МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1998

УДК 532.546

© 1988 г. Н.Б. ИЛЬИНСКИЙ, А.Р. КАСИМОВ, Н.Д. ЯКИМОВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ. ОБРАТНЫЙ МЕТОД, ВАРИАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ОЦЕНКИ

(обзор)

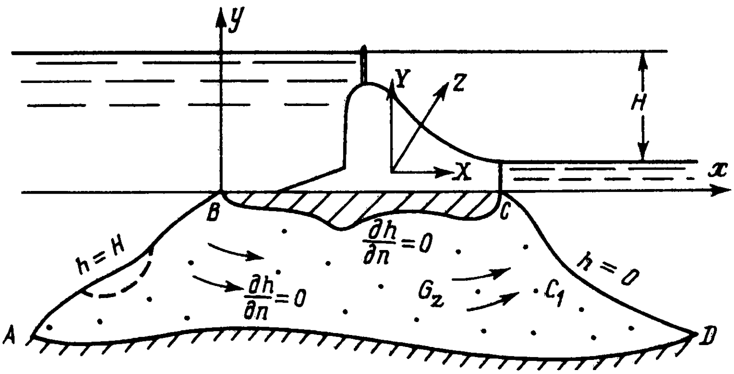
Представлен обзор результатов по аналитическому исследованию проблем, возникающих при расчете фильтрации грунтовых вод в гидротехнических, гидромелиоративных сооружениях и гидрогеологических объектах.

С появлением в 60-е годы мощных ЭВМ в решении практических задач фильтрации все большее место занимают численные процедуры. Однако аналитические методы и в этом случае оказались необходимы не только для разработки и тестирования численных алгоритмов, но и для глубокого понимания физики явлений, параметрического анализа сложных схем, оптимизации и оценок характеристик фильтрационных полей, в том числе в ситуациях, характеризующихся высокой степенью неопределенности относительно параметров пористой среды, механизмов взаимодействия флюида и матрицы, граничных условий и самих границ области течения.

В обзоре охватываются работы по близкому авторам кругу проблем, непосредственно связанные с исследованиями по динамике подземных вод в областях, границы которых известны не полностью. В математической постановке эти проблемы сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений эллиптического типа в областях с неизвестными границами, которые отыскиваются по заданным на них краевым условиям. Последние либо следуют из физической модели процесса (например, депрессионные кривые), либо определяются конструктивными соображениями (например, подземный контур флютбета).

1. Обратные краевые задачи. Задачи управления фильтрационными режимами возникли в практике гидротехнического строительства, начиная с идеи о "плавных" подземных контурах флютбетов [1] и плотин типа Сенкова [2], которые обеспечивали бы эрозионную и полную устойчивость гидросооружения за счет желаемого распределения фильтрационных градиентов и перехода течения под плотиной в напорно-безнапорный режим. Впервые фильтрационный расчет контура плотины с заранее предписанным распределением гидродинамического параметра (скорости) был осуществлен в [3], где построены контуры в грунте конечной глубины и рассмотрены смешанные краевые задачи, когда известные участки контура прямолинейны, а на искомых скорость постоянна. В [4] на части контура заполненной водой дрены (эквипотенциаль, моделирующая сильнопроницаемую зону – распределенный по отношению к внешнему фильтрационному потоку сток) задавалось также условие постоянства выходной скорости, что существенно с точки зрения суффозионной устойчивости фильтра. В электромагнитостатике решены математически аналогичные задачи конструирования по критерию постоянства напряженности поля вдоль части границы области [5], что также обеспечивает безопасные режимы функционирования устройств.

Применение метода обратных краевых задач в фильтрационных расчетах было связано с отечественной программой проектирования плотин, которые сооружались в различных гидрогеологических условиях (неоднородные и анизотропные пласты, водо-



Фиг. 1. Схема фильтрации под бетонной водосливной плотиной (вертикальное сечение)

упоры, дренирующие основания, разломы и пр.), а одним из основных требований являлась местная и полная фильтрационная устойчивость [6].

Проиллюстрируем основную идею метода обратных краевых задач на простейшем примере плоской установившейся фильтрации по закону Дарси под контуром бетонной плотины в однородном изотропном грунте (фиг. 1) [7]. Границы бьефов AB и CD являются эквипотенциалями фильтрационного течения с комплексным потенциалом $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где потенциал скорости фильтрации $\varphi = -kh$, h – пьезометрический напор, ψ – функция тока, $z = x + iy$ – комплексная координата физической плоскости. Граница водоупора AD является линией тока, равно как и подземный контур BC, подлежащий определению. Действующий напор H и коэффициент фильтрации k постоянны. Функция $w(z)$ является аналитической в области течения G_z.

Вместо формы BC априори задана одна из функций вида

$$v = v(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant L \tag{1.1}$$

$$h = h(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{1.2}$$

$$p = p(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{1.3}$$

Соотношение (1.1) есть распределение модуля вектора скорости фильтрации на границе BC как функции дуговой координаты s, L – полная длина подземного контура. Зависимость (1.2) характеризуется распределение напора как функцию декартовой координаты x, l – ширина флютбета. Функция (1.3) задает распределение противодавления $p = y - h$ ($p = P/(\rho g)$, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, P – давление) как функции x.

Требуется найти форму подземного контура плотины и гидродинамические характеристики: напор, функцию тока, противодавление, изотахи, вектор действующей на флютбет результирующей фильтрационной силы $Z = X + iY$, распределение выходных скоростей по границе нижнего бьефа, фильтрационный расход Q под плотиной.

Обратные краевые задачи теории фильтрации с математической точки зрения относятся к смешанным задачам для аналитических функций, т.е. к задачам, в которых одни участки границы (AB, CD, AD на фиг. 1) области известны, а другие (BC) подлежат определению по условиям типа (1.1)–(1.3). К таким задачам относятся и классические задачи теории фильтрации по определению свободных границ (депрессионных кривых, границ раздела пресных и соленых вод и др.) Однако с физической точки зрения между ними есть существенная разница. В задачах со свободными границами краевые условия определяются полностью физической моделью (например, на депрессионных кривых при отсутствии инфильтрации или испарения давление равно атмосферному, а ψ постоянно). При этом цель исследования состоит в отыскании этих границ, т.е. это задачи прогноза. В обратных краевых задачах на искомых участках границы (BC на фиг. 1) краевые условия может задавать проектировщик по своему усмотрению, добиваясь тем самым построения границы с предписанными свойствами. Так, зависимости (1.1)–(1.3) могут широко варьироваться, ограничением здесь служат закладываемая модель течения и некоторые интегральные свойства, требуемые техникой решения краевых задач. Например, за счет выбора (1.1) можно получить контур, приемлемый с противоэрозионной точки зрения, поскольку фильтрационный размыв основания, как известно, контролируется скоростями течения вблизи самого контура и границы нижнего бьефа. При прямом подходе приходится, зачастую опираясь на интуицию, просчитывать большое число вариантов. При обратном подходе искомый подземный контур получается аналитически и сразу. Поэтому обратные краевые задачи относятся к конструктивным, позволяющим находить границы области (сооружения), обладающие заранее заданными свойствами.

