МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1997

УДК 532.518.013.4:532.5.031

Посвящается памяти
Инны Марковны Яворской и
Андрея Борисовича Богоявленского

© 1997г. Н.А. БЕЛОВ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ С КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ

Рассматривается линейная задача устойчивости тангенциального разрыва, возникающего при взаимодействии с критической точкой двух встречных плоских потоков идеальной несжимаемой жидкости. Вихревые возмущения порождают лишь конвективную неустойчивость, поэтому задачу можно ставить для потенциальных возмущений. С помощью применения интегрального преобразования Фурье задачу для плоских возмущений удается свести к решению одного эллиптического дифференциального уравнения, описывающего форму разрыва. Анализ уравнения с помощью техники нормальных мод приводит к некоторому дисперсионному уравнению, из которого следует неустойчивость разрыва.

Рассмотрим сначала задачу, которую будем называть одномерной. Пусть в некоторой плоской системе координат (x, y) течение идеальной несжимаемой жидкости задано параметрами ρ_1, U_1 для $y > 0$ и ρ_2, U_2 для $y < 0$, где ρ – плотность, а U – скорость жидкости вдоль оси x. Линия $y = 0$ является линией тангенциального разрыва. Задача состоит в исследовании устойчивости этого разрыва.

Результаты задачи в линейной постановке хорошо известны [1]. Если плоские возмущения течения зависят от x и времени t как $\exp i(kx - \omega t)$, то частота ω связана с волновым числом k соотношением

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega = k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2 \pm i\sqrt{\rho_1\rho_2}\,|U_1 - U_2|)$$

из которого видно, что для любого вещественного волнового числа существует частота с $\operatorname{Im}\omega > 0$, следовательно, возмущение экспоненциально растет со временем и разрыв неустойчив. Эта неустойчивость известна как неустойчивость Кельвина – Гельмгольца.

Рассмотрим теперь тангенциальный разрыв, образующийся при взаимодействии с критической точкой двух плоских потоков идеальной несжимаемой жидкости. Пусть в некоторой декартовой системе координат течение задано следующими полями скоростей $\mathbf{V}_j$ и давления P_j ($j = 1$ для $y > 0$, $j = 2$ для $y < 0$):

$$\mathbf{V}_j = (a_j x, -a_j y),\ P_j = P_{0j} - \rho_j a_j^2 (x^2 + y^2)/2 \tag{1}$$

где a_j – некоторые положительные константы. На тангенциальном разрыве $y = 0$ давление должно быть непрерывным, следовательно

$$P_{01} = P_{02},\ \rho_1 a_1^2 \equiv \rho_2 a_2^2 \tag{2}$$

Для определенности будем считать $\rho_1 > \rho_2$, а потому $0 < a_1 < a_2$.

В отличие от одномерной задачи в данном случае основное течение существенно двумерно, неограниченно на бесконечности и имеется связь (второе из условий (2)) между параметрами течения. Задачу об устойчивости такого разрыва, которую назовем двумерной (по размерности основного течения), и будем рассматривать ниже.

Решение этой задачи может быть интересно в более широком смысле, поскольку течение (1)–(2) можно рассматривать как "асимптотику" вблизи критической точки в более сложных плоскопараллельных течениях с криволинейным тангенциальным разрывом, таких, как взаимодействие однородного потока с источником другой жидкости. Сама двумерная задача была сформулирована в работе [2], где изначально рассматривалось взаимодействие двух сверхзвуковых потоков межзвездного газа.

Обсудим теперь постановку (линейной) двумерной задачи. Покажем сначала, что вихревые возмущения порождают лишь конвективную неустойчивость и могут быть исключены из дальнейшего исследования. Рассмотрим бесконечно малые пространственные возмущения скорости $\mathbf{v}$ и давления p для течения (1)–(2) в одном из полупространств (пусть ось z перпендикулярна плоскости основного течения, индексы опускаем). Эти возмущения удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\quad \mathbf{v}_t + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

следовательно, вихрь скорости возмущений $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ будет удовлетворять уравнению

$$\boldsymbol{\omega}_t + (\mathbf{V}\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{V}$$

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (e^{at}\Omega_1, e^{-at}\Omega_2, \Omega_3)$. Тогда функции $\Omega_{1,2,3}(t, x, y, z)$ будут решениями одного и того же скалярного уравнения

$$\Omega_t + a(x\Omega_x - y\Omega_y) = 0$$

Это уравнение имеет два первых интеграла $xe^{-at} = C_1$ и $xy = C_2$, поэтому общее решение будет произвольной функцией левых частей этих интегралов: $\Omega = \Omega(xe^{-at}, xy, z)$. Таким образом, если в начальный момент времени задано некоторое локальное возмущение вихря, со временем оно будет сноситься по линиям тока основного течения ($xy = \mathrm{const}$) с известным изменением амплитуды, тем самым создавая лишь конвективную неустойчивость.

