

УДК 533.6.013.42

© 1998 г. А.А. МАЙЛЫБАЕВ, А.П. СЕЙРАНЯН

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КРЫЛА С ПОДКОСАМИ (ЗАДАЧА КЕЛДЫША)

Изучается задача о влиянии подкосов двух типов на аэроупругую устойчивость крыла. Постановка задачи восходит к М.В. Келдышу [1]. Исследовано поведение собственных значений на комплексной плоскости и построены области устойчивости, флаттера и дивергенции.

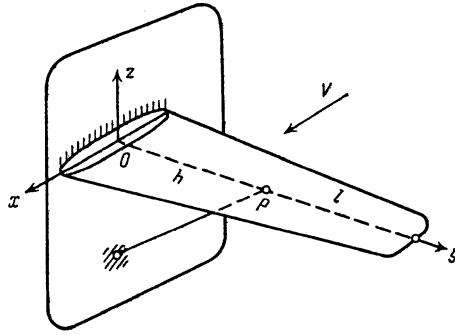
Рассматривается задача об аэроупругой устойчивости прямого крыла большого удлинения с подкосами [1]. Подкос представляет собой абсолютно жесткий стержень, соединяющий крыло с фюзеляжем в точке P (фиг. 1). Наличие подкоса означает неподвижность точки P и приводит к дополнительным граничным условиям, налагаемым на функции формы колебаний.

Для случая конкретного прямоугольного крыла с одним подкосом, закрепленным в центре жесткости сечения h (тип A), были произведены расчеты и сделан вывод [1], что "около $h = 0,47l$ критическая скорость становится мнимой и, следовательно, при $h > 0,47l$ вибрации крыла с подкосом становятся невозможными" (l – длина крыла), т.е. крыло становится устойчивым. Аналогичный вывод был сделан и для подкоса типа B , при котором два подкоса фиксируют сечение h : "при $h/l > 0,8$ критическая скорость крыла с подкосом типа B не существует" [1]. Эти выводы, сделанные на основе одночленного приближения по Бубнову – Галеркину, не подтверждаются при увеличении числа членов в приближенном решении.

В настоящей работе предстоило выяснить, каким образом крыло "становится не-вибрирующим", и дать качественное и количественное описание этого феномена. Задача об аэроупругой устойчивости крыла сводится к изучению поведения собственных значений λ на комплексной плоскости для линеаризованных уравнений движения крыла в зависимости от расстояния h от основания крыла до точки крепления подкоса и скорости потока V . Таким образом определяются значения критических скоростей колебательного (флаттер) и статического (дивергенция) типов потери устойчивости и на плоскости параметров V, h строятся области устойчивости, флаттера и дивергенции.

1. Основные соотношения. Рассмотрим колебания тонкого крыла большого удлинения, подкрепленного подкосом в точке P , в воздушном потоке (фиг. 1). Крыло моделируется упругой балкой, работающей на кручение и изгиб и имеющей прямую упругую ось y (ось жесткости), перпендикулярную фюзеляжу. Деформация крыла характеризуется прогибом $z(y, \tau)$ и углом поворота относительно упругой оси $\theta(y, \tau)$, где τ – время. Линеаризованные уравнения движения крыла в потоке имеют вид [2, 3]

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + m \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = L_a, \quad -\frac{\partial}{\partial y} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - m\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = M_a \quad (1.1)$$



Фиг. 1. Крыло, подкрепленное подкосом

В этих уравнениях EI и GJ – жесткости крыла на изгиб и кручение, m и I_m – масса и момент инерции относительно упругой оси, приходящиеся на единицу размаха, σ – расстояние от центра жесткости до центра тяжести сечения. Аэродинамические сила L_a и момент M_a на единицу размаха определяются на основании гипотезы стационарности [2, 3], согласно которой аэродинамические характеристики крыла заменяются в каждый момент времени характеристиками того же крыла, движущегося с постоянными линейной и угловой скоростями, равными скоростям действительного движения. Выражения для L_a и M_a записываются в виде

$$L_a = C_y^\alpha \rho V^2 t \left[\theta + \frac{t}{V} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right] \quad (1.2)$$

$$M_a = C_m^\alpha \rho V^2 t^2 \left[\theta + \frac{t}{V} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16 C_m^\alpha} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right]$$

где t – хорда крыла, x_0 – расстояние от передней кромки до упругой оси, V – скорость потока. Теоретические значения аэродинамических коэффициентов C_y^α и C_m^α для тонкого крыла бесконечного размаха составляют соответственно $C_y^\alpha = \pi$, $C_m^\alpha = \pi(x_0/t - 1/4)$ [2, 3].

