

УДК 532.517.4:532.526.2

© 1997 г. А.Н. СЕКУНДОВ

МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С КРУПНОМАСШТАБНЫМ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ

Рассмотрены течения, в которых сравнительно тонкий ламинарный пограничный слой взаимодействует с турбулентным потоком с большими значениями интегрального масштаба турбулентности. Проанализированы недостатки известных моделей турбулентности и предложен способ модернизации этих моделей для описания такого взаимодействия.

Подобные течения, где масштаб турбулентности L_e много больше, чем характерная толщина пограничного слоя δ , имеют место, например, в пристеночных струях, в новом пограничном слое, который возникает вблизи точки присоединения потока к стенке за областью отрыва, и во многих других случаях. Однако особенно существенно взаимодействие такого рода при описании перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое при наличии турбулентности в набегающем потоке.

При исследовании перехода в пограничном слое на поверхности, например, турбинных или компрессорных лопаток типичное отношение масштаба во внешнем потоке к толщине ламинарного пограничного слоя на поверхности лопатки составляет $L_e/\delta = 50-200$. При анализе переходных процессов в пограничном слое на крыле самолета, как правило, турбулентность внешнего потока играет второстепенную роль и переход определяется влиянием акустических пульсаций и вибрации поверхности. Однако в случае сложных многоэлементных крыльев, как отмечается, например, в [1], турбулизированный след за предкрылком, попадая на ламинарный пограничный слой на поверхности крыла, также может вызвать переход, при этом оценки показывают, что в этом случае $L_e/\delta \approx 10$.

В перечисленных течениях наличие крупномасштабной турбулентности существенно осложняет описание таких течений. Настоящая работа преследует две цели. Прежде всего – выяснить возможности описания таких течений с помощью современных дифференциальных моделей турбулентности. Заранее ясно, что простые однопараметрические модели не могут дать хороших результатов, поскольку в них отсутствует возможность учета влияния масштаба турбулентности во внешнем потоке. Потенциально такая возможность открывается при использовании двухпараметрических моделей турбулентности, например известной k - ϵ -модели. Однако, как это будет показано, и эти модели не позволяют правильно предсказывать роль крупных масштабов. Поэтому вторая и основная цель статьи – предложить способы модернизации указанных моделей с целью описания этого влияния.

1. Физические основы. Взаимодействие крупномасштабной турбулентности с обтекаемым телом связано с "дальнодействием" сил давления. Когда турбулентный поток приближается к стенке, турбулентность "чувствует" это приближение и начинает изменяться. Вследствие этого при $L_e \gg \delta$ вблизи от поверхности обтекаемого тела возникают как бы два пограничных слоя: обычный "вязкий" и внешний "невязкий". В обычном "вязком" пограничном слое толщиной δ поле скорости за-

вихренно, во внешнем "невязком" пограничном слое толщиной $\Delta \approx L_c$ поле скорости потенциально, однако в нем изменяются характеристики турбулентности и, в частности, значение турбулентной вязкости ν_t . При построении моделей турбулентности это дальное действие формально проявляется в моментных уравнениях через члены типа $\langle p'u'_i \rangle$ и $\langle p'\partial u'_i / \partial x_j \rangle$. Пульсации давления в несжимаемой жидкости удовлетворяют уравнению Пуассона, решение которого определяется всей областью течения. Отсюда формально и возникает эффект дального действия. В [2] была предпринята одна из первых попыток учесть эти эффекты при построении двухпараметрической модели турбулентности и была показана необходимость введения в модельные уравнения расстояния до стенки. Тем самым в модель вводились эффекты нелокальности, когда в малой окрестности точки решение модельных уравнений явно зависит от присутствия стенки вдали от этой точки. Многие современные модели турбулентности также используют понятие расстояния до стенки. Однако неясно, насколько правильно модельные уравнения такого типа могут описать указанный внешний "невязкий" пограничный слой.

