



Н. Е. Жуковский

© 1997 г. Г.Ю. СТЕПАНОВ

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ТРУДАХ Н.Е. ЖУКОВСКОГО (к 150-летию со дня рождения 5(17).I.1847)

"Теперь все более и более оправдываются слова Гельмгольца, что уравнения гидродинамики выражают реальное движение жидкости. Силы сопротивления, развивающиеся при потоках, обтекающих тела, кроме кирхгофовой теории срывающихся струй, находят себе объяснение в новом факторе, указанном мной и Ланчестером, – в циркуляции скорости".

Н.Е. Жуковский

Приведенные в качестве эпитафии слова взяты из речи Николая Егоровича Жуковского 16 января 1911 г. в Московском политехническом музее на торжественном заседании в честь юбилея его 40-летней деятельности. Свою речь Жуковский начал так: «Когда человек прошел уже большую часть своего жизненного пути, тогда перед его умственным взором невольно встает то, что составляло главное содержание его жизни. Для меня главный жизненный интерес сосредоточен на излюбленной мною науке – механике, поэтому я и назвал свою сегодняшнюю речь "Механика в Московском университете за последнее 50-летие"».

Н.Е. Жуковский окончил Московский университет в 1868 г. Мечтая о практической инженерной деятельности, он в том же году вместе со своим ближайшим товарищем М.А. Щукиным (впоследствии известным паровозостроителем) поступил на второй курс Института инженеров путей сообщения в Петербурге. Трудности учебы, материальная необеспеченность, нездоровье и, наконец, несдача экзамена по геодезии вынудили Жуковского отказаться от учебы в этом институте. Он возвратился в Москву и весной 1871 г. сдал магистерские экзамены по механике и математике в Московском университете. Это позволило ему получить место преподавателя в Императорском техническом училище, в котором он проработал 50 лет до конца своих

дней. После защиты магистерской диссертации (1879 г.) Жуковский возглавил здесь кафедру механики. В 1882 г. он защитил докторскую диссертацию, а в 1885 г. был утверждён приват-доцентом Московского университета по кафедре механики, которую занял после Ф.А. Слудского в 1886 г.

Научно-педагогическое наследие Н.Е. Жуковского огромно. Его представляют "Полное собрание сочинений" [1] в девяти томах и семи выпусках лекций и "Собрание сочинений" [2] в семи томах. Жизни и деятельности Жуковского посвящены биографии, написанные его племянницей Е.А. Домбровской [3] и его учеником, близким сотрудником Л.С. Лейбензоном [4], а также книги [5, 6] и более 50 юбилейных и тематических статей в различных изданиях, не считая многочисленных обзорных и историко-научных работ по механике, в том числе книги [7, 8]. Как отмечено в статье [9], деятельность Жуковского являет собой яркий пример роли выдающихся ученых и традиций, приоритета и преемственности в сложном историческом развитии научных идей.

Труды Жуковского составляют 152 публикации на 3150 с. (по [1] и [2, т. 7] для последних посмертных изданий), не считая курсов лекций в 15 отдельно изданных книгах на 3210 с., отзывов и персоналий современников. Известны также названия 338 докладов, прочитанных Жуковским на конференциях и заседаниях научных обществ [2, т. 7, с. 573–590]. К гидрогазодинамике можно отнести 80 публикаций (2090 с., 66%) и 214 докладов (63%).

Гидродинамика до конца XIX в. в основном была представлена аналитической школой Ж. Лагранжа и О. Коши. В отличие от механики деформируемого твердого тела, развитие гидродинамики шло в направлении получения и совершенствования общетеоретических результатов, почти не связанных с техническими приложениями и науками. Оставался открытым главный вопрос – о происхождении и получении сил взаимодействия жидкостей с телами. Парадокс Эйлера – Д'Аламбера об отсутствии силы взаимодействия тела при его установившемся движении с идеальной жидкостью ставил под сомнение практическую ценность этой модели, и теоретические работы, равно как и учебные курсы, имели вид чисто математических упражнений. Уравнения движения вязкой жидкости, за исключением очень частых случаев движения, не поддавались интегрированию, а струйная теория Г. Гельмгольца и Г. Кирхгофа, хотя и дала некоторое разрешение парадокса Эйлера–Д'Аламбера, оказалась несостоятельной для вычисления наблюдаемых сил взаимодействия и создала новый парадокс бесконечности кинетической энергии следа за телом, движущимся в жидкости.

Следуя Л. Пуансо в общей механике и Г. Гельмгольцу в гидродинамике, Жуковский широко использовал и развивал свойственные ему наглядные геометрические представления ("истолкования") как самостоятельный плодотворный метод исследования и обучения. Он применял и "высшую степень наглядности" – моделирование, осуществляя его не только в лабораторных приборах, но и на аналоговых физических и мысленных моделях, а также при математической постановке рассматриваемых задач. Жуковский с большим искусством упрощал схему явления до возможности получения простых и наглядных решений, неизменно предпочитая точные решения уравнений упрощенной модели рассматриваемого явления приближенным решениям более сложных "точных" уравнений движения. Его мало интересовали общетеоретические проблемы; решаемые им задачи в большей части вполне конкретны, они заимствованы из наблюдений или опытов, а их решения доведены до числовых примеров, экспериментальной проверки и технических приложений.

