2 + 1)}{(J_2 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon)} \right)$$

зависит при фиксированном  $M$  от  $M_1, J_2$  и множителя Лагранжа  $\lambda$ . Стоящее в скобках выражение представляет условие (2.1) связи предельной интенсивности  $J_l$  скачка уплотнения с числом Маха  $M_1$  перед ним, разрешенное относительно  $\mu_1$ .

Дифференцируя  $L$  по переменным  $M_1, J_2$  и  $\lambda$  и приравнявая производные нулю, получим систему из трех уравнений. Одно из них является уравнением связи

$$\mu_1 = \frac{(1 + \varepsilon J_2)(J_2 + 1)}{(J_2 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon)} \quad (3.1)$$

а два других после исключения  $\lambda$  сводятся к уравнению

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial M_1^2} = \frac{\partial \omega(M_1)}{\partial M_1^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial M_1^2} = -\frac{\varepsilon(J_2 - 1)\sqrt{J_2 + \varepsilon}[\mu_1 - (1 + \varepsilon J_2)]}{2\chi(\mu_1, J_2)\psi(\mu_1, J_2)(\mu_1 - (1 - \varepsilon))}$$

$$\frac{\omega(M_1)}{\partial M_1^2} = \frac{1 - \varepsilon}{2} \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{\mu_1 M_1^2}, \quad \chi = \sqrt{\mu_1(1 + \varepsilon) - (1 + \varepsilon J_2)} \quad (3.3)$$

$$\psi = \frac{\mu_1(J_2 + \varepsilon) - (1 - \varepsilon)J_2(1 + \varepsilon J_2)}{(1 - \varepsilon)\sqrt{\varepsilon}}$$

Подставляя в (3.2) вместо  $M_1$  выражение, стоящее в правой части (3.1), и проводя несложные алгебраические преобразования, найдем явное аналитическое выражение для определения интенсивности  $J_2 = J_g$  замыкающего скачка в оптимальной для  $\beta$  системе  $S_{w,s}^{(\beta)}$  с изоэнтропной волной

$$J_g = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{(1 + 2\varepsilon)^3}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{(1 + 2\varepsilon)^3}{27}}}, \quad J_g = 1,606 \quad (3.4)$$

Известное значение  $J_g$  дает возможность с помощью формулы (3.1) рассчитать число Маха  $M_1 = M_l$  в оптимальной системе ( $M_l = 1,320$ ), которое обеспечивает максимальное значение угла поворота в рассматриваемой системе. При  $M < M_l$  поток следует разогнать (фиг. 3, б), а при  $M > M_l$  – затормозить (фиг. 3, а) до значения  $M_l$  в изоэнтропной волне, а затем создать замыкающий скачок уплотнения с интенсивностью  $J_2 = J_g$ .

Величина суммарного угла поворота  $\beta_s$  в такой оптимальной системе, как функция от числа Маха набегающего потока, приведена на фиг. 1 и 2 (кривая 4). Из графиков видно, что при любых  $M$  значение  $\beta_s$  превосходит угол поворота как на одиночной волне сжатия, так на одиночном скачке уплотнения.

Интересно отметить, что при  $M < M_l$  увеличение суммарного угла достигается путем предварительного разворота потока в волне разрежения в направлении, противоположном углу поворота на скачке (фиг. 3, б).

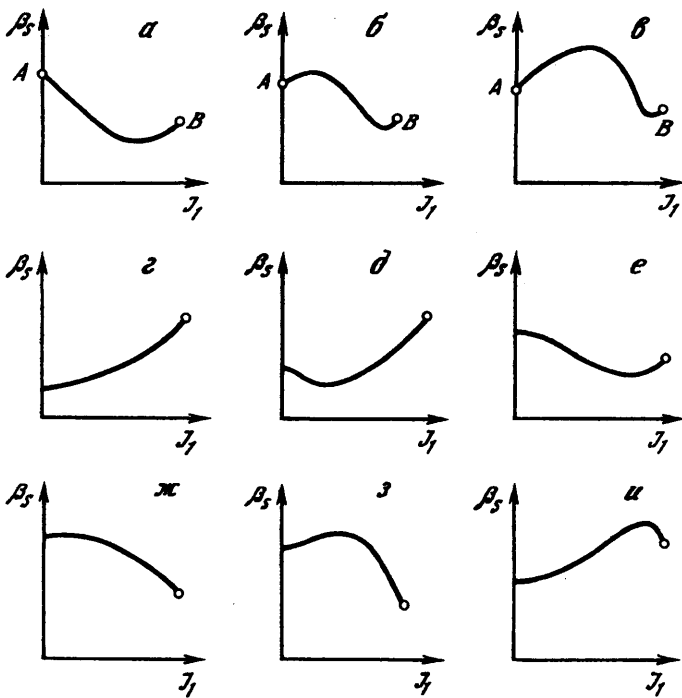
Перейдем к анализу системы  $S_{s,s}$ , в которой первой волной является скачок уплотнения (фиг. 3, в). Суммарный угол  $\beta_s$  поворота потока в такой системе при фиксированных значениях  $M$  и  $\gamma$  зависит только от интенсивности  $J_1$  первого скачка, так как угол поворота потока на втором (замыкающем) скачке однозначно выражается через  $J_1$  по формулам (1.4), (2.1) и (2.2). Величина  $J_1 \in [1, J_*]$ , где  $J_*$  – интенсивность скачка уплотнения со звуковым течением за ним, так как при  $J_1 > J_*$  течение за первым скачком становится дозвуковым и замыкающий скачок уплотнения не может существовать.