Для анализа влияния стенки на турбулентный поток и, следовательно, структуры этого внешнего "невязкого" слоя удобно рассмотреть некоторое специальное течение над стенкой, которая движется со скоростью потока. В этом случае обычный "вязкий" пограничный слой вблизи стенки не возникает и эффекты влияния стенки на турбулентность проявляются в "чистом" виде. Подобное течение было исследовано экспериментально в [3] и теоретически с помощью теории "быстрой деформации" в [4]. В этих работах было показано, что пульсации, направленные вдоль стенки u' , несколько усиливаются (приблизительно на 20%), а компонента пульсаций, перпендикулярная стенке v' , и масштаб турбулентности L убывают до нуля по мере приближения к стенке.

Важно отметить, что указанное распределение параметров в слое толщиной Δ возникает "мгновенно" (имеются в виду несжимаемая жидкость и большие числа Рейнольдса). Толщина слоя Δ , в котором возникает такое распределение, пропорциональна интегральному масштабу турбулентности L_c вдали от стенки. Поэтому толщина указанного слоя может изменяться по времени (t) или вдоль пластины (x) только за счет изменения внешнего масштаба $L_c(t, x)$.

2. Анализ моделей турбулентности. Автор статьи многие годы совершенствовал и модернизировал модель Коважного [5] для турбулентной вязкости, первый вариант которой был опубликован в [6]. Наиболее удачный вариант этой модели – ν_t -92 приведен в [7]. Модель ν_t -92 была протестирована на множестве течений в плоских и осесимметричных струях, следах, пограничном слое на гладкой и шероховатой стенке, в ней учитываются эффекты скоростной сжимаемости потока. Анализ трудов последних международных конференций и "Коллективного тестирования моделей", которое проводилось в Стенфордском университете в 1990–91 гг. [8], показывает, что в практических расчетах по-прежнему часто используются различные модификации известной двухпараметрической k - ϵ -модели [9]. Кроме того, заметна тенденция использования более простых и удобных для массовых расчетов однопараметрических моделей. В частности, появилось несколько моделей для турбулентной вязкости, которые также продолжают развивать модель Коважного. Одна из наиболее удачных версий таких моделей предложена в [10]. Будем обозначать эту версию модели для турбулентной вязкости через S-A.

В [11] было проведено расчетное сравнение k - ϵ -модели в модификации [12] и двух указанных моделей для турбулентной вязкости: S-A и ν_t -92. Тестирование этих моделей на нескольких сложных течениях с зонами отрыва показало, что более простые модели S-A и ν_t -92 имеют некоторые преимущества по сравнению с k - ϵ -моделью как по точности предсказания параметров течения, так и по скорости счета. В данной работе эти три модели были выбраны как наиболее типичные для последующего анализа и сравнения.

Приведем в качестве примера модельное уравнение v_t -92

$$\begin{aligned} \frac{dv_t}{dt} = & \nabla (\rho(Cv_t + v) \nabla v_t) / \rho + \nabla \rho((C_1 - C)v_t - v) \nabla v_t / \rho + C_3 v_t (\Delta v_t + N_2) + \\ & + C(v_t \Gamma_1 + A_1 v_t^{3/2} \Gamma_2^{3/2} + A_2 ((v_t + v) \Gamma_1)^{3/2} N_1) - C_4 v_t (\operatorname{div} \mathbf{u} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|) - \\ & - C_5 v_t^2 \Gamma_1^2 c^{-2} - (C_6 v_t (N_1 d + v_w) + C_7 F_1 v_t v) S^{-2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Gamma_1^2 = \frac{\partial U_t}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_t}{\partial x_j} + \frac{\partial U_t}{\partial x_i} \right), \quad \Gamma_2^2 = \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_i^2}, \quad N_1^2 = (\nabla v_t)^2, \quad N_2^2 = (\nabla N_1)^2 \quad (2.2)$$

$$F_1 = \frac{N_1 d + 0,4 C_8 v}{v_t + C_8 v + v_w}, \quad F_2 = \frac{\alpha^2 + 1,3\alpha + 0,2}{\alpha^2 - 1,3\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{v_t}{7v}, \quad S^2 = d^2 + (0,1k_s)^2$$