Главный научный результат Жуковского – открытая им теорема о связи подъемной силы с циркуляцией скорости. Окончательно разрешив парадокс Эйлера – Д'Аламбера, эта теорема ознаменовала подлинный переворот в развитии гидродинамики и поставила имя Жуковского в один ряд с именами ее основоположников. Теорема Жуковского и его многогранная деятельность совместно с ближайшим сотрудником и

преемником С.А. Чаплыгиным по созданию новой науки – аэродинамики обусловили современное развитие авиации. Кроме знаменитой теоремы Жуковскому принадлежат и другие первоклассные научные результаты, каждый из которых мог бы принести заслуженную славу его творцу.

Ниже приведен неизбежно краткий и, возможно, отчасти субъективный обзор основных работ Н.Е. Жуковского по гидрогазодинамике. Ссылки на эти работы даны, как правило, через "Полное собрание сочинений" [1] с указанием тома и иногда страниц. Цитаты приведены без выделения несущественных пропусков; угловыми скобками отмечены поправки и уточнения, курсив – автора статьи.

1. Общая гидродинамика идеальной жидкости. К общей гидродинамике относится первая печатная работа Н.Е. Жуковского – его магистерская диссертация "Кинематика жидкого тела", защищенная 13.10.1876 г. в Московском университете [1, т. 2].

"На меня особое впечатление, – говорит Жуковский в уже цитированной речи, – произвела последняя работа (докторская диссертация В.Я. Цингера). Стремление ученого дать детальный образ рассматриваемого движения, указать, как видоизменяется каждая частица движущейся жидкости, мне очень понравилось и, может быть, эта работа натолкнула меня на мое первое сочинение. Я с благодарностью вспоминаю теперь двух моих учителей (Ф.А. Слудского и В.Я. Цингера), из которых один разъяснил нам широкое значение аналитических методов, а другой указал силу геометрических толкований рассматриваемых явлений. Но несмотря на то, что Ф.А. Слудский был по характеру аналитиком, его главной задачей в научных исследованиях всегда являлось решение определенных задач механики. Мне кажется, что этот девиз – *решение определенных реальных задач механики* (курсив Жуковского) – явился руководящим для большинства учеников московской школы теоретической механики".

Приведенная цитата показывает истоки интереса Жуковского к задачам гидродинамики и его подход к их решению. Магистерская диссертация Жуковского – итог пяти лет интенсивной работы, в течение которых он ознакомился с современным ему состоянием вопроса и особенно с сочинениями В. Томсона (лорда Кельвина) и П. Тэта (Трактат по натуральной философии, 1-е изд., 1857), О. Коши (Математические упражнения, 1827–1841), Г. Гельмгольца (Об интегралах гидродинамических уравнений, 1858), Ж. Бертрана (Теорема, относящаяся к самому общему движению жидкости, 1868) и Г. Кирхгофа (Лекции по математической физике, 1874). Жуковский создал, как сказано им во Введении в диссертацию, "наглядный очерк теории скоростей непрерывно изменяемого тела" в общем случае пространственного вихревого движения сжимаемой жидкости, "предпочитая, где было возможно, геометрические соображения аналитическим и пользуясь криволинейными (естественными) координатами. Мы старались следовать, насколько умели, совету великого геометра (Л. Пуансо, 1852) – изучать вещи сами в себе".

Жуковский начинает с изучения движения в бесконечно малой частице, определяет эллипсоид ее деформации, вводит "конус постоянных направлений", исследует вид траекторий точек частицы в сопутствующей ей системе отсчета.

Затем Жуковский рассматривает линии тока; определяет, следуя Томсону, циркуляцию скорости (которую называет здесь "обтекание"); дает весьма полную классификацию особых точек течения; специально изучает основной для его последующих работ случай "течения жидкости без сжатия и вращения". Наконец, Жуковский формулирует общие теоремы об ускорениях в поле течения, исследует перманентные движения жидкости, обобщает теоремы А. Клебша (1858).

Особо следует отметить приводимые Жуковским уравнения безвихревого движения сжимаемой жидкости в естественных координатах в тонком слое переменной толщины

$$\frac{\delta \ln v}{\delta n} = K_v \equiv \frac{\delta \vartheta}{\delta s}, \quad \frac{\delta \ln(\rho v)}{\delta s} = -K_n \equiv -\frac{\delta \vartheta}{\delta n}$$

$$\frac{\delta K_s}{\delta n} - \frac{\delta K_n}{\delta s} = K_s^2 + K_n^2 + K_1 K_2$$

$$\frac{\delta K_s}{\delta s} + \frac{\delta K_n}{\delta n} = -\frac{\delta}{\delta n} \left(\frac{\delta \ln \rho}{\delta s} \right) + K_s \frac{\delta \ln \rho}{\delta s} = -\frac{\delta}{\delta s} \left(\frac{\delta \ln \rho}{\delta n} \right) - K_n \frac{\delta \ln \rho}{\delta n}$$

где $\delta/\delta s$ и $\delta/\delta n$ (обозначение Жуковского) – производные по дугам линий тока и ортогональных к ним линий на поверхности тока, K_s и K_n – кривизны этих линий, K_1 и K_2 – главные кривизны поверхности тока, v – скорость, ϑ – угол между касательной к линии тока и фиксированным направлением, ρ – в общем случае произведение плотности жидкости на толщину слоя.

Эти уравнения сам Жуковский никак не использует, однако позже они получили многочисленное применения: в эффективном методе Г. Флюгеля графоаналитического расчета течений в каналах (1914), в работах И.Н. Вознесенского и А.А. Саткевича [10], в теории турбомашин [11]. Известный метод "узких полос" М.А. Лаврентьева (1938) непосредственно следует из метода Флюгеля в применении к каналам малой кривизны [12].

