МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1998

УДК 532.582.7 : 532.517.4

© 1998 г. С.И. МАРТЫНОВ

ГИДРОЛОГИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ

Рассматривается гидродинамическое взаимодействие твердых частиц в вязкой несжимаемой жидкости. Получено аналитическое решение задачи для взаимодействия двух и трех частиц. Вычислены силы и моменты, действующие на частицы, а также их линейные и угловые скорости. Проведено сравнение с ранее полученными результатами.

1. Постановка задачи. В проблеме гидродинамического взаимодействия n частиц задача о взаимодействии двух частиц является основополагающей в силу линейности уравнений и граничных условий, описывающих движение жидкости при малых числах Рейнольдса.

Рассматривается гидродинамическое взаимодействие двух твердых сферических частиц A и B радиусами a и b, которые помещены в неограниченную несжимаемую жидкость с вязкостью η. На частицы не действуют внешние силы и моменты. Размеры частиц такие, что число Рейнольдса Re < 1. Скорость жидкости на бесконечности $\mathbf{U}$ есть линейная функция координат

$$U_i = E_{ij}x_j + \Omega_{ij}x_j, \quad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

Положение точки жидкости относительно центров сфер A и B будем обозначать векторами $\mathbf{X}_a$ и $\mathbf{X}_b$ соответственно. Для введенных векторов имеем соотношение

$$\mathbf{X}_b = \mathbf{X}_a - \mathbf{r}$$

где вектор $\mathbf{r}$ разделяет центры двух сфер. Так как Re < 1, уравнения для скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и давления $p(\mathbf{x})$ в жидкости записываются в приближении Стокса

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \eta\nabla^2\mathbf{u} = \nabla p \tag{1.1}$$

На поверхности частиц имеем условия прилипания

$$u_i + U_i(A) + E_{ij}X_{aj} + \Omega_{ij}X_{aj} = V_i^a + \Gamma_{ij}^a X_{aj}, \quad |\mathbf{X}_a| = a \tag{1.2}$$

$$u_i + U_i(B) + E_{ij}X_{bj} + \Omega_{ij}X_{bj} = V_i^b + \Gamma_{ij}^b X_{bj}, \quad |\mathbf{X}_b| = b \tag{1.3}$$

$$u_i \to 0, \quad |\mathbf{X}| \to \infty \tag{1.4}$$

Здесь векторами $\mathbf{V}^a, \mathbf{V}^b, \mathbf{\Gamma}^a, \mathbf{\Gamma}^b$ обозначены абсолютные линейные и угловые скорости сфер A и B, $\mathbf{U}(A)$, $\mathbf{U}(B)$ – скорости невозмущенного потока жидкости в точках, занимаемых центрами сфер A, B соответственно. Линейные и угловые скорости сфер есть неизвестные функции вектора $\mathbf{r}$ и параметра $\varepsilon = a/r$.

В такой постановке задача численно решалась в [1] и рассматривалась в [2]. В [2] проведен анализ задачи и с использованием методов безразмерного анализа приведены выражения для относительной линейной скорости и угловых скоростей сфер, содержащие скалярные функции, зависящие от ε. Значения этих функций брались как из анализа гидродинамического взаимодействия сфер на больших и малых расстояниях между частицами (теория гидродинамической смазки), так и из численных результатов [1]. При этом отмечалось, что процедура численного решения задачи [1] не дает достаточной точности при малых расстояниях между сферами, что приводит к несовпадению значений некоторых скалярных функций, полученных в [1] и [2].

Решение уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2)–(1.4) может быть представлено в силу их линейности как сумма решений двух задач, названных ниже задачами α и β. Далее приводятся постановки и аналитические решения этих задач для случая сфер одинакового и произвольного радиусов с точностью до ε^5 для задачи α и с точностью ε^3 для задачи β.