Постоянные равны

$$\begin{aligned} C_2 = C_2' F_2, \quad C_2' = 0,1, \quad A_1 = -0,5, \quad A_2 = 4, \quad C = 0,8, \quad C_1 = 1,6, \quad C_3 = 4, \\ C_4 = 0,35, \quad C_5 = 3,5, \quad C_6 = 2,9, \quad C_7 = 31,5, \quad C_8 = 0,1 \end{aligned}$$

По сравнению с первой публикацией в [7] в модели были уточнены члены с эффектами сжимаемости и шероховатости (см. [11]). Здесь \mathbf{U} – скорость, осредненная по методу Фавра, \mathbf{u} – скорость, осредненная по времени, a – скорость звука, k_s – размер эквивалентной песочной шероховатости, v_w – турбулентная вязкость на шероховатой стенке ($v_w = 0,01u_*k_s$, где $u_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамическая скорость), d – расстояние до стенки, в дальнейшем будут рассматриваться течения, в которых $d = y$.

3. Простейшие пристеночные течения. Для анализа моделей турбулентности удобно рассмотреть следующие простейшие задачи.

А. Плоский турбулентный поток над полубесконечной пластиной, стенка которой движется со скоростью, равной скорости потока, так что $u = \operatorname{const}$, а турбулентная вязкость v_t в слое толщиной $\Delta(x)$ изменяется от нуля на стенке до v_c вдали от нее.

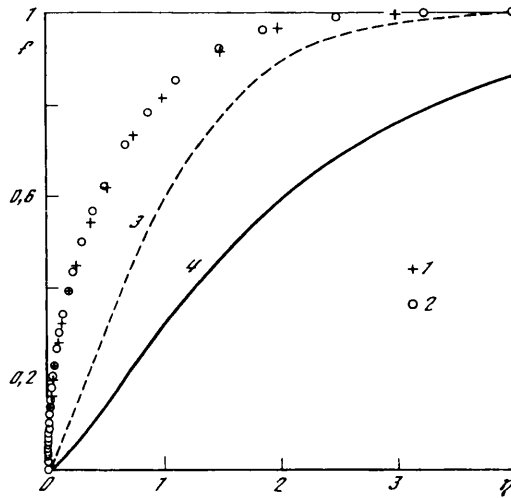
Б. Течение в слое толщиной $\Delta(t)$, который возникает при мгновенно приведенной в движение и последующей остановке бесконечной пластины в пространстве, заполненном в среднем неподвижной, но турбулизированной жидкостью.

Будем рассматривать случай очень больших чисел Рейнольдса, когда вязкими членами в модельных уравнениях можно пренебречь. В этих течениях обычный вязкий пограничный слой отсутствует и удобно проанализировать, как модельные уравнения описывают трансформацию турбулентности в слое с характерной толщиной Δ . Введем автомодельные переменные

$$v_t = v_c f(\xi), \quad \xi = y / \Delta, \quad D = u_c \Delta \Delta' / v_c \quad (3.1)$$

Здесь U_c и v_c – это скорость и турбулентная вязкость при $y \gg \Delta$, а Δ' – производная от толщины слоя по x для задачи А и $U_c \Delta'$ – производная по времени для задачи Б. Используя эти переменные, уравнение (2.1) можно записать в таком виде

$$D \xi \frac{df}{d\xi} + C \frac{d}{d\xi} \left(f \frac{df}{d\xi} \right) + (C - C_1) \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 - C_6 \left| \frac{df}{d\xi} \right| \xi^{-1} f = 0 \quad (3.2)$$



Фиг. 1. Сравнение трех моделей турбулентной вязкости ($f = \nu_t/\nu_e$); кривая 3 - ν_t -92, 4 - S-A, 1, 2 - $k - \epsilon$ -модель ($1 - B = 1000$, $2 - B = 0,01$)

При получении этого соотношения предполагается, что справедливо приближение тонкого слоя и пристеночный слой Δ расширяется медленно. Уравнение (3.2) решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad f = 0 \\ \xi \rightarrow \infty, \quad f = 1 \end{aligned}$$