Продолжая гидродинамические исследования, Жуковский публикует три статьи: "О движении жидкой площади по инерции" (1876), "Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости" (1884), "О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью" (1884), и свои знаменитые "Лекции по гидродинамике", написанные и прочитанные им в первом семестре 1886 г. в Московском университете [1, т. 2]. Эти лекции представляют собой весьма полный оригинальный курс гидродинамики, который можно сравнить только с курсом Г. Ламба (1-е изд. 1879). (Курс Ламба был известен Жуковскому по немецкому переводу.) В своих лекциях после изложения кинематики жидкости Жуковский выводит уравнения движения в формах Эйлера, Лагранжа и Ламба–Громека (последние без названия), рассматривает электрогидродинамическую аналогию, вводит для задач теории струй по Кирхгофу комплексные переменные, использует эллиптические координаты, приводит два примера (Кирхгофа и Томсона) функций тока плоскопараллельных вихревых движений с постоянной завихренностью

$$\psi = k(y^2 - x^2) - \frac{1}{2} \omega(x^2 + y^2), \quad \psi = k(3xy^2 - x^3) - \frac{1}{2} \omega(x^2 + y^2)$$

Многочисленные примеры вихревых течений, включая и трехмерные, Жуковский приводит также в упомянутой выше статье 1885 г.; в работе "О снежных заносах" (1911) он строит новое вихревое течение вокруг кругового цилиндра в присутствии свободного точечного вихря. Далее в Лекциях Жуковский упоминает винтовое течение И.С. Громека (1881), изучает движение тел в жидкости с учетом внешних и внутренних присоединенных масс и взаимодействие тел в жидкости, специально останавливаясь на случае пульсирующих шаров К. Бьеркенса (1876). (Последний случай он подробно разбирает в отдельной статье 1896 г.)

В лекции VII "Движение твердого тела в беспредельной массе несжимаемой жидкости" Жуковский рассматривает движение с многозначным потенциалом скоростей (при наличии циркуляций) и показывает, в частности, что вихревое кольцо может равномерно вращаться по инерции вокруг оси, лежащей в плоскости его экватора. Здесь Жуковский был очень близок к открытию своей знаменитой теоремы, для чего достаточно было рассмотреть движение не кольца, а вихревого цилиндра.

2. Теория струй идеальной жидкости. В лекциях по гидродинамике Жуковский обратил внимание на теорию струй Гельмгольца и Кирхгофа (1869), давшей первое разрешение парадокса Эйлера–Д'Аламбера. В 1890 г. он опубликовал фундаментальное исследование "Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока" [1, т. 3, с. 195–341].

До Жуковского было решено лишь несколько струйных задач (см., например, статью М.И. Гуревича в [7] и его монографию [13], а также обстоятельный обзор [14]). Жуковскому принадлежат два важных предложения: во-первых, использовать не скорость $\bar{v} = dw/dz$ или $\zeta = 1/\bar{v}$, а $\omega = \ln \bar{v} = \ln v - i\vartheta$, и, во-вторых, рассматривать аналитические функции $w(u)$ и $\omega(u)$ параметрического переменного u в верхней полуплоскости, $\text{Im} u \geq 0$. Функция $\omega(u)$ была введена также в одновременно опубликованной статье Дж. Мичелла и ее часто называют функцией Мичелла – Жуковского, хотя свой метод Жуковский доложил в Московском математическом обществе еще в 1887 г.

После задания или определения функций $w(u)$ и $\omega(u)$ (их ортогональные сети Жуковский называет соответственно "образующей" и "направляющей") комплексная координата плоскости течения

$$z = \int e^{-\omega} \frac{dw}{du} du$$

Жуковский исследовал обширный класс задач, для которых

$$w(u) = F(u) + \sum C_m \ln(u - u_m), \quad \omega(u) = \int (\Pi(u - u_n))^{-1/2} f(u) du$$

где C_m , u_m , u_n – действительные числа, функция $F(u)$ может иметь на действительной оси $\text{Im} u = 0$ нуль или полюс порядка не выше второго, а функция $f(u)$ – несколько полюсов первого порядка.

Жуковский решил своим методом 18 задач, из них 10 впервые. Несколько из них заслуживают специального упоминания. Жуковский впервые рассматривает струйные течения с конечными длинами свободных границ, на которых давление должно быть меньше, чем в бесконечности. Такая струйная схема в 1955 г. одновременно и независимо была использована А. Рошко и Р. Эпплером в качестве расчетной схемы реальных отрывных или кавитационных течений (эту схему теперь называют схемой Жуковского Рошко–Эпплера). Ряд течений Жуковский специально строит так, чтобы избежать появления бесконечных скоростей на выступающих угловых точках и на передней кромке ланой пластинки. Здесь же дано первое решение задачи теории решеток – задачи струйного обтекания решетки пластин для частного случая входа потока под прямым углом к фронту решетки. Полное решение этой задачи было опубликовано С.А. Чаплыгиным и А.П. Минаковым в 1930 г.

В статье "Определение движения жидкости при каком-либо условии, данном на линии тока" (1891) Жуковский впервые поставил и точно решил своим методом две ставшие классическими струйные задачи для тяжелой и для капиллярной жидкостей. В первой задаче безграничная тяжелая жидкость натекает сверху на пузырь с постоянным давлением, прикрывающий вход в канал с двумя прямыми вертикальными стенками (неустойчивость такого течения Жуковский не обсуждает). Во второй задаче жидкость, движущаяся в канале между двумя прямыми параллельными стенками, обтекает расположенный посередине канала овальный (вытянутый в направлении стенок) газовый пузырь, на границе которого учтено действие поверхностного натяжения. Решение второй задачи соответствует одновременно обтеканию бесконечной решетки тех же овалов.