Систематическое применение метода обратных краевых задач началось с работы [7], в которой задавалось соотношение (1.1). В дальнейшем были рассмотрены задачи фильтрации при наличии водоупоров различной конфигурации, дренирующего слоя, достраивания и модификации подземного контура, когда часть контура BC задана [8–11].

Технику решения возникающих краевых задач в обратном методе кратко опишем для случая, когда границы AB, CD и AD горизонтальны и выбрана зависимость (1.2) [8]. В этом случае соответствующая область G_w в плоскости w является прямоугольником и отображается на вспомогательную полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ функцией $\zeta = \operatorname{sn}(2Kw/kH)$, где $K(\lambda)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, λ – модуль этого интеграла, определяемый по заданному фильтрационному расходу под флютбетом Q и напору H из равенства $K'/K = 2Q/kH$, причем $K' = K(\lambda')$, $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$.

Далее в $\operatorname{Im}\zeta > 0$ решается смешанная краевая задача для функции $z(\zeta)$ и интегральная формула решения имеет вид

$$z(\zeta) = \frac{i\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-\zeta)\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{2iT}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\lambda\sqrt{1-\zeta^2}}{\lambda'} \tag{1.4}$$

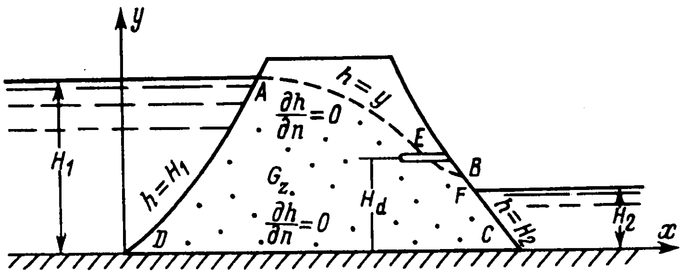
Ядро интеграла $x(\tau)$ в (1.4) определяется как обратная по отношению к (1.2) функция. Из (1.4) по формулам Сохоцкого предельным переходом при $\zeta \to \xi$ получаются параметрические уравнения BC ($-1 \leqslant \xi \leqslant 1$), а после дифференцирования – распределения скорости фильтрации вдоль AB и CD ($1 \leqslant |\xi| \leqslant 1/\lambda$).

Если AD – напорный водоносный горизонт, то область G_w – пятиугольник [12]. Аналогично модифицируется D_w, если искомый контур содержит участки постоянного напора или точечные стоки, моделирующие дренажи, которые служат для снижения противодавления.

Если водоупор AD – наклонная прямая, то G_w – по-прежнему прямоугольник, но подземный контур и характеристики течения в области получаются из решения краевой задачи Гильберта [13]. Были также рассмотрены схемы с криволинейными водоупорами и разной высотой бьефов.

Все известные непрямые методы (полуобратный, функциональных уравнений, обратный) должны включать апостериорную оценку физичности схем течения: искомые области течения должны быть однолистны [12]. Достаточные условия однолистности в виде ограничений на функции (1.1)–(1.3) получены в [14, 15], а вопросы существования и единственности решений исследованы в [16].

Способ построения подземного контура по зависимости (1.3) был разработан в [17]: построено решение, когда AD – сильнопроницаемое основание. В [18] рассмотрен случай неограниченной глубины основания. За исходную здесь бралась область, соответствующая G_z в плоскости функции Жуковского. Если граница AD является горизонтальным водоупором, то при задании (1.3) задача сводится к нелинейной краевой задаче Гильберта. Ее исследование проведено методом непрерывности Вайнштейна с



Фиг. 2. Фильтрация в теле дренированной земляной плотины

доказательствами существования и единственности при определенных ограничениях на класс функций (1.3) и с разработкой алгоритма приближенного метода построения контура [19].

Если в (1.2) вместо $h(x)$ использовать $h(y)$, то схема решения останется той же. Зависимости напора от вертикальной координаты оказались полезными при проектировании грунтонаполняемых флютбетов, в которых гибкие полимерные оболочки заполняются местным грунтом. Условие невсплывания таких флютбетов $p_1 > P$, где $p_1 = -\rho_1 g y$ – давление грунта на оболочку сверху, ρ_1 – плотность грунта, $P = \rho g(h - y)$ – давление снизу фильтрующейся воды, при выборе $p_1/P = k_1 = \text{const}$, $k_1 > 1$ – коэффициент запаса, приводит к краевому условию на искомом контуре

$$h = k_0 y, \quad y_c \leqslant y \leqslant 0, \quad k_0 = 1 - \frac{\rho_1}{\rho k_1} < 0 \tag{1.5}$$

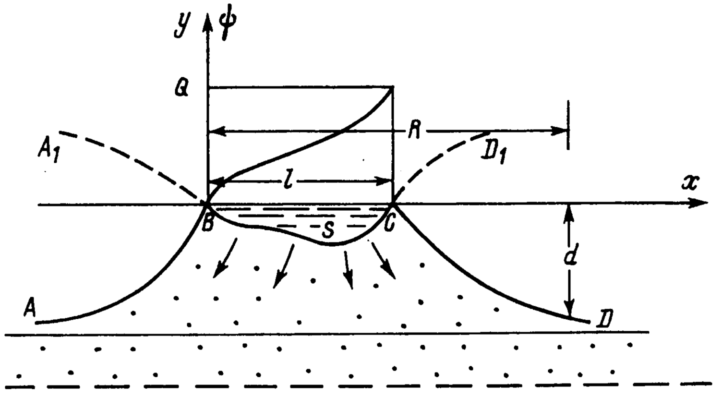
где y_c – максимальная глубина залегания грунтонаполняемой части флютбета. Были решены задачи достраивания устойчивой части флютбета, примыкающей к шпунту [20]. Плотины типа плотины Сенкова [2], в которых бетонное основание заменяется грунтом и возникают депрессионные кривые, отрывающиеся и примыкающие к внутренним точкам подземного контура, также могут рассматриваться как частный случай распределений $h(y)$, когда на безнапорном участке $h = y$.

В [21] предложен способ построения контура основания плотины по распределению выходных скоростей фильтрации вдоль известной границы нижнего бьефа, что позволяет находить контур флютбета так, чтобы не было опасных явлений размыва и выпора грунта в нижнем бьефе.

Как по физическому смыслу, так и по технике решения перечисленные обратные задачи фильтрации близки к задачам профилирования аэродинамических объектов [22], где форма обтекаемого тела (крылового профиля, сопла и пр.) восстанавливается по распределениям гидродинамических параметров.

Опираясь на методы газовой динамики, были решены обратные задачи профилирования подземного контура плотины, когда не выполняется закон Дарси и уравнения фильтрации становятся нелинейными [23]. Так, в [24] найдены такие законы фильтрации, при которых исходная система уравнений преобразуется в систему Коши – Римана. Контуры постоянной скорости и контуры с другими эпюрами вида (1.1) построены в [25].