Как отмечалось во Введении, для того чтобы удовлетворить экспериментальным данным, нужно, чтобы у уравнения (3.2) существовало решение при значении параметра $D = 0$. Однако простой анализ показывает, что такого решения нет. Это естественно, так как при $D = 0$ у уравнения нет параметра с размерностью длины. В случае $D \neq 0$ автомодельное решение соответствует расширяющейся по продольной координате вдоль пластины x или по времени t толщине внешнего "невязкого" слоя (см. соотношение (3.1)). При стремлении x или t к бесконечности значение Δ также обращается в бесконечность. Это означает, что модели турбулентности, которые не имеют решения при $\Delta = 0$, в некотором смысле соответствуют значению внешнего масштаба турбулентности, равному $L_c = \infty$.

Поскольку параметр D в этом случае достаточно формален и зависит от определения того, что понимается под толщиной слоя Δ , то удобно перейти к новой переменной $\eta = \xi / \sqrt{D}$. В этом случае уравнение (3.2) не содержит D

$$\eta \frac{df}{d\eta} + C \frac{d}{d\eta} \left(f \frac{\delta f}{d\eta} \right) + (C - C_1) \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 - C_6 \left| \frac{df}{d\eta} \right| \eta^{-1} f = 0 \quad (3.3)$$

Сходное уравнение можно получить и для модели S-A. Результаты численного решения этих уравнений представлены на фиг. 1, здесь же приведены и решения с использованием $k - \epsilon$ -модели. Видно, что модель S-A дает формальную (отнесенную к D) толщину слоя примерно в два раза больше, чем модель. Это связано с особенностями записи в этих моделях членов, содержащих расстояние до стенки y . Так, в модели S-A это слагаемое пропорционально $\nu_t^2 y^{-2}$, а в модели ν_t -92 аналогичное слагаемое записывается по-другому: $\nu_t |d\nu_t/dy| y^{-1}$.

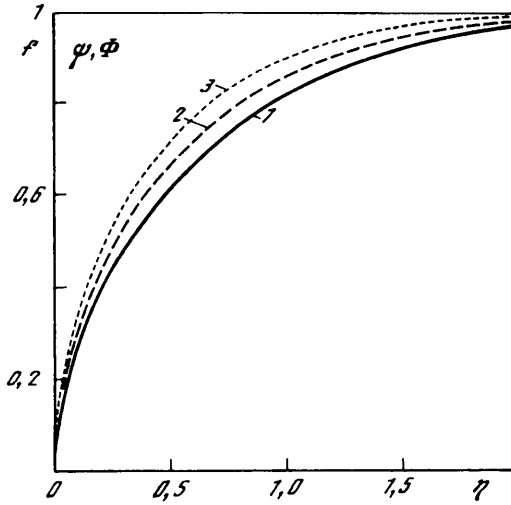


Рис. 2. Распределения вязкости (кривая 1) энергии турбулентности (2) и диссипации (3) при использовании $k-\epsilon$ -модели

Несколько иная ситуация в случае двухпараметрических моделей типа $k-\epsilon$. В этих моделях масштаб турбулентности можно вычислить через кинетическую энергию турбулентности k и скорость диссипации ϵ ($L \sim k^{1/2}\epsilon$) и, таким образом, информация о масштабе во внешнем потоке присутствует в этих моделях через граничные условия на k и ϵ . Запишем уравнения $k-\epsilon$ -модели при $Re \rightarrow \infty$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left((v_t + \nu) \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \epsilon \quad (3.4)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) - \beta \frac{\epsilon^2}{k}, \quad v_t = C_m \frac{k^2}{\epsilon}$$

Следует отметить, что в многочисленных вариантах этой модели используются разные значения постоянных σ , β и C_m , однако чаще всего эти постоянные близки к значениям, которые были предложены в работах Лаундера и его соавторов (см., например, [9, 12]): $\sigma = 1,3$, $\beta = 1,8 - 2$ и $C_m = 0,09$.