2. Задача α. Рассмотрим случай сфер одинакового радиуса ($a = b$). Задача α заключается в нахождении решения уравнений (1.1) с граничными условиями на поверхности двух сфер

$$u_i + E_{ij}X_{aj} = 0, \quad |X_a| = a \tag{2.1}$$

$$u_i + E_{ij}X_{bj} = 0, \quad |X_b| = a \tag{2.2}$$

На бесконечности по-прежнему требуем выполнения условия затухания возмущений (1.4). Фактически эти граничные условия означают, что частицы движутся с локальными линейными и угловыми скоростями невозмущенного потока жидкости. Для получения общего решения задачи α рассмотрим граничные условия (2.1), (2.2) на поверхностях двух сфер. Так как скорость основного течения есть линейная функция координат и сферы имеют одинаковый радиус, для точек на поверхностях сфер A и B

$$E_{ij}X_{bj} = -E_{ij}(-X_{aj} + r_j)$$

Неизвестная вектор-функции $\mathbf{u}$ должна удовлетворять граничным условиям на поверхностях сфер и, следовательно, должна удовлетворять преобразованию

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(-\mathbf{x} + \mathbf{r}) \tag{2.3}$$

Другими словами, $\mathbf{u}$ – функция, антисимметричная относительно точки $\mathbf{x} = \mathbf{r}/2$ для всех значений функции на поверхностях A и B. Сделаем основное предположение работы: функция $\mathbf{u}$ удовлетворяет преобразованию (2.3) в любой точке жидкости. В этом случае $\mathbf{u} = 0$ в точке $\mathbf{x} = \mathbf{r}/2$. Сделанное предположение позволяет записать решение уравнений (1.1) с неизвестными коэффициентами, которые могут быть вычислены с использованием граничных условий только на поверхности одной сферы, например на сфере A (2.1). Граничные условия на поверхности другой сферы (2.2) будут удовлетворены автоматически, так как скорость основного потока жидкости и неизвестная функция $\mathbf{u}$ удовлетворяют одному и тому же преобразованию (2.3) на поверхностях сфер.

Взяв дивергенцию от обеих частей второго уравнения (1.1) и учитывая, что жидкость несжимаемая, получим уравнение для давления

$$\nabla^2 p = 0 \tag{2.4}$$

Решение уравнения (2.4), удовлетворяющее условию на бесконечности (1.5), имеет вид [3]

$$p = H_i L_i + F_{ij} L_{ij} + G_{ijk} L_{ijk} + D_{ijkl} L_{ijkl} + \ldots \tag{2.5}$$

Здесь $L_{ij\ldots k}$ – мультиполь, вычисляемый по правилу

$$L_{ij\ldots s} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{1}{X}\right)\right)\right)\right)$$

где X – расстояние от центра сферы до точки в жидкости, в которой берется значение давления. Так как рассматривается случай двух сфер, решение должно зависеть от расстояний до центров двух сфер, а выражение для давления должно содержать мультиполи двух типов: с частными производными от функций $1/X_a$ и $1/X_b$. С учетом этого выражение для давления (2.5) должно быть записано в виде

$$p = H_i(L_i^a - L_i^b) + F_{ij}(L_{ij}^a + L_{ij}^b) + G_{ijk}(L_{ijk}^a - L_{ijk}^b) + \dots \tag{2.6}$$

где L^a и L^b – мультиполи, содержащие частные производные от функций $1/X_a$ и $1/X_b$ соответственно. Можно записать любой член в выражении (2.6) для давления, используя простое правило: сумма мультиполей четного порядка и разница мультиполей нечетного порядка дают симметричную функцию. Зная решение для давления (2.6), можно, используя результаты [3], записать выражение для функции скорости, удовлетворяющее преобразованию (2.3)