Выдающееся значение этих двух работ Жуковского состоит не только в предложении нового метода и решении им многих новых задач теории струй. Содержащиеся в них идеи использования функции Жуковского $\omega = \ln \bar{v}$ и параметрического переменного u , выделения особенностей (в формулах для $w(u)$ и $\omega(u)$), введения функций вида $(\Pi(u - u_n))^{\pm 1/2}$, принимающих на оси $\text{Im} u = 0$ попеременно действительные и мнимые значения, положили начало многочисленным работам московской школы теории функции комплексного переменного в гидроаэродинамике [13, 15, 16]. Более того, при дополнении численными методами конформных отображений и (или) формулами Шварца–Гильберта метод Жуковского дает

возможность решать прямые задачи обтекания любых заданных контуров и обратные задачи построения высокоэффективных каналов, профилей и решеток турбомашин с заданными гидродинамически целесообразными распределениями скорости на их границах [11, 17].

3. Прикладная гидродинамика и гидравлика. "Я счастлив тем, – говорит Жуковский в своей юбилейной речи, – что начал свою деятельность в Техническом училище и что сотрудничество с технической практикой дает мне обильный материал для научных исследований. Я с удовольствием вспоминаю беседы с моими дорогими товарищами по Техническому училищу, в котором с 1870 г. протекает моя педагогическая деятельность. Они указывали мне на различные вопросы техники, требующие точного разрешения. От них научился я сближению научного исследования с наблюдаемой действительностью и умению пользоваться приближением. Я благодарен им за многие мои сочинения прикладного характера".

Прикладными задачами Жуковский начал заниматься с 1882 г. Темы исследований пришли от инженеров-преподавателей ИТУ. Многие из них были учениками Жуковского: конструктор А.П. Гавриленко, директор ИТУ; основатель Теплотехнического института В.И. Гриневецкий; Н.И. Мерцалов, работавший с Жуковским по приложениям гидромеханики к теории машин; крупный ученый в области гидромашиностроения И.И. Куколевский; строитель Московского водопровода Н.П. Зимин. Последний привлек Жуковского к экспериментальному исследованию давления в трубах Алексеевского водопровода, которое было завершено замечательной работой "О гидравлическом ударе в водопроводных трубах" (1899) [1, т. 7]. Жуковский изучил явление "удара" (скачка давления $\Delta p = p_2 - p_1$) в одномерном акустическом приближении и получил формулу

$$\Delta p = \rho \lambda (v_1 - v_2)$$

в которой ρ – плотность жидкости, $v_1 - v_2$ – потерянная при ударе скорость, λ – скорость распространения ударной волны, приблизительно равная скорости звука, выражаемой формулой Д. Кортвега (1878) с учетом сжимаемости воды и упругости трубопровода. В результате исследования Жуковский полностью объяснил полученные экспериментальные данные, в частности колебания давления из-за отражения волн от закрытого и открытого концов трубы, от участков изменения ее сечения и от воздушных объемов; рекомендовал безопасную скорость закрытия кранов и методику определения по индикаторным диаграммам мест утечки или скопления воздуха в трубах.

Эта работа Жуковского была опубликована в Петербурге на немецком языке, затем в США и во Франции и получила всемирное признание. Помимо триумфального технического значения она наряду с теневыми фотографиями пули Э.Маха (1887, 1890) доказала факт реального существования сильных разрывов (скачков) в сжимаемых жидкостях, который ранее подвергался сомнениям. По "водопроводной" тематике Жуковским опубликовано еще несколько менее значительных работ [1, т. 7].

Под влиянием работ Н.П. Петрова (1883) [18] Жуковский начал гидродинамическое исследование подшипников. Основным недостатком теории Петрова была принятая им концентричность шипа и подшипника, что не позволяло определить поперечную нагрузку. В работах 1886 и 1887 гг. [1, т. 4] Жуковский исправляет этот недостаток. Во второй из них, пользуясь биполярными координатами и комплексными переменными, он находит в приближении Стокса решение для плоскопараллельного движения вязкой жидкости между эксцентричными цилиндрами, однако лишь при некотором частном соотношении между угловыми скоростями их вращения и нагрузкой.

О. Рейнольдс в 1886 г. и А. Зоммерфельд в 1904 г. нашли полное решение этой задачи для тонкого смазочного слоя. В 1904 г. Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин в совместной работе дали точное решение уравнений Стокса для подшипников с

любыми зазорами и эксцентриситетами. Это удалось сделать благодаря представлению общего решения бигармонического уравнения, которому удовлетворяет функция тока, через две произвольные аналитические функции. Такое представление было указано Е. Гурса в 1893 г. и независимо С.А. Чаплыгиным приблизительно в 1900 г. в неопубликованной тогда его работе о плоской задаче теории упругости.

К гидродинамике вязкой жидкости можно отнести также работы Жуковского по теории фильтрации, опубликованные в 1899, 1890, 1906 и 1923 гг. [1, т. 7]. Они содержат вывод исходных уравнений и первые решения нескольких конкретных задач. В работе 1923 г. была введена функция Жуковского, в обозначениях П.Я. Кочиной [19]

$$\theta = \omega - ikz, \quad \omega = \varphi + i\psi$$

$$\varphi = -k \left(\frac{p}{g\rho} + y \right), \quad \bar{v} = v_x - iv_y = \frac{d\omega}{dz}, \quad z = x + iy$$

где ω – комплексный потенциал течения, $k \approx \text{const}$ – коэффициент фильтрации в законе А. Дарси, ось y вертикальна, g – ускорение силы тяжести. Ввиду того, что на свободной поверхности ($p = \text{const}$) действительная часть $\text{Re}\theta = \text{const}$, соответствующие задачи теории фильтрации сводятся к краевым задачам для аналитических функций θ , ω , \bar{v} комплексной координаты z , аналогичным задачам теории струй. Эти работы Жуковского положили начало отечественной школе теории фильтрации (Н. Н. Павловский, Л.С. Лейбензон, С.Н. Нумеров, П.Я. Полубаринова-Кочина, В.Н. Щелкачев и др.).