Обратный метод оказался применим и к задачам безнапорной фильтрации, когда часть границы G_z является обычной свободной поверхностью. Так, при сооружении земляных перемычек (фиг. 2), в особенности при варьировании уровня водоема H_1, особое значение имеет устойчивость низового откоса BFC по отношению к фильтрационному потоку. С инженерной точки зрения, желательно уменьшить как размеры участка высачивания BF, так и выходные градиенты на всем сегменте BFC. Инструментом управления потоком здесь служат экраны, ядра, дренажи и форма перемычки. Например, для дамбы с сухим нижним бьефом ($H_2 = 0$) задавались распределение



Фиг. 3. Фильтрация из земляного канала

$\psi = \psi(y)$, $0 \leqslant y \leqslant H_B$, вдоль участка BF и расходы втекающей и вытекающей воды в горизонтальные дрены (на фиг. 2 показан лишь один такой дренаж, заложенный на уровне H_d). Ширина дамбы по основанию DC, положение дренажей по горизонтали, форма BF и депрессионная кривая AE получаются в результате решения задачи. При этом верховой откос AD считается либо прямолинейным, либо его форма отыскивается по распределению $\psi = \psi(y)$. В прямом методе, когда размеры дренажей и участок BC фиксированы, во-первых, не удается построить эффективное аналитическое решение и, во-вторых, решение не гарантирует выполнения исходных требований относительно потока (могут возникнуть промежуточные участки высачивания между дренажами, поток может выйти на склон массива), что потребует перебора различных вариантов. Обратный метод позволил рассмотреть различные сочетания дренажей и низовых откосов [26].

Граничное условие на BC может браться непосредственно из требований местной устойчивости на суффозию, контактную суффозию, выпор [6]. Так, для простейшей схемы без депрессионной поверхности формы изобарических участков BF, удовлетворяющих таким критериям по всей их длине, построены в [27, 28] методом Полубариновой-Кочиной.

Хотя задача построения участка CC_1 (фиг. 1), примыкающего к телу бетонной плотины, по критерию устойчивости из [29] относится к схемам напорной фильтрации, однако соответствующее граничное условие на профилируемом контуре – эквипотенциали в точности совпадает с условием на депрессионной кривой с равномерным питанием [12], решение этой задачи было построено методом краевых задач [28].

Для фильтрации из ирригационных каналов (фиг. 3) профилирование русла BC осуществлялось по эпюре высачивания $\psi = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где l – ширина канала по урезу воды. Это дало возможность управления фильтрационным потоком, который ограничен депрессионными кривыми AB и CD, причем были рассмотрены режимы с подпором и без подпора с выделением по физическим соображениям единственного решения из возможного однопараметрического класса [30].

В задаче притока к дренажному каналу с малым уровнем воды в нем (на фиг. 3 и сам контур BC и депрессионные кривые A_1B, D_1C – изобары) идея полуобратного метода [12] была соединена с исходной посылкой обратного подхода [27]: на BC было принято условие предельной устойчивости в форме постоянства выходного градиента, а решение получено в элементарных функциях [28].

2. Вариационно-топологические методы. Как показывает практика, часто одной из основных целей рассмотрения задач являются выводы о качественной зависимости характеристик решения от исходных данных. Чаще всего такого рода выводы делаются из анализа уже полученных аналитических или численных решений. Но может оказаться целесообразным изучение таких свойств и независимо от построения решения и даже вместо него, например, в форме теорем сравнения. Значительный вклад в развитие данного подхода внес М.А. Лаврентьев, предложивший формулировку и доказательство ряда качественных свойств для характерных задач фильтрации [31] (см. также [32]). Г.Н. Положий сформулировал и доказал целую группу "вариационно-топологических теорем сравнения" для наиболее типичного класса задач [33–35], устанавливающих характер изменения основных параметров решения при изменениях формы границ участков разных типов. Он также разработал метод применения этих теорем для построения строгих двусторонних оценок, дающих приближенное решение сложных практических задач через известные решения, названный им методом мажорантных областей. Эти исследования развивались в самостоятельный раздел теории фильтрации [12, 36–39].

Теоремы в указанных работах опираются на следующие предположения: *а*) фильтрация линейная (выполняется закон Дарси); *б*) течение плоское; *в*) жидкость и среда несжимаемы; *г*) область фильтрации полностью известна; *д*) область имеет простую топологическую схему (основной тип – "укрупненная трубка тока"); *е*) течение стационарное.

Здесь при ограничениях *в*) и *г*) решение не будет зависеть от времени и ограничение *е*) излишне, но для рассматриваемых ниже обобщений оно становится существенным.

Таким образом, схема области G_z соответствует фиг. 1. Искомая функция $h(x, y)$ удовлетворяет в G_z уравнениям $\mathbf{v} = k(x, y)\,\nabla h$, $\nabla \mathbf{v} = 0$, а также граничным условиям, отмеченным на фигуре.

В качестве иллюстрации приведем формулировку одной из теорем этой группы.

Теорема 1. При вдавливании граничной потенциальной линии: *а*) расход Q через область увеличивается; *б*) значения напора h и давления p в области и на непроницаемых границах увеличиваются, если вдавливается линия наибольшего напора, и уменьшаются, если вдавливаются линия наименьшего напора; *в*) скорость v увеличивается на неизменной потенциальной линии и уменьшается на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии.

Решения рассматриваемых в теоремах задач могут быть построены с помощью конформных или квазиконформных отображений, а изменения исходных данных связаны с изменением геометрии области течения. Поэтому закономерно, что в указанных работах рассуждения проводятся на основе тех или иных методов геометрической теории функции комплексного переменного. Но в более общих задачах, выходящих за рамки приведенных выше ограничений, более эффективными оказались качественные методы теории дифференциальных уравнений, в частности, основанные на принципах Хопфа и Заремба – Жиро (см., например, [40]). С их помощью сначала удалось выйти за пределы ограничений *г*) и *д*).

Типичным случаем неизвестных границ в фильтрационных задачах являются депрессионные кривые и поверхности, на которых обычно принимаются условия $\partial h/\partial n = 0$, $h = y$ (фиг. 2). Для таких задач в работе [41] была сформулирована и доказана группа теорем, устанавливающих зависимость положения депрессионных границ, а также расхода, напора, давления, скорости от определенных изменений формы граничных участков или условий на них. При этом допускалась более сложная схема области (неодносвязная, с многократным чередованием участков разных типов на границе) и рассматривались новые виды вариаций, так что обобщались все утверждения теорем Г.Н. Положего. Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для задач с депрессионной границей, соответствующих схеме фиг. 2, справедливы утверждения *а*) – *в*) теоремы 1, кроме того: *г*) депрессионная кривая поднимается, если вдавливается линия наибольшего напора, и опускается, если вдавливается линия наименьшего напора.

Позднее была разработана методика, позволяющая рассматривать также случаи изменения распределения проницаемости $k(x, y)$, в том числе в задачах с депрессионными участками [42].

Другие типы неизвестных участков встречаются в обратных краевых задачах, о которых шла речь в первом разделе данной работы. Теоремы сравнения были установлены в [43] для задач с условием вида (1.2) и в [44] для задач о проектировании грунтонаполняемых флютбетов [20].

Так как основные принципы теории дифференциальных уравнений не требуют ограничения числа измерений, оказалось возможным рассматривать пространственные постановки [45]. Также удалось отказаться от ограничения $\grave{e}$), рассматривая нестационарные задачи, например, с подвижными депрессионными поверхностями [46] или с учетом сжимаемости [47].