$$\eta u_i = -\frac{2}{3}H_i(L_0^a - L_0^b) - \frac{3}{5}F_{ij}(L_j^a + L_j^b) - \frac{4}{7}G_{ijk}(L_{jk}^a - L_{jk}^b) - \frac{5}{9}D_{ijkl}(L_{jkl}^a + L_{jkl}^b) -$$
$$-\frac{6}{11}T_{ijk\ln}(L_{jk\ln}^a - L_{jk\ln}^b) - \frac{7}{13}P_{ijk\ln s}(L_{jk\ln s}^a + L_{jk\ln s}^b) - \frac{1}{6}H_j(L_{ij}^a X_a^2 - L_{ij}^b X_b^2) -$$
$$-\frac{1}{10}F_{jk}(L_{ijk}^a X_a^2 + L_{ijk}^b X_b^2) - \frac{1}{14}G_{jkl}(L_{ijkl}^a X_a^2 - L_{ijkl}^b X_b^2) - \frac{1}{18}D_{jkln}(L_{ijkln}^a X_a^2 + L_{ijkln}^b X_b^2) - \dots$$

Выбор знаков мультиполей в выражении для давления определялся условием удовлетворения функции скорости антисимметричному преобразованию (2.3). Например, в случае взаимодействия сфер в однородном потоке граничные условия дают симметричное преобразование для вектор-функции скорости и, следовательно, давление должно быть антисимметричной функцией. Другими словами, знаки между мультиполями в скобках в выражениях для давления (2.6) и скорости (2.7) необходимо поменять на противоположные. Так же, как и для давления, можно записать любой член в выражении для скорости (2.7).

Неизвестные тензорные коэффициенты, содержащиеся в (2.6), (2.7), должны зависеть от E_{ij}, r_j, ε и быть линейными по E_{ij}, потому что граничные условия линейны по этой величине. Используя тензоры E_{ij}, r_j, δ_{ij}, можно сконструировать тензор любого ранга, линейный по E_{ij} и содержащий только скалярную функцию от переменной ε. Беря всевозможные линейные по E_{ij} комбинации тензоров E_{ij}, r_k, δ_{ln}, можно записать выражения для неизвестных тензоров H_i, F_{ij}, G_{ijk}, D_{ijkl}, T_{ijkln}, P_{ijklns}.

Выражения (2.6), (2.7) для давления и скорости справедливы в качестве решения для любого типа основного течения, скорость которого может быть представлена многочленом нечетной степени по координатам, например для гиперболического течения. В этом случае из граничных условий следует, что неизвестная вектор-функция должна удовлетворять преобразованию (2.3). В то же время в случае основного течения, скорость которого представляется многочленом четной степени по координатам, например для однородного потока или параболического течения, граничное условие дает симметричное преобразование для скорости возмущенного потока

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(-\mathbf{x} + \mathbf{r}) \tag{2.8}$$

В этом случае решение задачи получается заменой в выражениях (2.6), (2.7) знаков между мультиполями на противоположные. Однако свойства решения от этого существенно изменяются. Так, для решения, удовлетворяющего антисимметричному преобразованию (2.3), существует точка, в которой скорость жидкости равна невозмущенной скорости потока. В случае же решения, удовлетворяющего симметричному преобразованию (2.8), такая точка отсутствует. Это приводит к существенно различным динамическим свойствам взаимодействия частиц в потоках типа однородного течения и течения простого сдвига.

Неизвестные скалярные функции, содержащиеся в тензорных коэффициентах, находятся из граничного условия (2.1). В настоящей работе они найдены с точностью до членов порядка ε^5. Вычисления скалярных функций могут быть продолжены до членов порядка, большего ε^5. Это требует новых членов в выражениях для давления (2.6) и скорости (2.7), которые могут быть легко записаны по алгоритму, указанному выше.