В важной работе "О движении воды на повороте реки" (1914) Жуковский, ссылаясь на давнюю статью по этому вопросу Ж. Буссинеска (1868) и новые эксперименты, развивает теорию так называемых вторичных течений и указывает на два их источника: поворот вихревых нитей и появление под действием градиента давления поперечного движения вязкой жидкости. Это исследование было продолжено и дополнено П.А. Вальтером в примечаниях к работам Жуковского [1, т. 4] и получило новое звучание в теории турбомашин [11].

В начале нашего века стала развиваться теория пограничного слоя, уравнения которого были установлены в 1904 г. Л. Прандтлем. Однако ни Н.Е. Жуковский, ни С.А. Чаплыгин не заинтересовались этой теорией. Ранее в статье "О форме судов" (1890) Жуковский учел связь формы тела с сопротивлением трения, а в лекциях по воздухоплаванию (1911) дал качественную оценку роли пограничного слоя. В 1914 г. Жуковский завершает вывод уравнений движения вязкой жидкости очень важным заключением о практической ценности модели потенциального движения [1, т. 4, с. 189]: "При существовании потенциала скоростей вязкость не оказывает влияния на движение внутри жидкости. Влияние вязкости может проявляться только при стенках сосуда или обтекаемого тела, где зарождаются вихри. При рассмотрении движущегося в жидкости тела следует найти функцию потенциала скоростей, при которой это тело оказалось бы обтекаемым, и по ней определять скорости около тела. Вихри же, располагаясь сравнительно тонким слоем около тела (особенно при больших скоростях), сбегают с его кормы в виде цепочки из вихревых шнуров или колец. Это и развивает поверхностную силу трения (силу сопротивления), которую в практике считают пропорциональной квадрату скорости и площади".

Это заключение справедливо в случае безотрывно обтекаемых границ потока при больших числах Рейнольдса; с современной точки зрения в нем не хватает лишь рекомендации расчета пограничного слоя для проверки отсутствия отрыва и расчета силы сопротивления.

4. Теорема Жуковского. Начало аэродинамического эксперимента. В первой публикации по аэродинамике "К теории летания" (1890) Жуковский рассматривает "старинный вопрос о точке опоры" и отмечает как достаточные два способа получения

силы тяги: образование вихревых поверхностей разрыва скорости и использование сил трения. Говоря о поверхностях разрыва, Жуковский имел в виду изученную им ранее теорию струйных течений жидкости по Гельмгольцу и Кирхгофу. Жуковский приводит формулу Рейли (1876)

$$R = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} S \rho v_{\infty}^2$$

для силы R нормального давления плоскопараллельного потока идеальной жидкости плотности ρ на пластинку площади S , обтекаемую по схеме Кирхгофа под углом атаки α , и производит расчет тяги и мощности вертолетного винта, состоящего из двух таких пластинок. В последующих статьях и в лекциях Жуковский отмечает, что формула Рейли дает существенно заниженную подъемную силу.

Переходя к использованию сил трения, он рассматривает обтекание шара с подвижной поверхностью, имеющей в каждой точке скорость потенциального течения $v = \frac{3}{2} v_{\infty} \sin \theta$. Такое течение удовлетворяет уравнениям Навье–Стокса, причем все силы, действующие на поверхность шара, уравниваются, и он не испытывает, как и в идеальной жидкости, никакого сопротивления. Однако для движения поверхности надо затрачивать мощность $N = 12\pi \mu a v_{\infty}^2$, где a – радиус шара, μ – коэффициент вязкости. При уменьшении v_{∞} или при увеличении скорости поверхности возникает сила тяги.

Для приближенной реализации этой идеи Жуковский сделал новый летательный прибор с двумя крылатками, вращающимися на параллельных осях в противоположные стороны. Прибор не летал, но обнаруживал заметное уменьшение веса. Отвлекаясь от действия сил трения, Жуковский схематизирует крылатки прибора двумя вихревыми нитями с циркуляциями Γ и $-\Gamma$, которые в неподвижной идеальной жидкости должны двигаться со скоростью $\Gamma/(2\pi l)$ (l – расстояние между нитями). В этом нельзя не видеть первую, пока только кинематическую реализацию Жуковским его знаменитых "присоединенных" вихрей.

Еще один способ создания тяги – применение гидрореактивных двигателей – Жуковский подробно рассмотрел ранее в статьях 1882 и 1886 гг. и затем в статье 1908 г. Тяга таких движителей выражается формулой Д. Бернулли $R = (u - v_{\infty})G$, в которой v_{∞} – скорость движения тела в неподвижной жидкости, u – относительная скорость выброса жидкости из движителя, G – ее массовый расход. Жуковский несомненно владел идеей и воздушно-реактивного двигателя, тяга которого

$$R = (u - v_{\infty})G + uG_f$$

где G_f – массовый расход топлива. По свидетельству Л.С. Лейбензона [4, с. 5 и 137], Жуковский в 1903–1905 гг. изобрел и устроил модель "воздушного термического реактивного двигателя", работающего на спирте. Два таких двигателя были установлены на концах лопастей винта. Опыты оказались неудачными, и к этой бесспорно выдающейся идее Жуковский больше не возвращался, применяя формулу Бернулли лишь для расчета тяги винта (1907).