Теоремы сравнения могут иметь место только для постановок с единственным решением. Поэтому если, как в перечисленных работах, доказательство этих теорем не опирается на единственность решения, то последняя оказывается доказанной автоматически одновременно с теоремами (как их частный случай). Для многих из перечисленных задач единственность решения ранее не была установлена. Похожим образом, хотя и не совсем так же, из конкретных формулировок теорем сравнения для нестационарных задач о движущихся депрессионных границах в [46] следует устойчивость процесса перемещения этих границ в сформулированных условиях.

Кроме непосредственного применения для получения практических оценок эти качественные свойства использовались при исследовании существования решения для задач безнапорной фильтрации [48].

Интересное и полезное обсуждение роли качественных методов содержится в [49]. Там наряду с исследованиями по применению специальных функционалов для оценок искомых характеристик обсуждаются и излагаемые здесь результаты по стационарным задачам с депрессионными кривыми.

Обычно, как в приведенных выше примерах, теоремы сравнения устанавливают свойства решений для задач вполне определенного класса. Но возможны случаи, когда нужно, наоборот, установить класс задач, обладающих требуемыми свойствами рассматриваемого здесь типа. Поясним это примером задач нелинейной фильтрации общего вида.

Связь между скоростью фильтрации и градиентом напора (закон фильтрации) может быть нелинейной самых разных типов, в том числе с проявлением анизотропных свойств. Поэтому используются или могут быть построены самые разные модели для нелинейной анизотропной фильтрации. Имея в виду общий вид модели, где скорость связана только с градиентом напора, следует считать, что почти в каждой точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ рассматриваемой области Ω задана связь

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{J}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{J} = \nabla h \tag{2.1}$$

где $\mathbf{R}$ – функция, характеризующая закон фильтрации. Ограничимся случаями взаимно однозначного соответствия $\mathbf{v}$ и $\mathbf{J}$, считая $v = 0$ при $J = 0$. Краевая задача при этом рассматривается в постановке для обобщенных решений (см., например, [50]). В частности, условие неразрывности берется в форме требования

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}\nabla\varphi d\Omega = 0$$

для любой функции $\varphi(x)$ из соответствующего пространства, обращающейся в нуль на границе Ω.

Будем ориентироваться на области типа укрупненной трубки тока, граница которой содержит участки с двумя заданными постоянными значениями напора и непроницаемые участки. Если не накладывать дополнительных ограничений на зависимость (2.1), приведенная постановка может давать решения не единственные или вообще не отвечающие понятию фильтрационного течения. Поэтому целесообразно найти условия для (2.1), при которых решение задачи единственно и обладает свойствами, соответствующими реальным течениям.

С учетом сказанного выше в качестве таких тестовых свойств можно выбрать утверждения теорем сравнения. Такого рода исследования были проведены в [51]. Выяснилось, что для справедливости сформулированных теорем, в том числе для единственности решения, достаточно, чтобы функция $\mathbf{R}(\mathbf{J}, \mathbf{x})$ в каждой точке $\mathbf{x}$ удовлетворяла условию

$$(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \cdot [\mathbf{R}(\mathbf{J}_2, \mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{J}_1, \mathbf{x})] < 0 \tag{2.2}$$

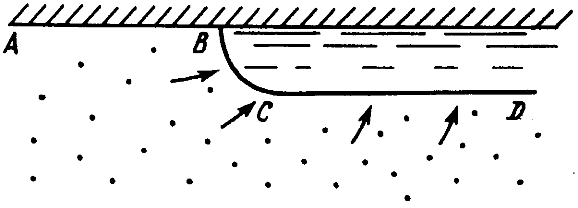
для всех возможных пар векторов $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$. Условие (2.2) имеет ясный физический смысл: добавок $\Delta\mathbf{J} = \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1$ к градиенту напора должен вызывать изменение скорости $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{J}_2) - \mathbf{R}(\mathbf{J}_1)$ с составляющей, направленной против $\Delta\mathbf{J}$ (или, аналогично, добавление скорости $\Delta\mathbf{v}$ должно вызывать соответственно направленное противодействие среды – изменение $\Delta\mathbf{J}$ градиента напора).

Проанализировано выполнение этого условия для характерных примеров нелинейных законов анизотропной фильтрации. Поскольку фильтрация рассматривается в постановке для обобщенных решений, то не удается применять классические принципы и требуется разработка специальной методики рассуждений для сравнения задач. Построен контрпример, показывающий, что интуитивно ясные утверждения оказываются справедливыми не всегда. Рассматривается нелинейная изотропная фильтрация, причем закон фильтрации отвечает условию строгой монотонности роста скорости при росте градиента напора. Кажется естественным утверждение, что если в задаче для области типа укрупненной трубки тока при фиксированном перепаде напора уменьшить проницаемость где-то в области, то расход через нее обязательно уменьшится. Построенный пример показывает, что в специальных случаях он может и возрасти.

Вариационно-топологические методы могут эффективно использоваться и при изучении задач иных типов. В качестве примера приведем проблемы, связанные с развитием в грунте тонких суффозионных каналов. Суффозия (фильтрационная эрозия) наблюдается в некоторых типах грунтов, когда при достаточно больших скоростях (градиентах напора) фильтрующейся воды происходит разрушение структуры из-за вымыва сначала мелких, а затем и крупных частиц.

На практике было замечено [52, 53 и др.], что иногда суффозионное разрушение происходит в форме образования довольно тонких каналов, растущих против фильтрационного потока от зоны его выхода ("piping"). В ряде случаев развитие каналов можно объяснять имеющейся неоднородностью грунта (например, на контакте с бетонным сооружением или по ослабленному слою) или сильной неравномерностью фильтрационного потока. Но принципиально важным представляется вопрос о возможности развития каналов в однородном грунте при равномерной в целом исходной картине фильтрации, когда градиенты напора даже не достигают критических значений, необходимых для начала суффозии. При этом появление затравочного канала из-за перераспределения скорости фильтрации в его головной части сопровождалось бы суффозионным выносом частиц, вызывающим его дальнейший рост. Основная проблема – могут ли взаимосвязанные развитие головной части канала и перераспределение скоростей на ней осуществляться в форме непрекращающегося, самоподдерживающегося процесса роста канала.

Возможные механизм и общие принципы такого явления, его основные качественные свойства были исследованы в [54, 55]. Учитывая труднодоступность этих работ, приведем здесь их основные положения, ограничиваясь максимально упрощенной моделью процесса, выявляющей его основные черты. Предполагается, что разрушение грунта происходит на перемещающейся границе канала и описывается локальными соотношениями. Влиянием перемещения жидкости и частиц в канале пренебрегается, а проницаемость грунта считается неизменной вплоть до границы канала. Таким образом, рассматриваемая математическая модель представляет собой краевую



Фиг. 4. Фильтрация к эрозионному каналу

задачу фильтрации с движущейся (на активной части) границей канала, на которой заданы значение напора и условие, описывающее суффозию. Последнее предполагает, что скорость V_n перемещения развивающейся границы является определенной функцией от величины J градиента напора (нормального к границе) и от угла θ наклона границы к горизонту: $V_n = f(J, \theta)$. Для исследования качественных свойств формулируются требования: наличие критического градиента разрушения $J_*(f(J, \theta) = 0$ при $J < J_*(\theta)$; монотонность $(f(J_1, \theta) < f(J_2, \theta)$ при $J_1 < J_2, J_* < J_2; f(J, \theta_1) < f(J, \theta_2)$ при $\theta < \theta_1 < \theta_2 < \pi)$.