Далее будем рассматривать потенциальные возмущения. Более того, ограничимся плоскими возмущениями и это будет оправданным, если разрыв уже по отношению к ним будет неустойчивым.

Пусть потенциалы возмущенного течения в полуплоскостях имеют вид

$$\Phi_j = \Phi_{0j} + \varepsilon\varphi_j,\quad \Phi_{0j} = a_j(x^2 - y^2)/2 - tP_{0j}/\rho_j,\quad \varepsilon \ll 1$$

где $\varphi_j(t, x, y)$ – потенциалы плоских возмущений, и пусть $y = \varepsilon\eta(t, x)$ есть возмущение линии тангенциального разрыва.

Тогда потенциалы возмущений удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_j = 0\ (j = 1 : y > 0,\ j = 2 : y < 0) \tag{3}$$

На разрыве должны выполняться два кинематических условия, связывающих скорость смещения поверхности разрыва с нормальной составляющей скорости жидкости, и динамическое условие равенства давлений. Из линеаризации этих условий следует, что на $y = 0$

$$\eta_t + a_j x\eta_x + a_j\eta = \varphi_{jy},\quad \rho_1(\varphi_{1t} + a_1 x\varphi_{1x}) = \rho_2(\varphi_{2t} + a_2 x\varphi_{2x}) \tag{4}$$

где последнее условие преобразовано с учетом интеграла Коши – Лагранжа.

Течение (1)–(2) не ограничено по y, следовательно, и линейные возмущения могут расти вверх по течению, но не быстрее основного течения. Поэтому естественно предположить, что

$$|\nabla\varphi_j| \le \text{const}\,|y|,\ |y| \to \infty \tag{5}$$

Для завершения постановки задачи на определение φ_j и η можно задать также начальные условия (на $y = 0$) или искать решение, предполагая экспоненциальную зависимость искомых функций от t.

Основная сложность задачи (3)–(5) по сравнению с аналогичной одномерной – решение уравнения Лапласа с неоднородными граничными условиями – может быть преодолена с помощью применения интегрального преобразования Фурье по переменной x. Заметим, это преобразование следует понимать как преобразование для обобщенных функций медленного роста [3], поскольку искомые функции могут не убывать на бесконечности. Пусть

$$F_j(t,s,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j(t,x,y)e^{isx}dx,\ G(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\eta(t,x)e^{isx}dx$$

– фурье-образы искомых функций. Тогда, применяя преобразование к уравнениям (3), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения $F_{jyy} = s^2F_j$, решениями которых с учетом (5) будут

$$F_1 = H_1(t, s)\exp(-|s|y),\ F_2 = H_2(t, s)\exp(|s|y)$$

Преобразование условий (4) дает систему

$$G_t - a_jsG_s = (-1)^j|s|H_j,\ \ \rho_1[H_{1t} - a_1(sH_1)_s] = \rho_2[H_{2t} - a_2(sH_2)_s]$$

Используя тождество $|s|(sH_j)_s = s(|s|H_j)_s$, исключаем из этой системы $H_{1,2}$ и получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка для $G(t, s)$

$$[\rho_1(\partial_t - a_1s\partial_s)^2 + \rho_2(\partial_t - a_2s\partial_s)^2]G = 0$$

Можно решить это уравнение и найти G, далее из предыдущей системы определить $H_{1,2}$ и, применяя обратное преобразование Фурье, найти полное решение задачи (3)–(5). Но можно сразу применить обратное преобразование Фурье

$$\eta(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(t,s)e^{-isx}dx$$

к последнему уравнению и это сведет задачу к исследованию всего одного уравнения, описывающего форму разрыва $\eta(t, x)$

$$(\rho_1+\rho_2)\eta_{tt} + 2(\rho_1a_1+\rho_2a_2)(x\eta)_{xt} + (\rho_1a_1^2+\rho_2a_2^2)[x(x\eta)_x]_x = 0 \tag{6}$$

Приступая к исследованию уравнения (6), обратим внимание на одно важное обстоятельство. Аналогичное уравнение для одномерной задачи имеет вид

$$(\rho_1+\rho_2)\eta_{tt} + 2(\rho_1U_1+\rho_2U_2)\eta_{xt} + (\rho_1U_1^2+\rho_2U_2^2)\eta_{xx} = 0$$

Оно является эллиптическим при всех $U_1 \ne U_2$. Задача Коши для него (к ней сводится задача для потенциалов с начальными условиями), как и для любого эллиптического уравнения, некорректна из-за отсутствия непрерывной зависимости решения от начальных условий [3]. Этот факт безусловно связан с (уже известной в данном случае) неустойчивостью разрыва. Таким образом, можно сформулировать простой критерий устойчивости: если уравнение, описывающее форму разрыва, эллиптическое, разрыв неустойчив. Удобство этого критерия заключается в том, что вывод об устойчивости делается без решения задачи, используем его ниже в двумерной задаче.