3. Задача β. Для решения общей задачи с учетом граничных условий задачи α необходимо получить решение уравнений (2.1), (2.2), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i = U_i^a + \omega_{ij}^a X_{aj}, \quad |\mathbf{X}_a| = a$$

$$u_i = U_i^b + \omega_{ij}^b X_{bj}, \quad |\mathbf{X}_b| = a$$

Здесь относительные линейные и угловые скорости сфер A и B, обозначенные соответственно как $\mathbf{U}^a, \mathbf{U}^b, \boldsymbol{\omega}^a, \boldsymbol{\omega}^b$, равны

$$U_i^a = V_i^a - U_i(A), \quad \omega_{ij}^a = \Gamma_{ij}^a - \Omega_{ij}^a$$

$$U_i^b = V_i^b - U_i(B), \quad \omega_{ij}^b = \Gamma_{ij}^b - \Omega_{ij}^b$$

Так как рассматривается случай, когда внешние силы и моменты отсутствуют, нет причин ожидать, что антисимметричные свойства основного течения могут быть изменены в результате движения частиц. Поэтому можно предположить, что неизвестная функция $\mathbf{u}$ в задаче β следует антисимметричному преобразованию (2.3). Это позволяет записать соотношения между неизвестными линейными и угловыми скоростями сфер

$$\mathbf{U}^a = -\mathbf{U}^b, \ \boldsymbol{\omega}^a = \boldsymbol{\omega}^b \qquad (3.1)$$

Аналогичные равенства для скоростей двух сфер одинакового размера получены в [1].

Учитывая предположение относительно свойств решения задачи β, можно использовать процедуру нахождения решения задачи α для получения решения задачи β.

Неизвестные тензорные коэффициенты, содержащиеся в (2.6), (2.7), теперь должны зависеть от величин U_i^a, ω_{ij}^a, r_j, ε и должны быть линейными по U_i^a, ω_{ij}^a, потому что граничные условия линейны по этим величинам. Учитывая, что относительная скорость $\mathbf{U}^a$ имеет компоненты $\mathbf{U}^{a\parallel}$, $\mathbf{U}^{a\perp}$ вдоль и перпендикулярно вектору $\mathbf{r}$, а также то, что тензор ω_{ij}^a антисимметричный и, следовательно, некоторые комбинации тензоров $U_i^{a\perp}, r_j, \delta_{ij}$ и $\omega_{ij}^a, r_j, \delta_{ij}$ дают нуль, можно записать все отличные от нуля и линейные по U_i^a, ω_{ij}^a комбинации $U_i^{a\parallel}, U_i^{a\perp}$, $\omega_{ij}^a, r_j, \delta_{ij}$, дающие тензорные коэффициенты в выражениях для давления и скорости и содержащие неизвестные скалярные функции, зависящие только от переменной ε.

Используя эту процедуру, запишем выражения для неизвестных тензорных величин $H_i, F_{ij}, G_{ijk}, D_{ijkl}, T_{ijkln}, P_{ijklns}$. Вычисления неизвестных скалярных функций, проделанные до членов порядка ε^3, аналогичны вычислениям в задаче α. Как будет показано ниже, точность вычислений ε^3 достаточна для нахождения сил и моментов, действующих на сферы, а также линейных и угловых скоростей, приобретаемых сферами в результате их гидродинамического взаимодействия, с точностью ε^5.

Решение задачи β найдено с точностью до порядка ε^3 включительно. Этого достаточно для нахождения неизвестных функций U^a, ω^a и решения общей задачи о гидродинамическом взаимодействии двух сфер с точностью до порядка ε^5 включительно. Заметим, что решение задачи β может быть найдено с любой точностью по параметру ε с помощью предложенного выше метода.

Задача β хорошо известна. Существует точное решение задачи для частного случая движения сфер вдоль линии, соединяющей их центры [4], и решение задачи методом отражений для случая движения сфер как вдоль, так и перпендикулярно линии, соединяющей их центры [5]. В последнем случае рассматривалось движение сфер, как свободно вращающихся в жидкости, так и случай, когда вращение отсутствует из-за действия приложенных внешних моментов. Вычисления, сделанные с точностью до порядка ε^3 включительно методом, представленным выше, дают в точности такие же выражения для сил и моментов, действующих на сферы, как и полученные другими методами, в том числе и методом отражений. Частный случай взаимодействия трех сфер рассматривался в [6].