Ряд существенных свойств устанавливается для области под твердой горизонтальной непроницаемой границей, когда фильтрация происходит из бесконечно удаленной точки в растущий канал с неподвижной (сформировавшейся) частью бесконечной длины (фиг. 4). Методом П.Я. Полубариновой-Кочиной [12] удалось построить аналитические примеры таких форм канала, точки развивающейся границы которого перемещаются с одинаковыми горизонтальными скоростями. Таким образом, показано существование в рамках модели каналов, которые растут против фильтрационного потока, не меняя своей формы. Обычно такого рода решения называют стационарными (или установившимися). В данном случае кажется более уместным термин "равновесные" из-за свойств процесса, устанавливаемых в [54] рассматриваемыми вариационно-топологическими методами.

Одно из основных свойств – неустойчивость развития канала. Сравнением решений для некоторой исходной (например, равновесной) формы и возмущенной, имеющей участки "обгона" и "отставания", нетрудно установить, что участки обгона будут двигаться быстрее, а отстающие – медленнее, чем соответствующие на исходной границе. Таким образом, возмущения будут расти. Следует ожидать, что канал может ветвиться, принимая древовидную форму. Анализ показывает, что взаимовлияние отдельных ветвей или просто развивающихся участков носит характер конкуренции. Преимущество имеют участки, быстрее растущие против потока, они подавляют отстающие. Последние могут прекращать развитие и останавливаться. Остановившийся участок уже не может вновь начать движение, если на нем не образуется "затравочный" канал. Несмотря на возможность остановки отдельных участков, по указанным заключениям, начавшийся процесс каналообразования уже не может прекратиться, если не изменятся общие фильтрационные условия.

В фиксированном фильтрационном режиме ширина развивающегося канала ограничена сверху. При этом тонкие каналы в определенном смысле растут быстрее широких. В целом по своим свойствам эта модель напоминает процессы вытеснения подвижной жидкостью более вязкой ("пальцы" Саффмана – Тейлора [56 и др.]) вплоть до возможности проявления фрактальных свойств [57]. Отличия определяются свойствами функции $f(J, \theta)$. Кроме наличия остановившихся участков, видимо, можно ожидать большего разнообразия в поведении движущейся границы в зависимости от вида $f(J, \theta)$.

Таким образом, обсуждаемые вариационно-топологические методы оказываются эффективным инструментом исследования, позволяющим устанавливать важные качественные свойства решений, необходимые для практических оценок и полезные для понимания существа рассматриваемых проблем.

3. Оптимизация. Фильтрационный расчет зачастую имеет конечной целью не определение детального распределения параметров течения (напоров, линий тока, градиентов), которые в силу известной приближенности величин коэффициентов уравнений в принципе не могут "поточечно" гарантировать соответствие реальной ситуации, а оценку интегральных характеристик, определяющих инженерную, экономическую, экологическую эффективность объекта по одному или нескольким критериям. Актуальны и задачи оптимизации фильтрационных полей [58, 59], т.е. управления коэффициентами уравнений течения, граничными условиями и самими границами с целью минимизации (максимизации) критерия, включающего как существенную часть фильтрационные характеристики. В стандартном, прямом подходе оптимизации фильтрационного поля следуют по цепочке итераций: задание объекта (гидротехнического сооружения, гидрогеологической системы) – расчет искомых параметров – проверка критерия – улучшение объекта (введение дополнительных защитных или водоохранных управлений типа экранов, скважин, дренажей и т.п.). Недостатками прямого подхода к оптимизации являются необходимость проведения серии заранее неизвестного числа расчетов, невозможность точного выполнения критерия и отсутствие твердой гарантии, что упомянутые итерации сойдутся к глобальному оптимуму. Метод обратных краевых задач является одним из инструментов для оценки интегральных фильтрационных параметров, а в ряде случаев и для их оптимизации [60]. При оптимизации на основе этого подхода задается интегральный критерий, а объект (в частности, его геометрия) определяется в ходе решения наравне с полем фильтрационных параметров.

Задачи выбора объекта, оптимального по форме и расположению в потоке, традиционны в гидромеханике [61–63] и теоретически опираются на изопериметрические и вариационные задачи [64]. Хотя к настоящему времени и накоплен богатый опыт решения задач оптимизации формы области, зачастую такие решения опираются на численные процедуры, не удовлетворяющие строго достаточному условию экстремума и оставляющие открытым вопрос о глобальности, что по сути перекликается с упомянутыми дефектами прямого подхода.

Обратный метод позволяет преодолеть эти сложности и выписать в явном виде как сами экстремали, так и функционалы цели с доказательством необходимых и достаточных условий экстремума в практически произвольном классе границ, а также апостериори построить поле фильтрационных характеристик в найденных областях. При этом управление строится за счет варьирования функций (1.1)–(1.3) в интегральных представлениях типа (1.4), тогда как иная техника оптимизации опирается на вариации в физической области или методы симметризации [49, 65–67].

Задачи оптимизации формы земляного канала, поставленные в [68], были решены в классе произвольных профилей для различных схем течения [69]. В качестве критерия выбирался фильтрационный расход из канала Q, а изопериметрическим ограничением являлась площадь поперечного ("живого") сечения S, причем как сам контур (BC на фиг. 3), так и свободные границы AB и CD отыскивались в процессе решения.

В задаче об оптимальном канале практическим требованием может служить фиксация других гидравлических параметров – гидравлического радиуса или объемного расхода транспортируемой воды M [68, 70]. С одним интегральным ограничением (S) задача имеет простое решение, полученное впервые в [71], а с другим (M) – нет. По методу изопериметрических оценок [64] некоторая трудно измеримая интегральная характеристика объекта (Q) оценивается по другой интегральной характеристике – известной или легко измеримой (S). Соответственно все фильтрационные задачи оптимизации могут трактоваться как оценочные, правда, лишь в том случае, если найденный максимум – глобальный. Более того, реальная оптимизация областей, в особенности в гидрогеологических приложениях, полезна как раз для одно-, двусторонних оценок.

При оценке степени подтопления канала (высоты d на заданном удалении R (фиг. 3) или нормы осушения дрены [72]) задание только величины Q оказалось недостаточным для эффективного решения, а дополнительная фиксация площади S позволила найти двусторонние экстремумы. Иначе говоря, в процессе компоновки пары критерий – ограничение задание дополнительного ограничения может улучшить задачу.

Аналогично при оценке компонент X, Y вектора силы противодавления Z на подземном контуре плотины (фиг. 1) помимо фильтрационного расхода была задана площадь подземной части плотины [73]. Оценка времени движения меченой частицы вдоль характерных линий тока путем оптимизации формы контура канала построена в [74], когда задавалось одно (Q) или два (Q, S) интегральных ограничения.

При оптимизации формы канала для пары $Q-M$ в произвольном классе решение удалось получить лишь в классе трапецеидальных контуров [70]. Аналогично в теплофизике оптимизация оребрения в общем класе аналитически осуществлена для исключительно простой задачи [75], тогда как усложненные модели потребовали ограничений на класс профилей. В задаче оптимизации ядра плотины и формы канала с кольматационным слоем на дне оптимизацию удалось провести только в классе треугольных профилей [76].