Введем следующие обозначения:

$$k = k_e \psi(\xi), \quad \epsilon = \epsilon_e \phi(\xi) \quad (3.5)$$

$$v_t = v_e f(\xi), \quad B = \epsilon_e \Delta^2 / (v_e k_e)$$

Используя (3.5), перепишем (3.4)

$$-D\xi \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(f \frac{d\phi}{d\xi} \right) - B(\psi - \phi), \quad -D\xi \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{d\xi} \left(f \frac{d\psi}{d\xi} \right) - \beta B \left(\frac{\psi^2}{\phi} - \psi \right) \quad (3.6)$$

Если воспользоваться известными приближенными соотношениями $\epsilon_e \approx k_e^{3/2} / L_e$ и $v_e \approx k_e^{1/2} L_e$, то после подстановки их в параметр B получим $B \approx (\Delta / L_e)^2$. Итак, складывается впечатление, что параметр B может учесть влияние внешнего масштаба на толщину пристеночного слоя Δ . Однако численные расчеты показали, что это не

так. Снова введем переменную $\eta = \xi / \sqrt{D}$. В этом случае уравнения (3.6) переписутся

$$-\eta \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(f \frac{d\phi}{d\xi} \right) - (\psi - \phi) \frac{B}{D}, \quad -\eta \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{d\xi} \left(f \frac{d\psi}{d\xi} \right) - \beta \left(\frac{\psi^2}{\phi} - \psi \right) \frac{B}{D} \quad (3.7)$$

Численные расчеты показали, что решения систем (3.6) или (3.7) не существует при $D = 0$. Более удивительным результатом оказалась практическая независимость решения этих систем при $D \neq 0$ от параметра B . На фиг. 1 приведены результаты расчетов при вариации B от 0,01 до 1000, видно, что влияние этого параметра практически отсутствует. Этот неожиданный результат связан с некоторым подобием модельных уравнений в k - ϵ -модели и наличия в них малых параметров, которые не очевидны при поверхностном анализе этих уравнений. Это видно из приведенных на фиг. 2 расчетных распределений всех функций $k(\eta)$, $\epsilon(\eta)$ и $v_r(\eta)$, которые весьма близки друг к другу. В связи с важностью этого результата были проведены дополнительные расчеты и получены некоторые аналитические результаты, которые подтверждают эти расчеты. Прежде всего отметим, что при $\sigma = 1$ у системы уравнений (3.7) есть решение, когда все искомые функции совпадают: $f \equiv \phi \equiv \psi$. В этом случае обращаются в ноль слагаемые, содержащие параметр B (см. уравнения (3.7) и (3.8)), и поэтому очевидно, что это частное решение не зависит от отношения $B \approx (\Delta / L_e)^2$ и, следовательно, от масштаба турбулентности внешнего потока L_e . Обозначим это частное решение через ϕ_0 . Можно показать, что общее решение системы (3.7) для турбулентной вязкости можно представить в виде следующего ряда по малому параметру $(\sigma - 1)$:

$$f(\xi) = \phi_0(\xi) + (\sigma - 1)\phi_1(\xi) + (\sigma - 1)(2 - \sigma\beta)\phi_2(\xi) + \dots \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что в k - ϵ -модели имеется два малых параметра $(\sigma - 1)$ и $(\sigma - 1)(2 - \sigma\beta)$, равных соответственно 0,3 и 0,102. Конкретные вычисления функций $\phi_1(\xi)$ и $\phi_2(\xi)$ показали, что они также малы. Отметим, что расчеты с измененными значениями постоянных σ и β показали, что слабая зависимость профиля турбулентной вязкости от параметра $B \approx (\Delta / L_e)^2$ сохраняется при вариации значений σ и β в широких пределах $1 < \sigma < 2$ и $1 < \beta < 3$. Этот диапазон изменения коэффициентов охватывает все известные модификации k - ϵ -модели.

Следовательно, двухпараметрические модели типа k - ϵ не в состоянии даже качественно правильно предсказать влияние внешнего масштаба турбулентности на толщину пристеночного слоя и в этом смысле k - ϵ -модель ничуть не лучше более простых однопараметрических моделей.