4. Взаимодействие трех сфер. Подход, используемый для решения задачи о взаимодействии двух сфер, может быть использован для решения задачи о гидродинамическом взаимодействии n сферических частиц. Так как движение жидкости описывается линейными уравнениями и граничными условиями (1.1)–(1.4), то решение задачи о гидродинамическом взаимодействии n сферических частиц может быть представлено в виде суммы решений задач о взаимодействии пар частиц, где суммирование берется по всем возможным комбинациям пар из заданной конфигурации n частиц. В качестве примера рассмотрим взаимодействие трех сферических частиц A, B и C. Выражения для распределения давления и скорости в жидкости записываются в виде

$$p = H_i^a(L_i^a - L_i^b) + H_i^c(L_i^a - L_i^c) + H_i^b(L_i^b - L_i^c) + F_{ij}^a(L_{ij}^a + L_{ij}^b) + F_{ij}^c(L_{ij}^a + L_{ij}^c) +$$
$$+ F_{ij}^b(L_{ij}^b + L_{ij}^c) + \ldots$$
$$\eta u_i = -\frac{2}{3}H_i^a(L_0^a - L_0^b) - \frac{3}{5}F_{ij}^a(L_j^a + L_j^b) - \frac{2}{3}H_i^c(L_0^a - L_0^c) - \frac{3}{5}F_{ij}^c(L_j^a + L_j^c) -$$
$$-\frac{2}{3}H_i^b(L_0^b - L_0^c) - \frac{3}{5}F_{ij}^b(L_j^b + L_j^c) - \ldots$$

Здесь имеется три типа тензорных коэффициентов, обозначенных индексами a, b, c, представленных в виде линейных комбинаций соответствующих тензоров аналогично задаче о двух сферах, с той только разницей, что число возможных комбинаций увеличивается. Это связано с тем, что положение трех точек определяется заданием двух радиус-векторов, в качестве которых можно выбрать любые два из трех, соединяющих центры этих сфер.

Соответственно для задачи о взаимодействии четырех и более сфер необходимо использовать любые три, не лежащих в одной плоскости радиус-вектора для задания положения сфер. Число возможных комбинаций для тензорных величин при этом возрастает. Соответственно возрастает число скалярных функций, входящих в эти комбинации, и число алгебраических уравнений, необходимых для определения значений коэффициентов в разложении скалярных функций по параметру ε – размеру сферы, деленному на наименьшее расстояние между центрами сфер. С этим связана основная трудность предлагаемого метода решения задачи о гидродинамическом взаимодействии трех и большего числа сферических частиц.

В настоящей работе решение задачи о гидродинамическом взаимодействии трех сфер одинакового радиуса найдено с точностью до ε^3. Как видно из приведенных выше выражений, можно вычислить только сумму и разность определенных коэффициентов, но не сами значения каждого из них. Это означает, что нельзя разделить вклад от взаимодействий, например, частиц B и C с частицей A. Можно подсчитать только суммарный вклад от взаимодействия частицы A с двумя другими. Однако этого вполне достаточно для вычисления сил и моментов, действующих на каждую частицу со стороны двух других. Для вычислений коэффициентов в разложениях скалярных функций по параметру ε необходимо использовать граничные условия на поверхностях всех частиц.

5. Силы и моменты, действующие на взаимодействующие сферы. Аналитическое решение задачи о гидродинамическом взаимодействии двух сфер позволяет провести прямые вычисления сил **F** и моментов **T**, действующих на сферы со стороны жидкости.