В [77] построены примеры, когда в рамках принятой схемы задача или неразрешима, или ведет к самопересекающимся, т.е. физически нереальным, контурам. Следовательно, полученный оптимум следует проверить на соответствие исходной схематизации (найденная форма не должна противоречить заложенной гидродинамической схеме).

Сопоставление оптимальных профилей каналов в классе произвольных и трапецеидальных профилей показало [69, 70], что полигональный оптимум очень близок к абсолютному по критерию, что вполне естественно для эллиптического уравнения состояния. Оптимальные профили оказались близки и по соотношению глубина русла – ширина по урезу воды, из чего можно предположить, что практически при выборе русла достаточно взять это соотношение близким к оптимуму, а собственно форма играет меньшую роль. Поскольку найденные оптимумы оказались устойчивыми, небольшие отклонения в форме от наилучшей не дадут большого проигрыша. С другой стороны, устойчивость решений показывает, что зачастую нельзя рассчитывать на большой выигрыш только путем варьирования границы.

Оптимальный канал для схемы капиллярного растекания, по Ведерникову, оказался совпадающим с эквипотенциалью от действия источника [78], причем найденный экстремум позволил найти погрешность в [79] для предельной схемы фильтрации без капиллярной каймы. Замечательными экстремальными свойствами обладает известный подземный контур постоянной скорости Полубариновой-Кочиной [3]. Оказалось, что он же реализует экстремум площади подземной части флютбета при заданном расходе, площади сечения одиночной дрены на водоупоре, питаемой с затопленной поверхности [80], площади сильнопроницаемого включения в системе равноудаленных высокопроницаемых линз, расположенных в однородном потоке грунтовых вод в напорном пласте [81]. Этот контур оказался совпадающим и с формой пузыря Тэйлора – Сафмена [82] для течения в лотке Хеле – Шоу, и с формой выступа, обеспечивающего экстремум сопротивления при течении, которое отличается от известного течения Куэтта тем, что неподвижная граница неплоская [83].

Можно предположить, что решения хорошо поставленных изопериметрических задач обладают простыми гидромеханическими и геометрическими свойствами типа условия постоянства модуля градиента функции состояния на варьируемой границе [49]. Например, контур пустой кротовой дрены, обеспечивающей максимум площади при заданном фильтрационном расходе, оказался практически круговым [84], причем его вертикальный и горизонтальный характерные размеры получились ровно вдвое меньше, чем у дрены Ведерникова и Жуковского соответственно. Таким же свойством половинности характерного размера по сравнению с геометрически простейшими формами обладает и ряд других оптимальных контуров [69, 83, 85]. Задача о дрене с изобарическим контуром [84] дает пример того, что экстремаль совпадает с практически используемым контуром, т.е. удовлетворяет условию технологичности. Аналогично оптимальный контур водоема, обеспечивающий экстремум ширины конвективного хвоста в однородном внешнем потоке, оказался окружностью [85], что позволяет трактовать это решение и для схем потоков, возмущенных прискважинными фильтрами, которые всегда имеют практически круговую форму.

Поскольку круговое непроницаемое включение обеспечивает минимум падения напора в пласте постоянной проводимости при заданной площади включения [86], можно априори оценить, в каком случае внесение непроницаемого включения нарушит исходную посылку о напорном потоке, когда в задачу помимо напора следует вводить давление и учитывать возможные депрессионные кривые. Аналогично из решения [87] можно оценить интегральный размер зоны полного насыщения и соответственно ту область пористой среды, где решение уже не подчиняется уравнению Лапласа, а описывается уравнениями ненасыщенной фильтрации. Следовательно, найденные экстремумы могут быть использованы для проверки реализуемости заложенных схем течения и в случае произвольных, неоптимальных границ. В смысле оценок был использован обратный метод и в задаче фильтрации в насыщенном массиве грунта, изобарическая поверхность которого является линией инфильтрации – испарения [88].

Простота построенных оптимумов не только полезна с методологической точки зрения, но и подтверждает, что все хорошее – просто.

Заключение. Описанные результаты, как любые аналитические решения, с одной стороны, основаны на серьезных упрощениях и допущениях относительно фильтрации и грунта, с другой – не всегда имеют простую форму. Однако современные компьютеры и ориентированные на аналитические расчеты программные продукты (типа Mathematica, Mapple, MatCad) делают доступными для инженерных приложений даже сложные конструктивные решения, открывая тем самым новые перспективы перед аналитической техникой и переводя казавшиеся некогда громоздкими формулы в разряд стандартных вычислительных процедур.

Какими видятся возможности дальнейшего развития означенной тематики? В целом недостаточно исследованы обратные краевые задачи теории фильтрации в случаях неоднородных и анизотропных грунтов, нестационарных режимов и многофазных течений [89]. Остаются открытыми широкие перспективы и для дальнейшего развития обратных методов как в качестве средства для получения вспомогательных оценок, так и аналитических решений задач, не рассмотренных ранее.

Область применения не ограничивается задачами фильтрации. Так, еще М.А. Лаврентьев уделял большое внимание применению качественных методов такого рода в теории струй [90], в дальнейшем это направление развито в работах [91–93]. Имеются также результаты по задачам теории электрохимической размерной обработки [94, 95] и гидродинамической теории взрыва на выброс [96, 97], базирующимся на концепции идеальной несжимаемой жидкости и моделях со свободными поверхностями. Перспективны вариационные оценки и в моделях, описывающих комбинированные процессы фильтрации, тепломассопереноса, когда процесс описывается уравнениями Пуассона [67, 98, 99] (инфильтрационное питание), Гельмгольца и конвективной диффузии [100–102] (ненасыщенная фильтрация с влагопроводностью, экспоненциально зависящей от капиллярного давления, миграция загрязнителя и кондуктивно-конвективного теплопереноса в потоках грунтовых вод). Первые оптимизационные решения построены для кусочно-однородных сред [103, 104], хотя эффективного метода решения обратной задачи построения контура неоднородности по условиям сопряжения (непрерывности напора и потока вдоль границы раздела зон однородности) пока нет. Неясно, как оптимизировать область при нестационарных режимах, особенно при наличии движущихся свободных поверхностей.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00884) и Международным научным фондом и Российским фондом фундаментальных исследований (совместный грант № J72100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вощинин А.П.* О применении обтекаемых и ребристых подземных контуров при постройке гидротехнических сооружений на проницаемом основании // Инж. сб. 1950. Т. 7. С. 15–20.
2. *Павловский Н.Н.* Собр. соч. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956, 771 с.
3. *Кочина И.Н., Полубаринова-Кочина П.Я.* О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 55–66.
4. *Михайлов Г.К.* О максимальных градиентах близ дренажа земляных плотин // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 2. С. 109–112.
5. *Шнеерсон Г.А.* Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. М.: Энергоатомиздат, 1992. 413 с.
6. Гидротехнические сооружения Ч. 1 / Под ред. М.М. Гришина. М.: Высш. шк., 1979. 615 с.
7. *Нужин М.Т.* О постановке и решения обратных задач напорной фильтрации // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96. № 4. С. 709–711.
8. *Нужин М.Т., Ильинский Н.Б.* Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1963. 139 с.
9. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
10. *Аксентьев Л.А., Ильинский Н.Б., Нужин М.Т. и др.* Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 18. С. 67–124.
11. *Ильинский Н.Б.* Об одной обратной краевой задаче теории фильтрации // Изв. вузов. Математика. 1967. № 3. С. 31–38.
12. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
13. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б.* Определение контура флютбета по эпюре скоростей при наличии водоупора // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань.: Изд-во Казан. ун-та, 1983. Т. 19. С. 59–72.
14. *Аксентьев Л.А.* Достаточные условия однолистности решения обратной краевой задачи теории фильтрации // Успехи. мат. наук. 1959. Т. 14. Вып. 4. С. 133–140.
15. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М.* Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 25. С. 3–121.
16. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
17. *Глущенко А.А.* Об одном методе решения обратных задач теории фильтрации // Прикл. механика. 1965. Т. 1. № 10. С. 103–109.
18. *Ильинский Н.Б., Насыров С.Р.* О задаче построения контура флютбета по эпюре противодавления // Изв. вузов. Математика. 1982. № 2. С. 16–23.
19. *Ильинский Н.Б., Насыров С.Р.* Задача определения подземного контура по эпюре противодавления при наличии прямолинейного водоупора // Изв. вузов. Математика. 1984. № 2. С. 34–42.
20. *Виниченко А.А.* Об одном методе фильтрационного расчета грунтонаполняемых флютбетов // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982. Вып. 18. С. 37–46.
21. *Ильинский Н.Б.* Краевая задача напорной фильтрации // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 5. С. 1033–1036.
22. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
23. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 33–52.
24. *Ильинский Н.Б., Фомин В.М., Шешуков Е.Г.* О нелинейных законах фильтрации специального вида и решении краевых задач // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1972. Вып. 9. С. 92–102.