Количественная разница полученных решений сводится лишь к тому, что k - ϵ -модель дает самый тонкий слой (фиг. 1), а модель S-A – самый толстый. Кроме того, различается поведение их решений вблизи стенки. Так, если аппроксимировать решение для турбулентной вязкости в виде формулы

$$f = c\xi^n \quad (3.9)$$

то однопараметрические модели дают значения показателя степени несколько больше единицы: в модели S-A значение $n = 1,39$, в модели v_r -92 соответственно $n = 1,13$, а в модели $k - \epsilon$ этот показатель меньше единицы и приближенно равен $n \approx 0,5$.

В то же время, с точки зрения описания влияния масштаба L_e , все модели дали сходные и, к сожалению, неправильные результаты. Толщина пристеночного слоя не зависит от внешнего масштаба турбулентности и отсутствует "стационарное" решение, т.е. решение при $D = 0$.

4. Модификация моделей для турбулентной вязкости. Анализ моделей показал, что отсутствие автомодельных решений при $D = 0$ связано со следующим дефектом. Вблизи внешнего края пристеночного слоя значение v_t должно приближаться к постоянному значению v_c . В этой области главные члены уравнения – диффузионное слагаемое и "деструктивное слагаемое", связанное с расстоянием до стенки, все они принимают отрицательное значение и только уменьшают вязкость, т.е. при $D = 0$ отсутствует какое-либо положительное слагаемое, которое могло бы сбалансировать указанные отрицательные слагаемые. Как уже отмечалось, такая форма модельных уравнений соответствует как бы случаю бесконечного значения масштаба L_e . В то же время многие соотношения, используемые в модельных уравнениях, напротив, соответствуют случаю $L_e \rightarrow 0$.

Для устранения этого противоречия необходимо добавить в модельное уравнение для турбулентной вязкости еще одно слагаемое. Это слагаемое должно быть положительным на внешней границе слоя и зависеть от масштаба турбулентности. Ясно также, что на пограничный слой могут воздействовать только масштабы, соизмеримые с толщиной пограничного слоя. Поэтому в данном случае применима модель типа известного закона " $\frac{2}{3}$ " Ричардсона [13]. С учетом этих соображений дополнительное слагаемое запишем в таком виде

$$\frac{dv_t}{dt} = \dots + C_e \frac{v_t^{2/3} L_e^{2/3}}{L_e^2 + (C_{el} y)^2} N_1^{2/3} + \dots, \quad N_1^2 \equiv \left(\frac{\partial v_t}{\partial x_j} \right)^2 \quad (4.1)$$

Дополнительное слагаемое обращается в нуль при $L_e = 0$ и ∞ , а также вдали от обтекаемой поверхности. Чтобы оно не портило модельное уравнение при расчете "обычных" течений, необходимо выполнение следующего неравенства:

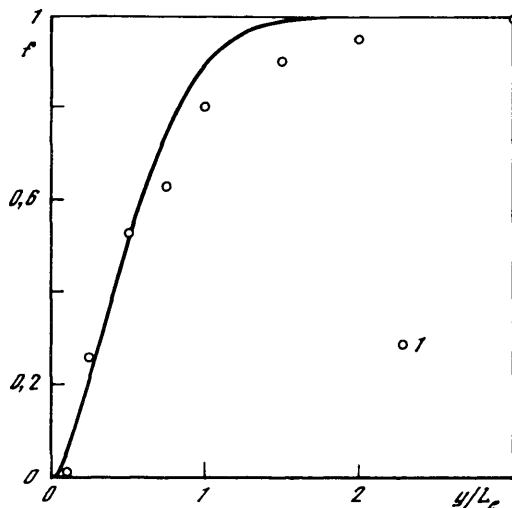
$$C_e \frac{v_t^{2/3} L_e^{2/3}}{L_e^2 + (C_{el} y)^2} N_1^{2/3} \ll \frac{C_6 v_t N_1}{y}$$