Все возрастающий интерес Жуковского в период 1890–1905 гг. к проблемам полета отражают 9 статей и 40 докладов, в которых он, в частности, рассматривает полет птиц и открывает возможность "мертвой петли" (1891), демонстрирует фотографии Э. Маха летящей пули (1891), рассказывает про появляющиеся летательные приборы и аппараты, эксперименты и полеты О. Лилиенталя, многовинтовые вертолеты. Жуковский на X съезде естествоиспытателей и врачей (1898) произнес фразу, ставшую крылатой: "Он (человек) полетит, опираясь не на силу своих мускулов, а на силу своего разума".

В знаменитой статье 1906 г. "О присоединенных вихрях", доложенной в 1905 г. в Московском математическом обществе, Жуковский путем применения теоремы о

количестве движения к бесконечно удаленному от профиля контуру выводит свою формулу для подъемной силы

$$Y = -\rho v_{\infty} \Gamma$$

где Γ – циркуляция скорости при положительном обходе вокруг непрерывно и стационарно обтекаемого цилиндрического тела или группы тел в плоскопараллельном потенциальном потоке, движущемся в бесконечности со скоростью v_{∞} вдоль оси x . Жуковский называет Γ циркуляцией присоединенных к телу вихрей (в отличие от свободных вихрей, которых, по условиям теоремы, в потоке нет). В качестве примера Жуковский предлагает вихревую схему отрывного поперечного обтекания пластинки с двумя симметрично расположенными за ней неподвижными точечными вихрями и со сходом линий тока, охватывающих отрывную область, с кромок пластинки, что необходимо для получения конечной скорости на кромках. Жуковский условно присоединяет вихри к пластинке и вычисляет силу X ее сопротивления, которая должна уравновешивать силы, действующие на точечные вихри. Аналогичная схема обтекания кругового цилиндра позже была предложена Л. Фепплом (1913), причем вихри в схеме Феппла свободны и соответственно $X = 0$.

В частных случаях сила Жуковского была вычислена Рейли (1878) для циркуляционного обтекания кругового цилиндра и В. Кутта (1902) для плавно обтекаемой дужки окружности (с конечными скоростями на кромках), однако лишь Жуковский первый опубликовал выражение подъемной силы в общем виде для любого тела или системы тел и его приоритет в этом бесспорен.

В следующей работе "О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси" (1906), Жуковский повторил вывод своей формулы с учетом не только присоединенных вихрей с общей циркуляцией Γ , но и источников с общим расходом Q . Хотя далее Жуковский полагает $Q = 0$ и возвращается к формуле $Y = -\rho v_{\infty} \Gamma$, из выражения (7) этой статьи [1, т. 5, с. 105] одновременно следует $X = -\rho v_{\infty} Q$, и именно обе эти формулы следует называть формулами или теоремой Жуковского.

Современный вывод теоремы Жуковского производят с использованием первой формулы Чаплыгина – Блазиуса (1910), согласно которой комплексная сила $\bar{R} = X - iY$, действующая на любой контур L в стационарном потенциальном потоке, имеет выражение

$$\bar{R} = \frac{1}{2} i \rho \oint_L \bar{v}^2 dz \quad (4.1)$$

Комплексная скорость \bar{v} как аналитическая и ограниченная в бесконечности функция комплексной координаты z в окрестности бесконечно удаленной точки имеет представление

$$\bar{v}(z) = C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots \quad (4.2)$$

$$C_0 = \bar{v}(\infty) = v_{\infty}, \quad C_{-1} = \text{Res}_{z=\infty} \bar{v}(z) = (\Gamma + iQ) / (2\pi i)$$

В результате подстановки (4.2) в (4.1) получается теорема Жуковского в комплексной форме

$$X - iY = i\rho v_{\infty} (\Gamma + iQ) = -\rho v_{\infty} Q + i\rho v_{\infty} \Gamma$$

Аналогично вторая формула Чаплыгина – Блазиуса дает выражение момента силы R относительно точки $z = 0$, включающее еще коэффициент C_{-2} . Таким образом, три первых коэффициента ряда (4.2) полностью определяют главный вектор и главный момент сил давления жидкости на заданный контур (профиль). Два профиля, имеющие одинаковые коэффициенты C_0, C_{-1}, C_{-2} ряда (4.2), называют эквивалентными. Более

того, им может быть эквивалентен просто вихреисточник, помещенный в определенную точку $z = a$, для которого при $z \rightarrow \infty$

$$\bar{v} = v_{\infty} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \frac{1}{z - a} = v_{\infty} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \dots \right)$$

Сравнивая последнее разложение с рядом (4.2), находим

$$a = 2\pi i C_{-2} / (\Gamma + iQ)$$

Асимптотически, в масштабе бесконечно удаленного контура, любой заданный профиль эквивалентен в общем случае вихреисточнику интенсивности $\Gamma + iQ$ в точке $z = a$. Это и есть присоединенный, по Жуковскому, вихреисточник (или вихрь при $Q = 0$). Надо сказать, что отсутствие математического обоснования присоединенных вихрей вызвало критическое отношение к ним Чаплыгина, который говорил, что теорема Жуковского справедлива независимо от того, есть ли эти "воображаемые" вихри или их нет [20, т. 2, с. 145 и 184].