Рассматривая случай жесткого крепления крыла к фюзеляжу, выпишем граничные условия при $y = 0$ (жесткое защемление) и $y = l$ (свободный край)

$$y = 0: z = \frac{\partial z}{\partial y} = \theta = 0 \quad (1.3)$$

$$y = l: EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Для подкоса типа А (подкрепление крыла абсолютно жестким подкосом в точке P , лежащей на упругой оси) имеем

$$y = h: z_- = z_+ = 0 \quad (1.4)$$

Индексы минус и плюс обозначают предельные значения величины при $y \rightarrow h - 0$ и $y \rightarrow h + 0$ соответственно. Кроме (1.4) в сечении h выполняются условия не-

прерывности угла кручения, производной от прогиба, а также крутящего и изгибающего моментов [1]

$$\begin{aligned} \theta_- = \theta_+, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_- = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_+ \\ \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_- = \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_+, \quad \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_- = \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_+ \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для подкоса типа *B* (два подкоса, подкрепляющие сечение *h* и оставляющие его неподвижным при колебаниях) имеем [1]

$$z_- = z_+ = 0, \quad \theta_- = \theta_+ = 0, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_- = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_+, \quad \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_- = \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_+ \quad (1.6)$$

Системы уравнений (1.1) – (1.5) и (1.1) – (1.3), (1.6) представляют собой линейные однородные краевые задачи для подкосов типа *A* и *B* соответственно. Решение задач ищем в виде

$$z(y, \tau) = f(y)e^{\lambda \tau}, \quad \theta(y, \tau) = \varphi(y)e^{\lambda \tau} \quad (1.7)$$

где λ – собственное значение, $f(y)$, $\varphi(y)$ – собственные функции. Подставляя (1.7) в (1.1)–(1.2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $f(y)$, $\varphi(y)$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \varphi \end{pmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

$$L_{11} = \frac{d^2}{dy^2} \left(EI \frac{d^2}{dy^2} \right) + m\lambda^2 + \lambda C_y^\alpha \rho t V$$

$$L_{12} = -m\sigma\lambda^2 - C_y^\alpha \rho t V^2 - \lambda C_y^\alpha \rho t^2 V \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \quad (1.9)$$

$$L_{21} = -m\sigma\lambda^2 + \lambda C_m^\alpha \rho t^2 V$$

$$L_{22} = -\frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d}{dy} \right) + I_m \lambda^2 - C_m^\alpha \rho t^2 V^2 - \lambda C_m^\alpha \rho t^3 V \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16 C_m^\alpha} \right)$$

Подставив (1.7) в (1.3) – (1.6), получим граничные условия в основании и на конце крыла

$$y = 0: \quad f = \frac{df}{dy} = \varphi = 0$$

$$y = l: \quad EI \frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(EI \frac{d^2 f}{dy^2} \right) = GJ \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad (1.10)$$

а также в сечении h (для подкоса типа A – (1.11), типа B – (1.12))

$$f_- = f_+ = 0, \quad \varphi_- = \varphi_+, \quad \left(\frac{df}{dy} \right)_- = \left(\frac{df}{dy} \right)_+ \quad (1.11)$$

$$\left(GJ \frac{d\varphi}{dy} \right)_- = \left(GJ \frac{d\varphi}{dy} \right)_+, \quad \left(EI \frac{d^2 f}{dy^2} \right)_- = \left(EI \frac{d^2 f}{dy^2} \right)_+$$

$$f_- = f_+ = 0, \quad \varphi_- = \varphi_+ = 0, \quad \left(\frac{df}{dy} \right)_- = \left(\frac{df}{dy} \right)_+, \quad \left(EI \frac{d^2 f}{dy^2} \right)_- = \left(EI \frac{d^2 f}{dy^2} \right)_+ \quad (1.12)$$

В силу неконсервативности (несамосопряженности) задачи собственные значения λ , вообще говоря, это комплексные величины $\lambda = \alpha + i\omega$. В зависимости от скорости потока V амплитуды решений (1.7) могут убывать с течением времени ($\text{Re } \lambda < 0$, устойчивость), оставаться постоянными ($\text{Re } \lambda = 0$, граница устойчивости) либо возрастать ($\text{Re } \lambda > 0$, неустойчивость). Обычно различают два основных типа потери устойчивости: колебательный тип $\text{Re } \lambda = 0$, $\text{Im } \lambda = \omega \neq 0$ (флаттер) и аperiodический $\lambda = 0$ (дивергенция). Критическая скорость системы V_c равна наименьшей из критических скоростей флаттера V_f и дивергенции V_d .

Скорость дивергенции для подкоса типа A можно непосредственно определить из уравнений (1.8) – (1.11), полагая в них $\lambda = 0$. В результате приходим к задаче на собственные значения

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\varphi}{dy} \right) + C_m^\alpha \rho V_d^2 t^2 \varphi = 0 \quad (1.13)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \left(GJ \frac{d\varphi}{dy} \right)_{y=l} = 0 \quad (1.14)$$

$$y = h: \quad \varphi_- = \varphi_+, \quad \left(GJ \frac{d\varphi}{dy} \right)_- = \left(GJ \frac{d\varphi}{dy} \right)_+ \quad (1.15)$$

Функция $GJ(y)$ предполагается непрерывно дифференцируемой. Критическая скорость дивергенции является минимальным собственным значением задачи (1.13) – (1.15). Ее можно найти, используя вариационную формулировку [4]

$$V_d^2 = \min_{\varphi} \int_0^l GJ \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 dy / \int_0^l \rho C_m^\alpha t^2 \varphi^2 dy \quad (1.16)$$

где функция сравнения $\varphi(y)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет первому (кинематическому) граничному условию (1.14) (второе граничное условие (1.14) и условия (1.15) являются естественными для функционала (1.16)). Из (1.16) следует, что V_d^2 не зависит от положения подкоса h . Это естественно, поскольку в силу предположения точка крепления подкоса к крылу лежит на упругой оси и, следовательно, не влияет на кручение крыла.