Расчеты пограничного слоя показали, что это неравенство хорошо выполняется уже при $L_e > \delta$, если $C_{el} > 0,1$, и точность его выполнения увеличивается по мере роста отношения L_e / δ . В автомодельных переменных уравнение модифицированной модели v_t -92L запишется так

$$C \frac{d}{d\xi} \left(f \frac{df}{d\xi} \right) + (C - C_1) \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + C_e \frac{f^{2/3}}{1 + (C_{el} \xi)^2} \left| \frac{df}{d\xi} \right|^{2/3} - C_6 \left| \frac{df}{d\xi} \right| \xi^{-1} f = 0 \quad (4.2)$$

Здесь $\xi = y/L_e$ и численные расчеты показывают, что при использовании модифицированной модели "стационарное" решение ($D = 0$) существует. Результаты расчетов приведены на фиг. 3 при следующих значениях новых постоянных: $C_e = 5$, $C_{el} = 0,1$. Здесь же представлены известные экспериментальные данные. Видно хорошее согласование с ними модели v_t -92L. Следует отметить, что близкие результаты получаются при использовании модели S-A, если в нее добавить то же слагаемое, но несколько увеличить константу $C_e = 12-15$.

Этот набор постоянных был получен для плоской пластины. Известно, что при обтекании затупленных тел распределение v_t вблизи передней точки растекания потока по телу может зависеть от отношения радиуса кривизны тела R к масштабу турбулентности L_e . В теоретической работе [14] показано, что при уменьшении параметра R/L_e в случае обтекания цилиндра толщина Δ внешнего пристеночного слоя убывает. Чтобы добиться согласования с этими данными, в модели турбулентности необходимо сделать коэффициент C_e функцией параметра R/L_e .



Фиг. 3. Сопоставление модифицированной модели v_t-92L (кривая) с опытными данными [3] (1)

5. Уравнения для масштаба турбулентности. Модифицированная модель турбулентности v_t-92L содержит масштаб турбулентности "внешнего" потока L_e . При решении конкретных задач могут возникнуть сложности при его определении. В общем случае масштаб турбулентности изменяется по пространству и, следовательно, он не постоянен на границе расчетной области. Существует, правда, ситуация, когда эта проблема несколько упрощается. Это случай обтекания турбулентным потоком тела, все характерные размеры которого много меньше L_e . В этом случае можно пренебречь изменением L_e вдоль границы расчетной области и считать, что $L_e = \text{const}$. Однако даже в этом случае при численных расчетах возникают некоторые технические проблемы. Расчетная область должна охватывать всю зону течения, где может изменяться v_t . Поэтому при $L_e \gg \delta$ размеры расчетной области оказываются много больше толщины обычного "вязкого" пограничного слоя δ . Естественно, это усложняет численную процедуру расчета такого течения.

Для того чтобы уменьшить расчетную область, можно попытаться "снести" граничное условие на v_t из "бесконечности" внутрь слоя Δ . Для этого можно использовать частное решение модельных уравнений S-A или v_t-92 типа $v_t \sim y^n$ (см. (3.9)). Это частное решение удобно представить в таком виде

$$v_t = C_n v_e (y / L_e)^n, \quad C_n \approx 0,7 \quad (5.1)$$

Это решение справедливо в области $\delta \ll y \ll L_e$ и, если $L_e \gg \delta$, имеется довольно значительная подобласть, в которой можно "сшить" это частное решение с решением модельных уравнений вблизи поверхности обтекаемого тела.

Более универсальным представляется иной способ решения проблемы определения масштаба L_e . Этот способ связан с введением в модель дополнительного уравнения для некоторого характерного масштаба турбулентности L . Вне "вязкого" пограничного слоя определение L совпадает с обычным определением интегрального масштаба турбулентности. Внутри "вязкого" пограничного слоя определение L иное. Здесь величина L определяется только той частью спектра турбулентных пульсаций, где волновые числа меньше, чем $2\pi/\delta$. Это означает, что вблизи поверхности при $L_e \gg \delta$ величина L сравнительно слабо отличается от значения L_e вне пристеночных пограничных слоев. Однако даже такой своеобразный масштаб турбулентности должен изменяться под