Теорема Жуковского справедлива также и для стационарного баротропного ($\rho = \rho(p)$) движения газа вне любых тел или профилей. Это легко показать, рассматривая более общий случай обтекания газом решетки одинаковых профилей и устремляя их период к бесконечности [16, 11].

В 1906–1909 гг. Жуковский публикует кроме упомянутых еще 9 статей и делает 15 докладов по аэродинамике. В декабре 1907 г. он прочитал блистательный, по оценке современников, доклад "О работах Д.И. Менделеева по сопротивлению жидкостей и воздухоплаванию". В докладе Жуковский соглашается с Менделеевым [26] в том, что "для полной победы над воздухом" настоятельно необходимы экспериментальные исследования: "Мы не можем без опыта сделать выбора между различными теоретически возможными течениями. Только прямой и твердый опыт укажет теоретику, с какой задачей гидродинамики он имеет дело и в каком смысле должен он рассматривать явление" [1, т. 9, с. 418].

Объединив в себе, по словам Чаплыгина, "и высшие математические знания и инженерные науки", Жуковский вообще и в вопросах авиации в особенности отдавал приоритет наблюдениям над реальными явлениями и постановке опытов. В 1902 г. он построил в Московском университете первую в России аэродинамическую трубу закрытого типа, в 1910 г. создал лабораторию в Техническом училище, в 1902–1904 гг. построил (на средства Д.П. Рябушинского, см. [3, 4, 22]) первый в Европе Аэродинамический институт в Кучино и, наконец, в 1918 г. организовал и возглавил Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ).

Почти все работы Жуковского по аэродинамике начинаются с упоминания опытных фактов, которые затем подвергаются теоретическому исследованию и заканчиваются сравнением результатов теории с опытом. На 10-летнем юбилее ЦАГИ Чаплыгин подчеркивает: "Введение в механику в широком размере опытного экспериментального метода – одна из крупных заслуг Н.Е. Жуковского. В области аэродинамики такой характер исследований оказался особенно нужным....".

5. Условие Жуковского – Чаплыгина. К теории крыла теорема Жуковского была приложена не сразу; не было ясно, как определять величину циркуляции скорости, входящую в теорему. В 1910 г. были опубликованы две статьи Чаплыгина и, немного позже, статья Жуковского, в которых различными способами были построены картины течения вокруг теоретических крыловых профилей с одной острой кромкой и конечной скоростью на ней, что и определяло величину циркуляции. Сами авторы – Чаплыгин и Жуковский – считали условие конечной скорости на выступающих в поток острых углах обтекаемых тел вполне естественным и никогда не придавали ему какого-либо особого значения или названия. Однако ввиду использования в научной, учебной и справочной литературе самых разных названий этого условия, возникший не только терминологический, но и приоритетный вопрос требует внимательного рассмотрения.

В биографическом очерке о Н.Е. Жуковском, написанном в 1935 г. В.В. Голубевым с использованием материалов В.П. Ветчинкина, сказано, что это условие было установлено Жуковским и Чаплыгиным "приблизительно одновременно", и что "в иностранной литературе это положение обычно называется основной гипотезой Жуковского" [1, т. 1, с. 36].

В большинстве работ условие конечной скорости на острых кромках обтекаемых тел называют условием Жуковского или Жуковского – Чаплыгина; в то же время многие авторы, следуя Голубеву [23], применяют название "гипотеза Чаплыгина" и связывают ее с влиянием вязкости.

В действительности условие конечной скорости связано не с влиянием вязкости, которой в модели идеальной жидкости нет, а лишь с очевидным физическим ограничением – неспособностью жидкости выдерживать большие растягивающие напряжения. (К сожалению, высказывания о связи этого условия с вязкостью устойчиво сохраняются; см., например, [24, 25].)

На необходимость ограничения скорости жидкости при обтекании тел первым обратил внимание Гельмгольц в 1868 г. (имеется русский перевод этой работы под редакцией и с примечаниями Чаплыгина [26]). Именно в связи с этим Гельмгольц предложил свою схему течения идеальной жидкости с образованием вихревых поверхностей разрыва, обеспечивающих конечные величины скорости на острых кромках. При безотрывном обтекании контуров с выступающим углом параметры течения и, в частности, циркуляцию скорости обычно можно подобрать так, чтобы вершина угла была точкой входа или схода линии тока. Насколько известно, первый это понял и осуществил Жуковский в уже упомянутом исследовании по теории струй (1890) и в статье "К вопросу о разрезании вихревых шнуров" (1894) при решении модельной задачи о движении свободного вихря в потоке, обтекающем бесконечный клин. Кроме этой статьи Жуковский до 1910 г. несколько раз изображает и использует обсуждаемое условие, хотя, действительно, не сразу применяет его к обтеканию крыловых профилей.

Ввиду всего сказанного условие конечной скорости на выступающих в поток острых углах справедливо называть гипотезой или условием Жуковского, как это делают многие авторы и как написано в редакционной статье журнала "Прикладная математика и механика" к 100-летию со дня его рождения [1, т. 11, с. 7]. Для профиля крыла это условие, следуя Л.С. Лейбензону, Л.Г. Лойцянскому, Н.Я. Фабриканту и др., можно и нужно называть условием Жуковского – Чаплыгина.