2. Метод решения. Для решения задач на собственные значения (1.8) – (1.11) и (1.8) – (1.10), (1.12) воспользуемся методом Бубнова – Галеркина [4]. С этой целью выберем две системы линейно независимых координатных функций f_1, \dots, f_n и $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ соответственно четырежды и дважды непрерывно дифференцируемых на интервалах

(0, h) и (h, l) и удовлетворяющих граничным условиям (1.10), (1.11) в первом и (1.10), (1.12) во втором случаях. Собственные функции f и φ системы (1.8) представим в виде линейных комбинаций координатных функций с неизвестными коэффициентами α_j и β_j соответственно

$$f(y) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(y), \quad \varphi(y) = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j(y) \quad (2.1)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (1.8), а затем умножая левые части этих уравнений на f_i и φ_i соответственно и интегрируя по y от 0 до l , получим $2n$ линейных однородных уравнений относительно коэффициентов α_j и $\beta_j, j = i, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^l L_{11}[f_j] f_i dy + \sum_{j=1}^n \beta_j \int_0^l L_{12}[\varphi_j] f_i dy = 0 \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^l L_{21}[f_j] \varphi_i dy + \sum_{j=1}^n \beta_j \int_0^l L_{22}[\varphi_j] \varphi_i dy = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

где дифференциальные операторы L_{ij} определены в (1.9). Используя в (2.2) интегрирование по частям с учетом граничных условий (1.10), (1.11) или (1.10), (1.12), получим в обоих случаях алгебраическую задачу на собственные значения

$$[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{V} \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{V}^2 \mathbf{D}] \xi = 0 \quad (2.3)$$

где ξ – вектор-столбец, состоящий из неизвестных коэффициентов $\xi^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$, а $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{D}$ – матрицы размера $2n \times 2n$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{11} &= \begin{bmatrix} \int_0^1 m f_i f_j ds \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} -\int_0^1 m \sigma f_i \varphi_j ds \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{21} &= \begin{bmatrix} -\int_0^1 m \sigma \varphi_i f_j ds \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{22} = \begin{bmatrix} \int_0^1 I_m \varphi_i \varphi_j ds \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{11} &= \begin{bmatrix} C_y^\alpha \rho \int_0^1 t f_i f_j ds \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} -C_y^\alpha \rho \int_0^1 t^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) f_i \varphi_j ds \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{21} &= \begin{bmatrix} \rho \int_0^1 C_m^\alpha t^2 \varphi_i f_j ds \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{22} = \begin{bmatrix} -\rho \int_0^1 C_m^\alpha t^3 \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16 C_m^\alpha} \right) \varphi_i \varphi_j ds \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{l^4} \int_0^1 E I f_i'' f_j'' ds \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21} = [0] \\ \mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} \int_0^1 G J \varphi_i' \varphi_j' ds \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{11} = \mathbf{D}_{21} = [0] \\ \mathbf{D}_{12} &= \begin{bmatrix} -C_y^\alpha \rho \int_0^1 t f_i \varphi_j ds \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} -\rho \int_0^1 C_m^\alpha t^2 \varphi_i \varphi_j ds \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь для удобства используется безразмерная переменная $s = y/l$, штрихи обозначают дифференцирование по s .

В силу однородности задачи (2.3) нетривиальное решение ξ существует лишь при условии

$$\det[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{V} \mathbf{C} + \mathbf{K} + V^2 \mathbf{D}] = 0$$

Это уравнение служит для определения собственных значений λ в зависимости от скорости потока V .

Квадратичная задача на собственные значения (2.3) с помощью замены $\zeta = \lambda \xi$ и удвоения размерности может быть сведена к линейной эквивалентной задаче

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - V^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} & -V \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

где \mathbf{O} и \mathbf{E} – нулевая и единичная матрицы размерности $2n \times 2n$. Форма (2.5) удобна для пользования стандартными программами вычислений.

В проведенных выше преобразованиях предполагалось, что существует обратная матрица \mathbf{M}^{-1} , т.е. $\det \mathbf{M} \neq 0$. Докажем, что $\det \mathbf{M} > 0$ для двух систем линейно независимых координатных функций f_i и φ_i , $i = 1, \dots, n$.