действием вязкости и эффектов сжимаемости, а наличие градиентов скорости в потоке должно приводить к некоторому уменьшению масштаба. Исходя из этих требований, для L было предложено следующее модельное уравнение:

$$\frac{dL}{dt} = K_1 \frac{v_t + 4\nu / K_1}{L} - K_2 L \Gamma_1 \frac{v_t}{v_t + 4\nu / K_1} + \frac{1}{3} L \operatorname{Div} \mathbf{u} + \nabla((K_3 v_t + \nu) \nabla L) \quad (5.2)$$

Здесь первое слагаемое в правой части отражает процессы увеличения масштаба из-за турбулентной и молекулярной вязкости. Второе – описывает убывание масштаба из-за деформации, связанной с наличием неоднородности скорости (определение Γ_1 см. в (2.2)). Третье слагаемое отражает эффекты сжимаемости и, наконец, последнее слагаемое описывает диффузию масштаба.

Известные теоретические данные и расчеты простейших течений позволили в первом приближении оценить значения постоянных: $K_1 \approx 0,3$, $K_2 \approx 0,1$, $K_3 \approx 10$. Граничное условие на твердой стенке для этого уравнения таково: $dL/dn = 0$, где n – нормаль к стенке.

Заключение. Анализ нескольких известных однопараметрических и двухпараметрических моделей турбулентности показал, что эти модели неправильно описывают взаимодействие крупномасштабного турбулентного потока со стенкой. В частности, расчетная толщина пристеночного слоя, где турбулентная вязкость убывает до нулевого значения на стенке, не зависит от значения масштаба турбулентности в набегающем потоке, что противоречит известным экспериментальным данным. Предложена модификация модельных уравнений с целью устранения этого дефекта. Первые расчеты нескольких конкретных течений в переходном и развитом турбулентном пограничном слое дали обнадеживающие результаты. Однако преждевременно рекомендовать эти модификации для практического использования. Требуется дальнейшее более углубленное экспериментальное и расчетное исследование.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00251а), отдельные разделы работы финансировались Boeing Operations International, Inc.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kusunose Kuzuhiko, Cao Hoa V.* Prediction of transition location for a 2-D Navier-Stokes solver for multi-element airfoil configurations // AIAA 94-2376. 25rd AIAA Fluid Dynam. Conf. 1994. 23 p.
2. *Глушко Г.С.* Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине // Турбулентные течения. М.: Наука, 1970, с. 37–44.
3. *Thomas N.H., Hancock P.E.* Grid turbulence near a moving wall // J. Fluid Mech. 1977. V. 82. Pt 3. P. 481–496.
4. *Hunt J.C.R., Graham J.M.R.* Free-stream turbulence near plane boundaries // J. Fluid Mech. 1978. V. 84. Pt 2. P. 209–235.
5. *Kovasznay L.S.G.* Structure of the turbulent boundary layer // Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 9. Pt 2. P. 25–30.
6. *Секундов А.Н.* Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 114–127.
7. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.* К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН, МЖГ. 1993. № 4. С. 69–84.
8. *Bradshaw P., Launder B.E., Lumley J.L.* Collaborative testing of turbulence models // AIAA Paper-91-0215. 29th Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. 1991. Reno, NV. 6 p.
9. *Jones W.P., Launder B.E.* The calculation of low-Reynolds-number-phenomenon with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat Mass Transf. 1973. V. 23. № 6. P. 1119–1130.

10. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // AIAA Paper-92-0439. 30th Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. 1992. Reno, NV. 27 p.
11. *Shur M., Strelets M., Zaikov L. et al.* Comparative numerical testing of one- and two-equation turbulence models for flows with separation and reattachment // AIAA Paper-95-0863. 33rd Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. 1995. Reno, NV. 31 p.
12. *Chien K.Y.* Prediction of channel and boundary-layer flows with a low Reynolds-number turbulence model // AIAA Journal. 1982. V. 20. № 1. P. 33–38.
13. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
14. *Hunt J.C.R.* A theory of turbulent flow round two-dimensional bluff bodies // J. Fluid Mech. 1973. V. 61. Pt 4. P. 625–706.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.1995