Значение  $J_*$  определяется из (1.4) при условии  $M_1 = 1$

$$J_* = \frac{\mu - 1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\mu - 1}{2\varepsilon}\right)^2 + \mu} \quad (3.5)$$

Соответствующий угол поворота рассчитывается по формулам (1.2) и (3.5), которые приводят к зависимости

$$\beta_* = \arctg \left[ \sqrt{\frac{J_* - 1}{1 + \varepsilon J_*}} \frac{(1 - \varepsilon)(J_* - 1)}{(J_* + \varepsilon) + (J_* - 1)} \right] \quad (3.6)$$



Фиг. 4. Качественное поведение исследуемой функции: *a-v* – поведение суммарного угла поворота в системе, состоящей из изотропной волны и замыкающего предельного скачка, *z-e* – в системе из двух скачков уплотнения, *ж-u* – в системе с замыкающей волной разрежения; *a, z, ж* – соответствуют  $M = 1,1$ , *б, д, з* –  $M = 1,2$ , *в, е, u* –  $M = 1,6$

Вид функции  $\beta_s(J_1)$  при  $M = 1,2, 1,6$  и  $2$  показан на фиг. 4, *a-v* соответственно. Ясно, что при  $J_1 = 1$  суммарный угол поворота совпадает с максимальным углом  $\beta_1^{(s)}$  поворота потока (2.2) на одиночном скачке (точка *A* на фигурах). В случае  $J_1 = J_*$  величина  $\beta_s = \beta_*$  (3.6) (точка *B* на фиг. 4, *a-v*).

Как видно из фиг. 4, *a-v*, исследуемая функция немонотонна при любых  $M$ . Однако количество экстремумов, а также их тип существенно зависят от числа Маха. При малых значениях  $M$  угол  $\beta_s$  имеет только один минимум и во всем диапазоне  $[1, J_*]$  он меньше максимального угла поворота на одиночном скачке (фиг. 4, *a*). С увеличением  $M$  у функции появляется второй экстремум – максимум, а также область значений  $J_1$ , в которой  $\beta_s > \beta_1^{(s)}$  (фиг. 4, *б, в*).

По аналогии с выводом формул (3.1) и (3.2) несложно показать, что в двухскачковой системе точки экстремума определяются из совместного решения уравнения (3.1) и уравнения

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial M_1^2} \frac{\partial M_1^2}{\partial J_1} = -\frac{\partial \beta_1}{\partial J_1} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial M_1^2}{\partial J_1} = -\frac{J_1^2 + 2\varepsilon J_1 + 1}{J_1^2(1 + \varepsilon J_1)^2} \mu \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial J_1} = \frac{[\mu(J_1 + 1 + 2\varepsilon) - (1 + \varepsilon J_1)(J_1 + 1)]}{2\chi(\mu, J_1)\psi(\mu, J_1)\sqrt{J_1 + \varepsilon}} \quad (3.9)$$

Функции  $\psi$  и  $\chi$  находятся по формулам (3.3),  $J_1$  – интенсивность первого скачка.

Полагая в (3.1) и (3.7)  $J_1 = 1$ , получим  $M = M_l$  и  $J_2 = J_g$  (3.4). При  $M < M_l$  система уравнений в диапазоне  $[1, J_*$ ] имеет одно решение, отвечающее минимуму исследуемой функции  $\beta_s(J_1)$ . При  $M > M_l$  в указанном диапазоне появляется второй корень уравнения, который соответствует максимуму этой функции. Следовательно, только при  $M > M_l$  система  $S_{s, s}$  из двух скачков дает выигрыш в угле поворота потока по сравнению с одиночным скачком. В интервале  $M \in [1, M_l]$  максимальный угол поворота потока на одном скачке превышает угол поворота потока в двухскачковой системе при любых значениях интенсивностей входящих в систему волн.

Максимальное значение суммарного угла поворота потока в системе показано на фиг. 1 и 2 (кривая 5). Видно, что при больших числах  $M$  это значение почти в 2 раза превосходит максимальный угол поворота потока на одиночном скачке.