Для этого рассмотрим пространство вектор-функций $\psi(s) = (u(s), v(s))$, где функции $u(s)$ и $v(s)$ непрерывны на отрезке $[0, 1]$, и введем скалярное произведение по формуле

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_0^1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m & -m\sigma \\ -m\sigma & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 (m u_1 u_2 - m\sigma (u_1 v_2 + v_1 u_2) + I_m v_1 v_2) ds \quad (2.6)$$

Очевидно, что $(\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1)$. Покажем, что $(\psi, \psi) > 0$ для любых ненулевых $u(s), v(s)$. Из (2.6) имеем

$$(\psi, \psi) = \int_0^1 (m u^2 - 2m\sigma u v + I_m v^2) ds \quad (2.7)$$

Подынтегральное выражение в (2.7) представляет собой положительно определенную квадратичную форму, поскольку условия Сильвестра [5] приводят к неравенствам $m > 0$, $m(I_m - \sigma^2 m) = m I_c > 0$, где I_c – момент инерции крыла относительно центра масс, приходящийся на единицу размаха. Эти условия выполнены для непрерывных и положительных на отрезке $[0, 1]$ функций $m(s), I_c(s)$.

Рассмотрим во введенном пространстве систему $2n$ вектор-функций $\psi_1 = (f_1, 0)$, $\psi_2 = (f_2, 0)$, ..., $\psi_n = (f_n, 0)$, $\psi_{n+1} = (0, \varphi_1)$, ..., $\psi_{2n} = (0, \varphi_n)$. Используя (2.6), нетрудно убедиться, что матрица Грама [5] этой системы есть матрица \mathbf{M} из (2.3)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (\psi_1, \psi_1) & (\psi_1, \psi_2) & \cdots & (\psi_1, \psi_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\psi_{2n}, \psi_1) & (\psi_{2n}, \psi_2) & \cdots & (\psi_{2n}, \psi_{2n}) \end{bmatrix}$$

Детерминант матрицы Грама положителен для линейно независимой системы [5]. Поэтому для линейно независимых координатных функций f_i и φ_i , $i = 1, \dots, n$, $\det \mathbf{M} > 0$ и, следовательно, обратная матрица \mathbf{M}^{-1} существует.

3. Выбор координатных функций. В качестве координатных функций f_i и φ_i , $i = 1, \dots, n$, удобно выбрать собственные формы чисто изгибных и крутильных колебаний крыла постоянного сечения по размаху, подкрепленного в сечении h подкосом соответствующего типа, в пустоте.

Для этого рассмотрим задачу, определяющую формы чисто изгибных колебаний

$$f^{(4)}(s) - k^4 f(s) = 0, \quad s \in [0, 1]$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(1) = f'''(1) = 0$$

$$s = h/l: \quad f_- = f_+ = 0, \quad f'_- = f'_+, \quad f''_- = f''_+$$

Собственные функции этой задачи имеют вид [1]

$$f_i(s) = \begin{cases} C_i^1 \cos a_i + C_i^2 \sin a_i - C_i^1 \operatorname{ch} a_i - C_i^2 \operatorname{sh} a_i, & s \in [0, \eta] \\ D_i^1 \cos b_i + D_i^2 \sin b_i + D_i^1 \operatorname{ch} b_i + D_i^2 \operatorname{sh} b_i, & s \in [\eta, 1] \end{cases} \quad (3.1)$$

$$a_i = k_i s, \quad b_i = k_i (s - 1)$$

где введена безразмерная переменная $\eta = h/l$.

Значения $k_i > 0, i = 1, 2, \dots$, находятся из характеристического уравнения

$$(-\operatorname{ch} v \sin v + \operatorname{sh} v \cos v)[1 + \cos \zeta \operatorname{ch} \zeta] + [-\operatorname{ch} \zeta \sin \zeta + \operatorname{sh} \zeta \cos \zeta](1 - \operatorname{ch} v \cos v) = 0 \quad (3.2)$$

$$v = k_i \eta, \quad \zeta = k_i (\eta - 1)$$

Коэффициенты $C_i^1, C_i^2, D_i^1, D_i^2, i = 1, 2, \dots$, из (3.1) можно выразить через k_i и η следующим образом:

$$C_i^1 = 1, \quad C_i^2 = -\frac{\operatorname{ch} v - \cos v}{\operatorname{sh} v - \sin v}$$

$$D_i^1 = \frac{\operatorname{sh} \zeta + \sin \zeta}{1 + \cos \zeta \operatorname{ch} \zeta} \frac{1 - \cos v \operatorname{ch} v}{\operatorname{sh} v - \sin v} \quad (3.3)$$

$$D_i^2 = -\frac{\operatorname{ch} \zeta + \cos \zeta}{1 + \cos \zeta \operatorname{ch} \zeta} \frac{1 - \cos v \operatorname{ch} v}{\operatorname{sh} v - \sin v}$$

В качестве координатных функций φ_i выберем собственные формы чисто крутильных колебаний крыла постоянного сечения в пустоте, подкрепленного подкосом типа А [1]

$$\varphi_i^a(s) = \sin[\pi(i - \frac{1}{2})s], \quad s \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

или подкосом типа В

$$\varphi_{2n-1}^b(s) = \sin\left(\frac{\pi n s}{\eta}\right), \quad 0 \leq s \leq \eta$$

$$\varphi_{2n}^b(s) = \sin\left(\frac{\pi(n - \frac{1}{2})(s - \eta)}{1 - \eta}\right), \quad \eta \leq s \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

где функции $\varphi_{2n-1}^b(s)$ и $\varphi_{2n}^b(s)$ равны нулю при $\eta \leq s \leq 1$ и $0 \leq s \leq \eta$ соответственно.