Рассмотрим взаимодействие двух сфер одинакового радиуса. Используя выражения для давления p (2.6), скорости $\mathbf{u}$ (2.7), тензоров $H_i, F_{ij}, G_{ijk}, D_{ijkl}, T_{ijkln}, P_{ijklns}$ вместе со значениями скалярных функций, получим выражения для силы **F** и момента **T**, действующие на сферу, с точностью ε^5.

Вычисления для задачи α дают

$$F_{ai} = 4\pi\eta a\left[E_{ij}r_j\left(4\varepsilon^5 + \frac{27}{4}\varepsilon^6\right) + E_{jk}\frac{r_j r_k r_i}{r^2}\left(\frac{15\varepsilon^3}{4} + \frac{45\varepsilon^4}{8} - \frac{25\varepsilon^5}{16} + \frac{381\varepsilon^6}{32}\right)\right] \tag{5.1}$$

$$T_{ai} = -\varepsilon_{ijk}\pi\eta a^3 E_{kl}\frac{r_l r_j}{r^2}\left(20\varepsilon^3 - \frac{4922}{63}\varepsilon^5\right) \tag{5.2}$$

$$F_b^\alpha = -F_a^\alpha = -F^\alpha, \quad T_b^\alpha = T_b^\alpha = T^\alpha$$

Вычисления для задачи β дают

$$F_{ai}^\beta = -6\pi\eta a[U_i^{a\parallel}\chi(\varepsilon) + U_i^{a\perp}\varphi(\varepsilon) + \omega_{ij}^a r_j \varphi(\varepsilon)]$$

$$T_{ai}^\beta = 8\pi\eta a^3\varepsilon_{ijk}\left[U_j^{a\perp}r_k\psi(\varepsilon) + \frac{\omega_{kj}^a}{2} + \omega_{ks}^a\frac{r_s r_j}{r^2}\xi(\varepsilon)\right]$$

$$F_b^\beta = -F_a^\beta = -F^\beta, \quad T_b^\beta = T_a^\beta = T^\beta$$

$$\chi(\varepsilon) = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{9}{4}\varepsilon^2 + \frac{19}{8}\varepsilon^3, \quad \varphi(\varepsilon) = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{9}{16}\varepsilon^2 + \frac{59}{64}\varepsilon^3$$

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^3 + 3\varepsilon^4, \quad \psi(\varepsilon) = \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{9}{16}\varepsilon^2 + \frac{27}{64}\varepsilon^3, \quad \xi(\varepsilon) = 3\varepsilon^3$$

Эти соотношения согласуются с предположением об антисимметричном характере решения и, как следствие, с соотношениями для относительных линейных и угловых скоростей сфер (3.1). Аналогичные выражения для сил и моментов получены методом отражений для случая, когда вращение частиц отсутствует ($\omega = 0$) и когда частицы свободно вращаются [5]. Суммарные силы и моменты, действующие на сферы, равны соответственно сумме сил и моментов, вычисленных в задачах α и β.

Соотношения (5.3), (5.4) могут быть рассмотрены как коррекция теорем Факсена [5] для двух взаимодействующих сфер, двигающихся с соответствующими относительными линейными и угловыми скоростями в покоящейся на бесконечности жидкости.

Для случая сфер разных радиусов проделаны соответствующие вычисления, которые дают совпадение с выражениями для сил и моментов, действующих на две сферы разного радиуса в задаче β, полученными методом отражений [5].

Вычисления сил и моментов, действующих на три гидродинамически взаимодействующие сферы, аналогичны вычислениям для двух сфер.