Перейдем к анализу более общих систем, состоящих из  $n$  косых скачков и замыкающего предельного скачка (фиг. 3,  $z$ ). Результаты расчетов показали, что при  $M \geq M_l$  в таких системах также существуют максимумы исследуемой функции (см. кривую 6 на фиг. 1 и 2, построенную для  $n = 2$ ). При фиксированных  $M$  и  $\gamma$  с ростом  $n$  значение максимального угла поворота монотонно возрастает, а интенсивности входящих в систему косых скачков уменьшаются.

Необходимо отметить, что в отличие от рассматривавшихся ранее в [1–3] многоскачковых систем, оптимальных для полного и статического давления, плотности, скоростного напора, в которых интенсивности первых  $n$  скачков уплотнения равны между собой, в оптимальной для  $\beta_s$  многоскачковой системе значения интенсивностей скачков не равны между собой, хотя и близки по величине.

4. Рассмотрим ударно-волновые системы  $S_{n, w}$ , состоящие из  $n$  косых скачков и замыкающей изоэнтропной волны сжатия или разрежения. Как показано в разд. 2, в оптимальной системе интенсивность замыкающей волны должна определяться по формуле (2.5), если замыкающая волна является волной сжатия, или (2.4), если она представляет собой волну разрежения.

Как и в предыдущем разделе, проанализируем вначале простейший случай – систему  $S_{s, w}$ , состоящую из скачка уплотнения и замыкающей предельной изоэнтропной волны (фиг. 3,  $d, e$ ). Качественное поведение исследуемой функции  $\beta_s(J_1)$  представлено на фиг. 4 (фрагменты  $z-e$  соответствуют системе  $S_{s, c}$  замыкающей волной сжатия, а  $ж-u$  – системе  $S_{s, r}$  с замыкающей волной разрежения).

Из фиг. 4,  $z-e$  видно, что использование системы  $S_{s, c}$  (фиг. 3,  $d$ ) не приводит к увеличению суммарного угла поворота потока. Действительно, при малых  $M$  (фиг. 4,  $z$ ) угол  $\beta_s$  монотонно возрастает от  $\beta_l^{(c)}(M)$  (2.5), соответствующего максимальному углу поворота потока в волне сжатия, до  $\beta_*(M)$  (3.6), отвечающей скачку уплотнения со звуковым течением за ним. Начиная с  $M_p \approx 1,15$ , у исследуемой функции появляется минимум (см. фиг. 4,  $d, e$ ). При  $M < M_d = 1,420$  максимальный угол поворота потока в системе совпадает с углом  $\beta_*(M)$  (фиг. 4,  $d$ ), а в случае  $M > M_d$  он равен углу  $\beta_l^{(c)}(M)$  (фиг. 4,  $e$ ).

При последовательном расположении скачка уплотнения и предельной волны разрежения одного направления (фиг. 3,  $e$ ) углы поворота на скачке и на волне имеют противоположные знаки. Несмотря на это, суммарный угол поворота потока в системе при некоторых числах  $M$  может оказаться больше предельного угла поворота на отдельной волне. Действительно, только при малых  $M$  функция  $\beta_s$  монотонно убывает от предельного угла поворота в волне  $\beta_l^{(r)}(M)$  (2.4) до величины  $\beta_r(M) = \beta_*(M) - \beta_b$ , соответствующей случаю звукового скачка уплотнения (фиг. 4,  $ж$ ). Если  $M > M_p$ , то исследуемая функция ведет себя немонотонно и имеет максимум при некотором значении интенсивности  $J_1$  скачка уплотнения (фиг. 4,  $з, u$ ). При этом появляется

область значений  $J_1$ , в которой угол  $\beta_s$  превосходит предельный угол  $\beta_l^{(r)}(M)$  поворота потока на одиночной волне.

Для определения экстремальных точек следует рассмотреть целевую функцию

$$\beta_s = \beta_l^{(s)}(M, J_1) + \beta_l^{(r)}(M_1)$$

Так как предельный угол  $\beta_l^{(r)}(M_1)$  (2.4) поворота потока в волне разрежения зависит только от числа Маха  $M_1$ , которое однозначно определяется через  $J_1$  и  $M$  с помощью соотношения (1.4), то при фиксированном  $M$  угол  $\beta_s$  является функцией единственной переменной – интенсивности  $J_1$  скачка уплотнения.

Анализ функции  $\beta_s(J_1)$  на экстремум позволяет получить следующее уравнение для определения интенсивности  $J_1$ , при которой функция достигает максимума

$$\frac{\partial \beta_s}{\partial J_1} = - \frac{\partial \omega(M_1)}{\partial M_1^2} \frac{\partial M_1^2}{\partial J_1} \quad (4.1)$$

Входящие в (4.1) производные находятся по формулам (3.3), (3.8) и (3.9).