Системы функций (3.1), (3.4), (3.5) обладают свойствами ортогональности и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_i f_j ds &= 0, \quad \int_0^1 \varphi_i^a \varphi_j^a ds = 0, \quad \int_0^1 \varphi_i^b \varphi_j^b ds = 0, \quad \int_0^1 f_i'' f_j'' ds = 0 \\ \int_0^1 (\varphi_i^a)' (\varphi_j^a)' ds &= 0, \quad \int_0^1 (\varphi_i^b)' (\varphi_j^b)' ds = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\int_0^1 f_i'' f_i'' ds = k_i^4 \int_0^1 f_i^2 ds, \quad \int_0^1 (\varphi_i^a)' (\varphi_i^a)' ds = \frac{1}{2} \pi^2 (i - \frac{1}{2})^2$$

$$\int_0^1 (\varphi_i^b)' (\varphi_i^b)' ds = \begin{cases} \frac{(\pi n)^2}{2\eta}, & i = 2n - 1 \\ \frac{\pi^2 (n - \frac{1}{2})^2}{2(1 - \eta)}, & i = 2n \end{cases}$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad i \neq j$$

Функции (3.1), (3.4) и (3.1), (3.5) соответственно являются полными системами координатных функций для подкосов типа *A* и *B*.

При сравнительно простых распределениях $EI(y)$, $GJ(y)$, $m(y)$, $I_m(y)$, $t(y)$, $\sigma(y)$, $x_0(y)$ (например, линейных) интегралы (2.4) с использованием (3.1)–(3.6) можно вычислить аналитически, что увеличивает скорость и точность вычислений.

4. Результаты численных расчетов для крыла с подкосом типа *A*. С использованием методики, описанной выше, численно исследовалась аэроупругая устойчивость прямоугольного крыла с подкосом типа *A* в зависимости от параметров V и η (обезразмеренного h). Параметры крыла для расчетов, как и в [1], брались из [6] и составляли величины

$$l = 0,55\text{м}; \quad t = 0,18\text{м}; \quad x_0 = 0,071\text{м}; \quad \sigma = 0,017 \text{ м}; \quad EI = 1,481\text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$GJ = 0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad ml = 0,0254 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}; \quad I_m l = 0,000059 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \quad (4.1)$$

$$C_y^\alpha = 1,36; \quad C_m^\alpha = 0,143; \quad \rho = 0,117 \text{ кг} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$$

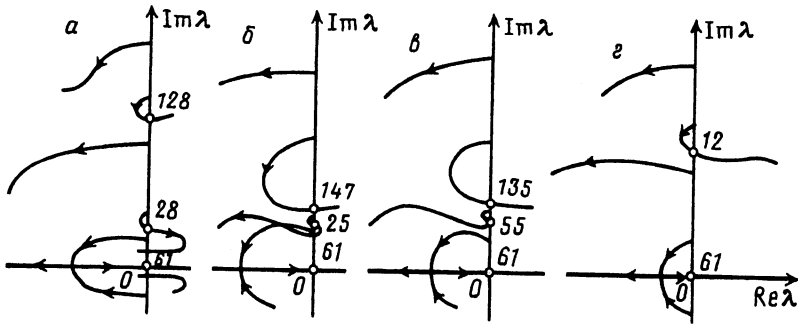
Расчеты велись в диапазоне скоростей V от 0 до 155 м/с. Число координатных функций в методе Бубнова – Галеркина (2.1) было выбрано равным 5, что соответствует размерности 20 алгебраической задачи на собственные значения (2.5). Увеличение числа координатных функций до 10 показало, что максимальная относительная погрешность вычисления собственных значений для первых 6 тонов составляет 0,15%.

Нумерация тонов производилась по возрастанию положительных мнимых частей собственных значений $\lambda = \alpha + i\omega$ при $V = 0$. Так как матричный оператор A в задаче (2.5) действителен, то комплексно-сопряженная величина $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ также является собственным значением. Таким образом, пара комплексно-сопряженных величин λ и $\bar{\lambda}$ соответствует одному тону колебаний.

Поведение собственных значений на комплексной плоскости. На фиг. 2 представлены траектории движения собственных значений λ на комплексной плоскости при изменении скорости V для некоторых характерных значений h . Стрелки на фиг. 2 соответствуют увеличению V . Неизображенные ветви, соответствующие высшим тонам, как показали расчеты, при всех h лежат в левой полуплоскости, т.е. устойчивы. Ввиду симметрии представлена лишь верхняя полуплоскость $\text{Im } \lambda \geq 0$. Цифры у мнимой оси указывают значения критической скорости соответствующего тона.