6. Линейные и угловые скорости взаимодействующих сфер. Выражения для сил и моментов, приведенные выше, позволяют вычислить линейные и угловые скорости сфер, приобретаемые ими в результате гидродинамического взаимодействия. Для случая, когда на сферы не действуют внешние силы и моменты, справедливы соотношения

$$F^\alpha + F^\beta = 0, \quad T^\alpha + T^\beta = 0$$

Рассмотрим случай двух сфер. Используя выражения (5.1), (5.3), получим для сфер A и B

$$\frac{T_i^\alpha}{8\pi\eta a^3} = -\varepsilon_{ijk}\left[\frac{F_j^\beta r_k\psi(\varepsilon)}{6\pi\eta a r^2\varphi(\varepsilon)} + \frac{\omega_{kj}^a}{2}\left(1 + \xi(\varepsilon) + \frac{2\varphi(\varepsilon)\psi(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right)\right]$$

$$\frac{F_i^{\alpha\perp}}{6\pi\eta a} = U_i^{a\perp}\varphi(\varepsilon) + \omega_{ik}^a r_k \varphi(\varepsilon), \quad \frac{F_i^{\alpha\|}}{6\pi\pi a} = U_i^{a\|}\chi(\varepsilon)$$

$$U_i^a = \frac{8}{3}\varepsilon^5 E_{ij} r_j + E_{jk} r_j \frac{r_k r_i}{r^2}\left(\frac{5}{2}\varepsilon^3 - \frac{20}{3}\varepsilon^5 + \frac{25}{2}\varepsilon^6\right)$$

$$\omega_{ij} = -\left[\frac{T_{ij}^\alpha}{4\pi\eta a^3} + \frac{F_j^{\alpha\perp} r_i \psi(\varepsilon)}{3a\pi\eta r^2 \varphi(\varepsilon)}\right] \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon) + 3\varepsilon^3\varphi(\varepsilon) + 2\psi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)}$$

Для угловой скорости **Γ** сфер и относительной скорости их центров **V** получим

$$V_i = \Omega_{ij} r_j + E_{ij} r_j - \left[A\frac{r_i r_j}{r^2} + B\left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right)\right] E_{jk} r_k$$

$$\Gamma_i = \varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} + \varepsilon_{ijk} E_{kl}\frac{r_l r_j}{r^2} C$$

$$A = 5\varepsilon^3 - 8\varepsilon^5 + 25\varepsilon^6, \quad B = \frac{16}{3}\varepsilon^5, \quad C = \frac{5}{2}\varepsilon^3 - \frac{2461}{252}\varepsilon^5$$

Относительная скорость центров сфер и угловые скорости двух взаимодействующих сфер в течении с линейным профилем скоростей получены в [2] в точно такой же форме и с такими же значениями коэффициентов A, B. Коэффициент C отличается от приведенного в [2] выражения вторым слагаемым, но имеет численное значение, близкое к полученному в [2].

В [2] использовалась теорема Факсена для получения относительной скорости центров сфер, которая, вообще говоря, справедлива для невзаимодействующих сфер. Влияние второй сферы было учтено включением возмущенного поля жидкости от второй сферы в главное течение. Полученное выражение было уточнено добавлением дополнительных слагаемых. Выражение для угловой скорости, полученное методом безразмерного анализа, содержит неизвестную скалярную функцию, значение которой также получено путем анализа влияния второй частицы на поле скоростей вокруг первой. Для близко расположенных частиц использована теория смазки для получения предельных значений скалярных функций A, B, C, что дало для касающихся сфер: $A = 1, B + C = 1$. Такой же результат для предельных значений коэффициентов можно получить из простого факта, что аналитическое решение задачи дает в точке касания сфер скорость невозмущенного потока жидкости.

Из общего решения задачи (2.7) следует, что существует точка, в которой $\mathbf{u} = 0$. Другими словами, существует расстояние между сферами, на котором вклад гидродинамического взаимодействия в скорость жидкости равен нулю. Существование такой точки имеет простое объяснение. Сферы A и B вращаются с одинаковыми угловыми скоростями **Γ**. Вектор **ω** перпендикулярен радиус-вектору **r**, что следует из (6.1). Очевидно, что вращение с одинаковыми угловыми скоростями дает точку в жидкости, в которой $\mathbf{u} = 0$. Координаты такой точки равны $\mathbf{x} = \mathbf{r}/2$ для сфер одинакового радиуса. Такая же точка существует и при движении сфер с равными противоположно направленными линейными скоростями.