Несложные преобразования уравнения (4.1) позволяют получить явную аналитическую зависимость числа  $M$  от интенсивности  $J_1$  скачка уплотнения

$$M = (J_1 + 1) \sqrt{\frac{J_1 + \varepsilon}{J_1(J_1 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon)(J_1 + 1)}} \quad (4.2)$$

При  $J_1 = 1$  из (4.2) получается точное, не зависящее от  $\gamma$  значение особого числа Маха

$$M_p = 2 / \sqrt{3} \quad (4.3)$$

начиная с которого, функция  $\beta_s(J_1)$  имеет максимум.

Следует отметить, что формула (4.2) может служить и для определения минимума функции  $\beta_s$  в системе, состоящей из скачка уплотнения и предельной волны сжатия. Данный факт является следствием отмеченного в разд. 2 свойства симметрии функций  $\beta_l^{(r)}(M)$  и  $\beta_l^{(s)}(M)$  относительно вертикальной прямой  $\beta = \beta_b$ . Соответственно и значение  $M_p$  (4.3) ограничивает диапазон чисел Маха, в котором угол  $\beta_s$  имеет указанный минимум.

Максимальный угол поворота потока в системе  $S_{s,r}$  с замыкающей предельной волной разрежения показан на фиг. 1 (кривая 7). Видно, что при больших  $M$  этот угол почти в 2 раза превосходит предельный угол поворота потока на одиночной волне.

Переход от системы  $S_{s,w}$  к более общей системе  $S_{n,w}$ , состоящей из  $n$  косых скачков и замыкающей предельной изоэнтропной волны, не приводит к качественно новым результатам. Так, угол поворота в системе с замыкающей волной сжатия по-прежнему оказывается меньше угла поворота потока на одиночной волне (ударной или изоэнтропной), а угол  $\beta_s$  в системе с замыкающей волной разрежения при  $M > M_p$  вновь превышает предельный угол поворота потока на одиночной волне в некоторой области изменения интенсивностей входящих в  $S_{n,w}$  скачков. При этом, как и в случае системы с замыкающим предельным скачком, с ростом  $n$  величина максимально возможного угла поворота потока в системе монотонно возрастает.

5. Проведенный анализ оптимальных для  $\beta_s$  систем показывает их тесную связь с оптимальными для газодинамических переменных системами с ограничениями на суммарный угол  $\beta_s$  поворота потока [4, 5].

Так, в [4] доказывається, что в системе  $S_{s,r}$  из скачка уплотнения и замыкающей волны разрежения с фиксированным углом  $\beta_s$  поворота потока статическое давление при  $M < M_p$  монотонно при любых значениях параметра  $\beta_s$ , а при  $M > M_p$  оно имеет



максимум. Как показано в разд. 4, аналогичным образом ведет себя и суммарный угол поворота потока в системе  $S_{s,r}^{(\beta)}$ .

В [5] рассматривается система  $S_{r,s}$  из волны разрежения и скачка уплотнения, угол  $\beta_s$  в которой фиксирован. В такой системе при  $M \in [1, M_I]$  статическое давление не-монотонно и имеет минимум при определенном значении интенсивности скачка уплотнения. При тех же  $M$  функция  $\beta_s$  в системе  $S_{r,s}^{(\beta)}$  также немонотонна (см. разд. 3).

Отметим, что указанная связь оптимальных систем  $S_{n,\sigma}^{(\beta)}$  и  $S_{n,\sigma}^{(p)}$  с ограничениями на угол  $\beta_s$  [4, 5] дает возможность использовать полученные результаты для анализа ударно-волновых структур, которые образуются в результате пересечения газодинамических разрывов [6]. Расчет таких структур обычно базируется на условиях динамической совместности на тангенциальном разрыве, исходящем из точки их пересечения, которые заключаются в равенстве статических давлений и углов поворота потока по обе стороны тангенциального разрыва. Согласованный характер поведения статического давления и угла поворота потока в оптимальных системах позволяет осуществить переход к оптимизации ударно-волновых структур, т.е. к учету взаимодействия волн, входящих в оптимальную систему.

**Заключение.** В работе показана возможность использования ударно-волновых систем для обеспечения максимальных углов поворота сверхзвукового потока. Отмечена связь таких систем с оптимальными для статического давления системами, имеющими ограничения на суммарный угол поворота потока.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда по исследованиям в области фундаментального естествознания (проект 95-0-4.2-171).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Г.И. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования. М.: Наука, 1992. 306 с.
2. Герман Р. Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960. 290 с.
3. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 118–126.
4. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы при ограничениях на суммарный угол поворота потока // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 4. С. 142–150.
5. Омельченко А.В., Усков В.Н. Экстремальная система волна разрежения – скачок уплотнения в стационарном потоке газа // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 2. С. 40–47.
6. Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995. 180 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
3.XII.1996