25. *Ильинский Н.Б., Фомин В.М., Шешуков Е.Г.* Применение метода Бергмана – Назарова к решению уравнений нелинейной фильтрации // Вычисл. и прикл. математика. 1972. Вып. 17. С. 3–18.
26. *Ильинский Н.Б., Шешуков Е.Г., Якимов Н.Д.* Математические методы фильтрационного расчета высоких земляных плотин и изучение особенностей нелинейной фильтрации // Фильтрация воды в пористых средах: Докл. 3-го междунар. симпоз. Киев: Наук. думка, 1978. Ч. 3. С. 3–10.
27. *Ильинский Н.Б., Якимов Н.Д.* Определение формы низового откоса грунтовой плотины по условиям фильтрационной прочности на границе откоса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 101–107.
28. *Ilyinsky N.B., Kacimov A.R., Yakimov N.D.* Designing the shape of soil slopes stable during seepage in Californian hillsides // Slope Stability Engineering: Proc. Intern. Conf. on Slope Stability / Ed. R.J. Chandler. London: Thomas Telford. 1991. P. 67–70.
29. *Kumar D.* Optimal dimensions of weirs // Encyclopedia of Fluid Dynamics. Houston: Gulf Publ & Co.., 1986. V. 1. P. 1434–1495.
30. *Ильинский Н.Б., Касимов А.Р.* Обратная задача фильтрации из канала при наличии подпора // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань.: Изд-во Казан. ун-та, 1983. Вып. 20. С. 104–115.
31. *Лаврентьев М.А.* Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 159 с.
32. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
33. *Положий Г.Н.* Методы движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации // Укр. мат. журн. 1953. Т. 5. № 4. С. 380–400.
34. *Положий Г.Н.* Вариационные теоремы плоской и осесимметричной фильтрации в однородной и неоднородной средах. Метод сохранения области // Укр. мат. журн. 1954. 6. № 3. С. 333–348.
35. *Положий Г.Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1965. 442 с.
36. *Положий Г.Н.* Теория и применения p-аналитических и (p, q)-аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.
37. *Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Лаврик В.И., Мистецкий Г.Е.* Метод мажорантных областей в теории фильтрации. Киев: Наук. думка, 1974. 200 с.
38. *Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Мистецкий Г.Е.* Вариационно-топологический метод в прикладной математике // Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред. Киев: Наук. думка, 1986. С. 31–40.
39. *Глущенко А.А., Клодина Т.В.* Решение одного класса краевых задач теории фильтрации методом мажорантных областей // Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред. Киев: Наук. думка, 1986. С. 46–57.
40. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 203 с.
41. *Якимов Н.Д.* Вариационные теоремы для задач с кривыми депрессии // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. Вып. 13. С. 258–275.
42. *Фаткуллин Р.Г., Якимов Н.Д.* Теоремы сравнения для некоторых задач фильтрации в неоднородных грунтах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 165–169.
43. *Якимов Н.Д.* Вариационные свойства некоторых обратных краевых задач фильтрации // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. Вып. 15. С. 191–202.
44. *Гайфутдинов А.Н., Якимов Н.Д.* Теоремы сравнения для обратных краевых задач фильтрации под плотинами из синтетических материалов // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. Вып. 21. С. 50–61.
45. *Якимов Н.Д.* Вариационные теоремы пространственной фильтрации // Краевые задачи теории фильтрации: Матер. Всесоюз. совещ. Ужгород: Ин-т математики АН УССР, 1976. С. 48–49.
46. *Якимов Н.Д.* Вариационные теоремы для задач нестационарной безнапорной фильтра-