Из сказанного следует, что угловая **Γ** и линейные $\mathbf{U}^a$, $\mathbf{U}^b$ скорости сфер должны удовлетворять условию: скорость точки сферы, совпадающей с точкой касания сфер, должна равняться скорости невозмущенного потока жидкости в этой же точке. Простой анализ этого условия дает связь между параметрами невозмущенного потока жидкости и относительными скоростями сфер. В частности, из этого условия следует, что составляющая относительной скорости центров сфер **V** вдоль вектора **r** равна нулю в случае касания сфер. Численное решение задачи [1] дает этот же результат.

Другими словами, две соприкасающиеся частицы ведут себя как твердое тело в своем движении относительно жидкости. Аналогичный вывод сделан в [7].

Сказанное выше относится только к случаю антисимметричного решения задачи. Для симметричного решения, т.е. когда основное течение представляется многочленом четной степени по координатам в задаче α и в случае движения частиц с одинаково направленными линейными скоростями и противоположно направленными угловыми скоростями в задаче β, не существует точки, в которой скорость жидкости равна нулю, и, следовательно, упомянутое выше условие для линейных и угловых скоростей сфер в случае их касания не выполняется. Таким образом, поведение двух гидродинамических взаимодействующих частиц существенно зависит от типа основного течения.

Аналогичные вычисления проделаны и для трех частиц.

Заключение. Предлагается аналитический метод решения задачи о гидродинамическом взаимодействии двух, трех и более сферических частиц, помещенных в жидкость, скорость которой на бесконечности представляется в виде полинома произвольной степени по координатам. Процедура метода существенно отличается от известных в литературе, в частности от метода отражений. С использованием данного метода, решены задачи о гидродинамическом взаимодействии двух сфер одинакового и произвольного радиусов и трех сфер одинакового радиуса в линейном течении.

Для двух сфер произвольного радиуса в случае покоящейся на бесконечности жидкости полученные выражения для сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицы, совпадают с аналогичными выражениями, полученными методом отражения. Получены выражения для сил и моментов, действующих на две и на три гидродинамически взаимодействующие сферы в линейном потоке. Определены линейные и угловые скорости сфер в течении простого сдвига.

Предложенный метод позволяет получить все характеристики движения взаимодействующих сфер прямым вычислением с любой точностью.

Работа поддержана грантом Норвежского научно-исследовательского совета (Norwegian Reserch Council). Автор благодарит A. Bertelsen и E. Palm, университет г. Осло, за интерес, проявленный к работе, и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin C.J., Lee K.J., Sather N.F.* Slow motion of two spheres in a shear field // J. Fluid Mech. 1970. V. 43. Pt. 1. P. 35–47.
2. *Batchelor G.K., Green J. T.* The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. Pt. 2. P. 375–400.
3. *Martynov S.I.* The hydrodynamic interaction of two spherical particles in viscous fluid // 7th Israeli-Norwegian Symp. "Fluid Mechanics of Heterogeneous Systems". Trondheim, Norway, 1994. P. 67–69.
4. *Stimson M., Jeffery G.B.* The motion of two spheres in a viscous fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1926. V. 111. N 757. P. 110–116.
5. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds number hydrodynamics. Englewood Ceiffs: Prentice-Hall, 1965. 553 p. (Рус. перев.: *Хаппель Дж., Бренер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1971. 630 с.)
6. *Kynch G.L.* The slow motion of two or more spheres through a viscous fliud // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt. 2. P. 193–208.
7. *Wakiya S.* Slow motion in shear flow of a doublet of two spheres in contact // Phys. Soc. Japan. 1971. V. 31. N 5. P. 1581–1587.

Саранск

Поступила в редакцию
10.VII.1996