При малых η потеря устойчивости происходит по первому, второму и четвертому тону (фиг. 2, *a*). Первый тон – дивергентный: два комплексно-сопряженных собственных значения сближаются, сталкиваются и расходятся в разные стороны по действительной оси. Один из них пересекает мнимую ось при скорости $V_{d1} = 61,3$ м/с. Поведение собственных значений на комплексной плоскости для многопараметрических линейных колебательных систем изучалось в [7, 8].

Второй и четвертый тона – флаттерные: при $\eta = 0,1$ собственные значения этих тонов пересекают мнимую ось в точках $\text{Im } \lambda \neq 0$ при значениях $V_{f2} = 28$ и $V_{f4} = 128$ м/с



Фиг. 2. Поведение собственных значений на комплексной плоскости в зависимости от скорости потока V для подкоса типа А при $\eta = 0,1; 0,4; 0,471; 0,8$ (а – г)

соответственно. Таким образом, критическим является второй тон колебаний, а $V_c = 28$ м/с. Ветвь второго тона пересекает мнимую ось дважды, т.е. этот тон вновь становится устойчивым, начиная со значения скорости $V = 137$ м/с.

Когда η достигает значения 0,145, происходит взаимодействие четвертого и пятого тонов, характеризующееся сменой неустойчивого тона: четвертый тон становится устойчивым, а пятый – неустойчивым. Скорость флаттера пятого тона, увеличиваясь с ростом η , становится больше 155 м/с, т.е. выходит из диапазона расчетов. При этом флаттер появляется на третьем тоне, $V_{f3} = 147$ м/с при $\eta = 0,4$ (фиг. 2, б).

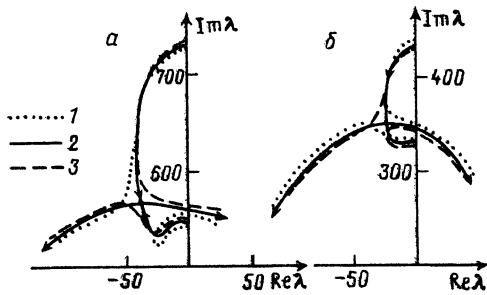
Из фиг. 2, а, б, в видно, что ветвь второго (критического) тона делает петлю, которая сдвигается влево с увеличением η . При $\eta = 0,471$ она касается мнимой оси при $V_{f2} = 55,7$ м/с (фиг. 2, в) и при $\eta > 0,471$ второй тон становится устойчивым. Это приводит к скачку критической скорости, которая при $\eta > 0,471$ становится равной скорости дивергенции $V_{d1} = 61,3$ м/с. При дальнейшем увеличении η ветвь второго тона продолжает вытягиваться влево и выпрямляется, а ветвь третьего тона, напротив, сдвигается вправо ($V_{f3} = 72$ м/с при $\eta = 0,8$) (фиг. 2, г). При $\eta = 0,935$ происходит взаимодействие второго и третьего тонов, в результате чего третий тон становится устойчивым, а второй – неустойчивым.

Таким образом, независимо от поведения более высоких тонов при всех $\eta < 0,471$ критическим является второй (флаттерный) тон, а при $\eta > 0,471$ – первый (дивергентный) тон с критической скоростью $V_c = 61,3$ м/с.

Смена неустойчивого тона. Как отмечалось выше, при значениях $\eta = 0,145$ и $0,935$ происходит взаимодействие 4–5-го и соответственно 2–3-го тонов, приводящее к смене неустойчивого тона. Это явление происходит в окрестности двукратной точки λ_0 на комплексной плоскости. Теория этого явления для колебательных систем, зависящих от нескольких параметров, разработана в [7, 8], где, в частности, показано, что взаимодействие собственных значений вблизи двукратной точки описывается гиперболами, имеющими ортогональные асимптоты.

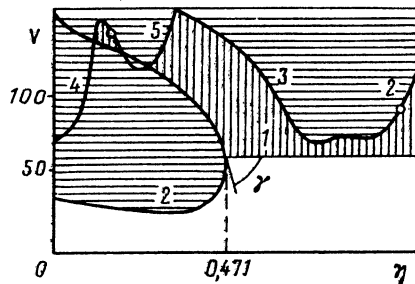
На фиг. 3, а, б линиями 2 показано поведение тонов при $\eta = 0,145$ и $0,935$ соответственно. Стрелки соответствуют увеличению V . Собственные значения сближаются на комплексной плоскости, сталкиваются по прямой в точке двукратного λ_0 , а затем расходятся под прямым углом к линии сближения. Смена неустойчивого тона происходит посредством "перехлеста" ветвей в окрестности двукратной точки λ_0 .

Расположение областей устойчивости, флаттера и дивергенции на плоскости параметров и их особенности. Полученное в результате расчетов расположение областей устойчивости, флаттера и дивергенции на плоскости параметров V и η представлено на фиг. 4. Область флаттера определяется наличием бы одного комплексного собственного значения $\lambda = \alpha + i\omega$, $\alpha > 0$, $\omega \neq 0$, а область дивергенции –



Фиг. 3.