ции // Матер. конф. и совещ. по гидротехнике. Фильтрационные исследования и расчеты при проектировании гидротехнических сооружений. Л.: Энергоатомиздат, 1983. С. 74–77.
47. *Гайфутдинов А.Н., Якимов Н.Д.* Теоремы сравнения для задач нестационарной напорной фильтрации // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 160–163.
48. *Якимов Н.Д.* Исследование разрешимости задачи фильтрации в неоднородной земляной плотине // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 2. С. 307–310.
49. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с. См. также: *Goldshtein R.V., Entov V.M.* Qualitative Methods in Continuum Mechanics. Harlow, Essex: Longman Scient. and Techn. N.Y.: Wiley, 1994. 279 p.
50. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
51. *Гайфутдинов А.Н., Якимов Н.Д.* Теоремы сравнения для задач нелинейной анизотропной фильтрации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 45–51.
52. *Terzaghi K., Peck R.B.* Soil Mechanics in Engineering Practice. N.Y.: Wiley, 1948. 566 p.
53. *Sherard J.L., Decker R.S., Ryker N.L.* Piping in earth dams of dispersive Clay // Proc. ASCE specialy conf. on the perfomance of earth and earth-supported structures. Purdue Univ., 1972. V. 1. Pt 1. 1972.
54. *Померанец М.В., Якимов Н.Д.* Математическое моделирование развивающегося суффозионного канала. Казань, 1994. 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.06.94, № 1367–В94.
55. *Якимов Н.Д.* Теоремы сравнения в краевых задачах механики с неизвестными границами // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике: 4-я Междунар. конф. Новосибирск: Ин-т гидродинам. СО РАН, 1995. С. 36.
56. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele–Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. № 1242. P. 312–329.
57. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с. См. также: *Feder J.* Fractals. N.Y.: Plenum Press, 1988. 283 p.
58. *Гавич И.К.* Гидрогеодинамика. М.: Недра, 1988. 347 с.
59. *Gorelik S.M., Freeze R.A., Donohue D., Keely J.F.* Groundwater Contamination: Optimal Capture and Containment. Boca Raton: Lewis, 1993.
60. *Ilyinsky N.B., Kacimov A.R.* The estimation of integral seepage characteristics of hydraulic structures in terms of the theory of inverse boundary-value problems // ZAMM. 1992. B. 72. H 2. S. 103–112.
61. Theory of Optimum Aerodynamic Shapes / Ed. A. Miele. N.Y.: Acad. Press, 1965. 455 p.
62. *Pironneau O.* Optimal Shape Design for Elliptic Systems. N.Y.: Springer, 1984. 168 p.
63. *Haslinger J., Neittaanmaki P.* Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications. Chichester: Wiley, 1988. 335 p.
64. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
65. *Алимов М.М., Скворцов Э.В.* Об оценках расходных характеристик в теории фильтрации и теплопроводности // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 462–468.
66. *Fujii N.* Second-order necessary conditions in a domain optimization problem // J. Optimiza Theory and Appl. 1990. V. 65. № 2. P. 233–244.
67. *Belov S., Fujii N.* Symmetry and sufficient condition of optimality in a domain optimization problem // Control and Cybernetics. 1997. V. 26. № 1. P. 45–56.
68. *Костяков А.Н.* Основы мелиорации. Изд. 6. М.: Сельхозгиз, 1960. 622 с.
69. *Ильинский Н.Б., Касимов А.Р.* Фильтрационная оптимизация формы земляного канала методом обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 76–80.
70. *Kacimov A.R.* Seepage optimization for a trapezoidal channel // J. Irrigation and Drainage. ASCE. 1992. V. 118. № 4. P. 520–526.
71. *Preissmann A.* A propos de la filtration au-dessous de canaux // Houille blanche. 1957. V. 12. № 2. P. 181–188.
72. *Ильинский Н.Б., Касимов А.Р.* Оценки уровней подпора и осушения по гидродинамической модели // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 82–90.
73. *Ilyinsky N.B., Kacimov A.R.* Problems of seepage under dam // Proc. Indian Nat. Sci. Acad. Pt. A. 1991. V. 57. № 1. P. 61–68.

74. *Касимов А.Р., Тартаковский Д.М.* Оценка времени миграции трассера в потоке грунтовых вод // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. № 11. С. 1751–1759.
75. *Duffin R.J.* A variational problem relating to cooling fins // J. Math. and Mech. 1959. V. 8. № 1. P. 47–56.
76. *Kacimov A.R.* Optimization of seepage rate through a triangular core // Intern. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1997. V. 21. P. 443–451.
77. *Kacimov A.R.* Steady, two-dimensional flow of ground water to a trench // J. Hydrology. 1991. V. 127. № 1–4. P. 71–83.
78. *Касимов А.Р.* Фильтрационная оптимизация формы земляного канала с учетом капиллярности // Вычисл. и прикл. математика. 1987. Т. 61. С. 70–74.
79. *Виригин Н.Н.* Фильтрация воды из оросителя ирригационной системы // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. № 4. С. 589–592.
80. *Касимов А.Р.* Оптимизация полива в гидродинамической модели фильтрации // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 338–341.
81. *Касимов А.Р.* Профилирование сильнопроницаемого включения и экстремальное свойство пузыря Тэйлора – Сафмена // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 5. С. 193–196.
82. *Taylor G., Saffman P.G.* A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1959. V. 12. Pt 3. P. 265–279.
83. *Kacimov A.R.* Optimization of the protrusion shape for a Couette type flow // Optim. Contr. Appl. and Methods. 1994. V. 15. № 3. P. 193–203.
84. *Ilyinsky N.B., Kacimov A.R.* Problems of seepage to empty ditch and drain // Water Resources Research. 1992. V. 28. № 3. P. 871–876.
85. *Ilyinsky N.B., Kacimov A.R.* Analytic estimation of ground water flow around cutoff wall and into interceptor trenches // J. Ground Water. 1992. V. 30. № 6. P. 901–906.
86. *Kacimov A.R., Nicolaev A.N.* Steady seepage near an impermeable obstacle // J. Hydrology. 1992. V. 138. P. 17–40.
87. *Касимов А.Р.* Минимальный размер пузыря полного насыщения вокруг одиночного источника // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 6. С. 169–173.
88. *Kacimov A.R.* Explicit solutions for seepage infiltrating into a porous earth dam due to precipitation // Intern. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1996. V. 20. P. 715–723.
89. *Ильинский Н.Б.* Обратная задача напорной фильтрации в неоднородном анизотропном грунте под водопроницаемым подземным контуром // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1968. Вып. 5. С. 43–50.
90. *Лаврентьев М.А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 136 с.
91. *Serrin J.* Two hydrodynamic comparison theorems // J. Rat. Mech. Anal. 1952. V. 1. P. 1–48.
92. *Gilbard D.* Jets and Cavities. Handbuch der Physik. Berlin; Springer Verlag, 1963. V. 9. P. 311–445.
93. *Garabedian P.R.* Partial differential equations. 1964. 661 p.
94. *Клоков В.В.* Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. 80 с.
95. *Якимов Н.Д.* Качественные исследования геометрии анодной границы в процессе электрохимической размерной обработки // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1993. Вып. 28. С. 101–111.
96. *Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Краевые задачи теории взрыва. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 180 с.
97. *Якимов Н.Д.* Исследование задачи о взрыве заряда криволинейного сечения // Тр. Семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. Вып. 14. С. 232–240.
98. *Авхадиев Ф.Г.* Конформные отображения и краевые задачи. Казань: Изд-во Казан. фонда "Математика". 1996. 216 с.
99. *Касимов А.Р.* Оптимизация при инфильтрационном питании на депрессионную поверхность грунтового массива // Гидротехн. стр-во. 1997. № 1. С. 26–29.
100. *Корнев К.Г.* Об экстремальных оценках в теории замораживания фильтрующих грунтов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 97–102.
101. *Fujii N., Kacimov A.R.* Estimation and optimization for flow into subsurface openings. "Алгебра и анализ". Тезисы докл. школы–конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева. Казань: Изд. Казан. матем. об-ва. 1997. С. 225–226.

102. *Kacimov A.R., Obnosov Yu.V., Yakimov N.D.* Explicit analytic solutions to problems in ground water flow // Proc. Conf. Analytic-based Modeling Groundwater Flow. Netherlands Inst. Appl. Geosci., TNO. 1997. V. 2. P. 459–467.
103. *Kacimov A.R., Obnosov Yu.V.* Minimization of ground water contamination by lining of a porous waste repository // Proc. Indian. Natl. Sci. Acad. P. A. 1994. V. 60. № 6. P. 783–792.
104. *Kacimov A.R., Obnosov Yu.V.* Explicit, rigorous solutions to 2-D heat transfer: Two-component media and optimization of cooling fins // International J. Heat and Mass Transfer. 1997. V. 40. № 5. P. 1191–1196.

Казань

Поступила в редакцию
9.XI.1995