Поскольку уравнение (6) симметрично относительно замены x на $(-x)$, достаточно рассмотреть интервал $x > 0$. На этом интервале введем новые переменные

$$h(\tau, \xi) = x\eta, \quad \tau = a_1 t, \quad \xi = \ln x \tag{7}$$

Положим также $\chi = a_1/a_2$, тогда $0 < \chi < 1$, а в силу (2) $\rho_2 = \chi^2\rho_1$. В новых переменных уравнение (6) имеет вид

$$(1 + \chi^2)h_{\tau\tau} + 2(1 + \chi)h_{\tau\xi} + 2h_{\xi\xi} = 0 \tag{8}$$

Последнее уравнение, как и (6), является эллиптическим для всех $\chi \neq 1$, а значит, согласно критерию устойчивости, тангенциальный разрыв в двумерной задаче должен быть неустойчив.

Покажем эту неустойчивость разрыва с помощью (стандартной) техники нормальных мод. Ищем решение уравнения (8) в виде $h = \exp i(k\xi - \omega\tau)$, где k и ω – комплексные волновое число и частота. Подстановка в уравнение дает

$$(1 + \chi^2)\omega^2 - 2(1 + \chi)k\omega + 2k^2 = 0 \tag{9}$$

Дисперсионное уравнение (9) совпадает с аналогичным в одномерной задаче, если в ней положить $\rho_1 U_1^2 = \rho_2 U_2^2$ и $\chi = U_1/U_2$. Разница, однако, в том, что здесь волновое число k не является вещественным. Действительно, из (7) при фиксированном t следует, что $\eta \sim x^\alpha$, где $\alpha = ik - 1$. Требование ограниченности η при конечных x и условие малости возмущений на бесконечности ($|\eta| \leq \mathrm{const}\, |x|$, $|x| \to \infty$) дают $0 \leq \mathrm{Re}\, \alpha \leq$ ≤ 1. Если $\mathrm{Re}\, \alpha = 0$, то необходимо $\mathrm{Im}\, \alpha = 0$, иначе η не будет непрерывной в нуле. При $0 < \mathrm{Re}\, \alpha < 1$ линеаризация условий на разрыве (см. (4)) становится некорректной. Таким образом, множеством допустимых значений в плоскости α будет точка $\alpha = 0$ и линия $\mathrm{Re}\, \alpha = 1$, в плоскости k – точка $k = -i$ и линия $\mathrm{Im}\, k = -2$.

Из (9) следует, что

$$\omega = \frac{k}{1+\chi^2}[1 + \chi \pm i(1 - \chi)]$$

Поэтому в точке $k = -i$ $\mathrm{Im}\, \omega < 0$ и такое возмущение ($\eta = \mathrm{const}$) затухает. Возмущение может расти ($\mathrm{Im}\, \omega > 0$) на линии $\mathrm{Im}\, k = -2$ при выполнении условия

$$|\mathrm{Re}\, k| > \frac{2(1+\chi)}{1-\chi} \tag{10}$$

Заключение. Тангенциальный разрыв в двумерной задаче, так же как и в одномерной, оказался неустойчивым. Возмущение линии разрыва вида $\eta \sim |x| \exp i(k_1 \ln |x| - \omega\tau)$ будет расти, если вещественное волновое число $k_1 = \mathrm{Re}\, k$ удовлетворяет неравенству (10), и будет затухать при выполнении обратного неравенства.

Корректное определение типа полученной неустойчивости (абсолютная или конвективная), по-видимому, возможно лишь при учете какого-либо физического механизма, например поверхностного натяжения, не допускающего коротковолновой неустойчивости, и может быть предметом отдельного исследования (для одномерной задачи такая процедура была проделана в [4]). Интерес представляет также двумерная задача с осесимметричным основным течением.

Автор благодарит В.Б. Баранова за предложенную задачу.

Работа частично была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 95-02-042-15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
2. *Baranov V.B., Fahr H.J., Ruderman M.S.* Investigation of macroscopic instabilities at the heliopause boundary surface // Astron. and Astrophys. 1992. V. 261. № 1. P. 341–347.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
4. *Куликовский А.Г., Шикина И.С.* О развитии возмущений на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 5. С. 46–49.

Москва

Поступила в редакцию
26.IV.1996