Фиг. 3. Перехлест ветвей собственных значений: *a* – при $\eta = 0,145$, *b* – $0,935$. Ветви взаимодействующих тонов при меньших и больших на $0,005$ значениях η изображены линиями 1 и 3 соответственно



Фиг. 4.

Фиг. 4. Области устойчивости, флаттера и дивергенции для подкоса типа А

наличием только действительных неустойчивых корней $\lambda = \alpha > 0$. На фиг. 4 горизонтальными линиями заштрихована область флаттера, вертикальными – дивергенции. Числа указывают на номер тона, который становится неустойчивым при переходе через соответствующую границу. Тон неустойчив с той стороны границы, где стоит число.

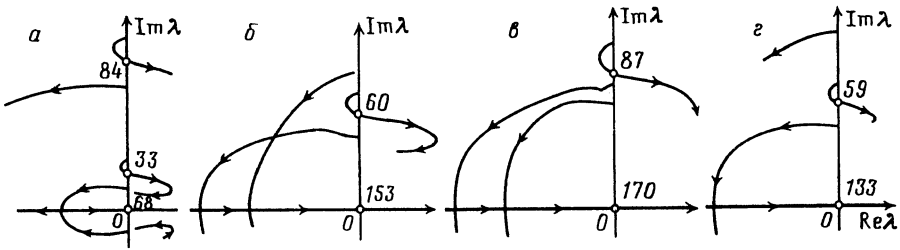
Область неустойчивости является объединением областей флаттера и дивергенции. Известно, что граница устойчивости общего двухпараметрического семейства матриц состоит из гладких дуг, пересекающихся трансверсально в своих конечных точках. Эти особенности соответствуют угловым точкам на границе области устойчивости с углом $\gamma < \pi$ [9]. В данной задаче такая особенность реализуется на фиг. 4 в точке, лежащей на границе областей флаттера и дивергенции в вершине острого угла γ .

Описанное выше явление смены неустойчивого тона происходит в окрестности двукратной точки λ_0 и, следовательно, если $\text{Re} \lambda_0 \neq 0$, не приводит к особенностям границ областей устойчивости, флаттера и дивергенции.

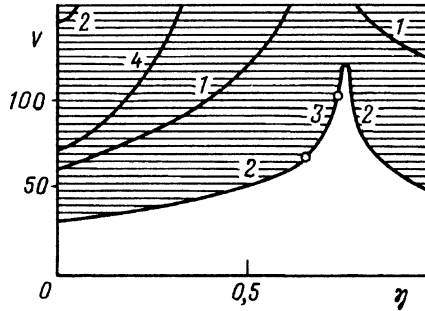
О разрыве критической скорости. Разрыв критической скорости (как функции от η) возникает, когда область неустойчивости в плоскости параметров V и η имеет касательную, ортогональную оси η , и выпукла в точке касания. Этот случай реализуется в рассматриваемой задаче (фиг. 4). Разрыв V_c происходит при $\eta_* = 0,471$. Левый и правый пределы V_c равны соответственно 55,7 и 61,3 м/с. На комплексной плоскости разрыв V_c соответствует тому, что ветвь критического (в данном случае – второго) тона образует петлю, которая с увеличением η вытягивается в левую полуплоскость $\text{Re} \lambda < 0$, касаясь при $\eta = \eta_*$ мнимой оси (фиг. 2, б, в).

Описанный механизм разрыва V_c является общим для двухпараметрических задач. Заметим, что с разрывом критической скорости связано наличие области устойчивости при $V > V_c$. В данной задаче такая область существует на интервале $0,470 < \eta < 0,471$.

Сравнение с результатами работы [1]. Из сравнения результатов М.В. Келдыша [1, фиг. 4] с результатами настоящей работы (фиг. 4) видно, что значения V_c мало отличаются в промежутке $0 \leq \eta \leq 0,471$, на котором крыло теряет устойчивость по флаттеру второго тона. Но при $\eta > 0,471$ критическая скорость не пропадает, как в [1], а терпит разрыв и становится равной скорости дивергенции. Критическая скорость дивергенции при креплении подкоса к упругой оси крыла, как было показано в разд. 1, не зависит от η . Для прямоугольного крыла с постоянными характеристиками по размаху нетривиальные решения задачи о дивергенции (1.13) – (1.15) имеют вид $\varphi_i = C_i \sin(\lambda s(i - \frac{1}{2}))$, $i = 1, 2, \dots$ Первая собственная функция φ_1 отвечает значению критической скорости дивергенции, равному



Фиг. 5. Поведение собственных значений на комплексной плоскости в зависимости от скорости потока V для подкоса типа B при $\eta = 0, 1; 0,6; 0,72; 0,92$ ($a - \varepsilon$)



Фиг. 6. Области устойчивости и флаттера для подкоса типа B

$$V_d = \frac{\pi}{2lt} \sqrt{\frac{GJ}{C_m^{\alpha\rho}}} = 61,3 \text{ м/с}$$

Неустойчивость типа дивергенции не была исследована в [1], что привело к выводу об устойчивости крыла при $\eta > 0,47$. Если предположить, что этот вывод о "невозможности вибраций" относится лишь к потере устойчивости типа флаттер, то и в этом случае не была учтена возможность флаттера на более высоких тонах ввиду использования в разложениях (2.1) лишь одной координатной функции.

В данной задаче потеря устойчивости по флаттеру при $0,471 < \eta < 0,935$ происходит по третьему, а при $0,935 < \eta < 1$ – по второму тону (фиг. 4). Поскольку $V_{\beta 3}$ при некоторых η незначительно превышает критическую скорость, ее исследование необходимо.

Установка подкоса на упругой оси при $\eta > 0,471$ увеличивает критическую скорость крыла без подкоса примерно вдвое: с 30,3 до 61,3 м/с.

5. Результаты численных расчетов для крыла с подкосом типа B . Расчеты для прямоугольного крыла с параметрами (4.1), подкрепленного подкосом типа B , проводились по методике, описанной в разд. 2,3. Число функций в разложениях (2.1) было выбрано равным 4. Увеличение числа координатных функций до 10 показало, что максимальная относительная погрешность вычисления собственных значений для первых 3–4 тонов составляет 0,1%.

Критическая скорость дивергенции оценивается, как и для подкоса типа A , аналитически. Она находится независимо для частей крыла слева и справа от подкоса и равна $V_l = \pi(GJ/C_m^{\alpha\rho})^{1/2} / (\eta lt)$ и $V_r = \pi(GJ/(C_m^{\alpha\rho}))^{1/2} / (2l(1-\eta)t)$ соответственно. На плоскости V, η скорости V_l и V_r являются гиперболой с асимптотами $\eta = 0$ и 1 .

Поведение собственных значений λ на комплексной плоскости при изменении скорости V для различных значений η показано на фиг. 5. При малых и больших η ($0 < \eta \leq 0,65$ и $0,74 < \eta \leq 1$) критическим является второй, флаттерный тон. Первый тон для всех $0 \leq \eta \leq 1$ остается дивергентным. При малых (больших) значениях η первый тон отвечает дивергенции правой (соответственно левой) от подкоса части крыла. При значениях $\eta = 0,65$ и $0,74$ происходит взаимодействие второго и третьего тонов, в результате чего в промежутке $0,65 < \eta < 0,74$ третий тон становится флаттерным и критическим, а второй тон – дивергентным.

Расположение областей устойчивости и неустойчивости на плоскости параметров V, η изображено на фиг. 6. При любом положении подкоса $0 \leq \eta \leq 1$ крыло теряет устойчивость по флаттеру. Взаимодействие тонов при $\eta = 0,65$ и $0,74$ не приводит к особенностям на границе области устойчивости.

При увеличении η от нуля критическая скорость флаттера монотонно возрастает, достигая максимума $V_{\beta} = 119$ м/с при $\eta = 0,76$, что почти в 4 раза больше значения критической скорости крыла без подкоса, а затем монотонно убывает (фиг. 6).

Сравнение с расчетами М.В. Келдыша [1, фиг. 8] свидетельствует об удовлетворительном согласии результатов при $0 \leq \eta \leq 0,7$, однако при $\eta > 0,7$ результаты не совпадают и вывод о том, что "при $\eta > 0,8$ крыло становится невибрирующим" [1], не подтверждается.

Заключение. Таким образом, в результате параметрического исследования задачи показано, что для подкоса типа А при удалении точки крепления подкоса от основания крыла неустойчивость типа флаттера сменяется статической формой – дивергенцией. При этом критическая скорость терпит разрыв, перескакивая на более высокое значение. В случае подкоса типа В критическая скорость оказывается конечной и непрерывной и имеет ярко выраженный максимум, значительно превышающий критическую скорость крыла без подкоса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М.В. Вибрации в воздушном потоке крыла с подкосами // Тр. ЦАГИ. 1938. Вып. 357. 39 с. См. также в кн.: Келдыш М.В. Механика: Избр. тр. М.: Наука, 1985. С. 304–341.
2. Гроссман Е.П. Флаттер // Тр. ЦАГИ. 1937. Вып. 284. 248 с.
3. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1959 523 с.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970 512 с.
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966 280 с.
6. Гроссман Е.П., Кричевский С.С., Борин А.А. К вопросу о потере устойчивости конструкцией крыла в полете // Тр. ЦАГИ. 1935. Вып. 202. 64 с.
7. Seyranian A.P., Pedersen P. On interaction of eigenvalue branches in non-conservative, multi-parameter problems // Dynamics and Vibration of Time-Varying Structures: Conf. on Mech. Vibrat. and Noise. N.Y.: ASME, 1993. P. 19–31.
8. Сейранян А.П. Столкновения собственных значений в линейных колебательных системах // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 49–58.
9. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.V.1996