Как было понято позже (впервые, по-видимому, Прандтлем), появление циркуляции в строго невязкой жидкости объясняется образованием на острых кромках в начале движения вихревых поверхностей, обеспечивающих выполнение условия Жуковского – Чаплыгина. Задачу расчета таких течений Прандтль справедливо называл трансцендентно трудной. В некоторых простых случаях, например при малых колебаниях тонких профилей, она была решена в линейной постановке [15, 16] и затем – численно по методу дискретных вихрей [27]. К профилям со скругленной выходной кромкой условие Жуковского – Чаплыгина, строго говоря, неприменимо, и в рамках модели идеальной жидкости однозначное решение получить нельзя.

Для вязкой жидкости физический эксперимент и расчеты даже безотрывного обтекания тонких слабоизогнутых профилей показывают, что при сколь угодно больших числах Рейнольдса полного перехода к обтеканию идеальной жидкостью быть не может (хотя оно оказывается на практике весьма хорошим приближением). В случае отрывного обтекания реальных профилей с толстыми выходными кромками при больших углах атаки и числах Рейнольдса численное интегрирование с гарантированной точностью уравнений Навье – Стокса ограничено возможностями самых современных компьютеров, а уравнений Рейнольдса – применяемыми приближенными моделями турбулентности. Практически удовлетворительные результаты дают асимптотические и полумпирические методы расчета квазистационарных схем отрывных течений, учитывающие так называемое сильное взаимодействие пограничного слоя на по-

верхности тела, отрывных областей и следа за ним с внешним потенциальным потоком, который, однако, существенно отличается от безотрывного течения идеальной жидкости.

6. Теоретические крыловые профили. В 1910–1912 гг. Жуковский выступает с 22 докладами и публикует 10 статей по различным вопросам аэродинамики и авиации. В их числе – подробное описание аэродинамических лабораторий в Университете и Техническом училище со схемами, фотографиями и некоторыми результатами экспериментов. С энтузиазмом Жуковский готовит и читает в Техническом училище фундаментальный курс "Теоретические основы воздухоплавания", который был сразу же издан литографским способом его слушателями. Курс был переведен на французский язык и дважды издан в Париже (1916, 1931). В этом курсе, как сказано в предисловии, автор старался "связать богатый опытный материал, накопленный аэродинамическими лабораториями, с теоретическими исследованиями рассматриваемых задач с помощью уравнений гидродинамики и теории вязкости жидкости".

Выдающимся событием в развитии теории крылового профиля стала публикация цикла четырех близких по содержанию статей Жуковского: "О контурах поддерживающих поверхностей аэропланов" (обзор всего цикла, издано в Берлине 1910 (ч. 1) и 1912 (ч. 2)); "Геометрические исследования о течении Кутта" (издано на немецком языке в Москве 1911 (ч. 1) и 1912 (ч. 2)); "Определение давления плоскопараллельного потока жидкости на контур, который в пределе переходит в отрезок прямой" (1911); "О поддерживающих планах типа Антуанетт" (1911).

Со свойственной ему щепетильностью Жуковский ссылается на все известные тематически близкие работы: книгу "Аэродинамика" Ф. Ланчестера (1907, 2-е изд., 1909); доклад и статью С.А. Чаплыгина (1910); статьи В. Кутта (1902, 1910 и 1911); обзор учителя Кутты С. Финстервальдера (1910), и даже пишет, что "эта теорема ($\gamma = -\rho v_\infty \Gamma$) в несколько другой форме была получена в 1902 г. профессором Кутта в его *ненапечатанной* диссертации...". На основании этого высказывания в зарубежной литературе теореме Жуковского иногда называют теоремой Кутта – Жуковского, для чего, как уже было сказано, нет достаточных оснований.

Главное в рассматриваемом цикле работ Жуковского – предложение изящного геометрического приема построения теоретических крыловых профилей путем скругления "базиса", сначала дужки окружности, затем круговой луночки (профиля Антуанетт или Раго). Жуковский получает гладкие каплевидные профили с одной бесконечно тонкой выходной кромкой, существенно используя происходящее от эллиптических координат конформное преобразование полярных координат r, θ из плоскости вспомогательного переменного $\zeta = \vartheta + i\theta = \ln(r/a) + i\theta$ в прямоугольные координаты двулистной плоскости $z = x + iy$ со сшивкой листов по разрезам $x \in (-a, a), y = 0$, которое записывает в уже давно известном ему виде

$$z = a \operatorname{ch} \ln \left(\frac{\zeta}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right)$$

Это преобразование в данном контексте обычно называют преобразованием Жуковского. Однако соответствующие "профили Жуковского", получаемые скруглением одной кромки базовой дужки окружности, в том же 1910 г. уже были построены Чаплыгиным как инверсии квадратных парабол, что отмечает сам Жуковский [1, т. 5, с. 297–301]; справедливо называть эти профили профилями Чаплыгина – Жуковского.

Для получения круговых луночек и их скругления Жуковский использует биполярные координаты, дробно-линейное и степенное преобразования. Позже аналогичные профили с угловой выходной кромкой были указаны Т. Карманом и Е. Треффцем (1918). Очевидно, что такие профили следует называть профилями Жуковского. (Профили с угловой кромкой иначе можно строить путем инверсии гипербол.) Жуковский дал полную теорию построенных им профилей, определил их подъемную силу и главный момент. В частности, оказалось, что равнодействующая сила прямого профи-

замечательно четкому описанию своей схемы, опирается только на законы сохранения вихрей в идеальной жидкости.

В первой статье, оказавшейся программной, Жуковский находит условия стационарности вихревых нитей на поверхности кругового цилиндра; вычисляет скорости в осредненном осесимметричном потоке, заменяя винт вихревым диском ("доньшком"); рассматривает подбор лопастей винта для образования заданной циркуляции; определяет силу тяги и мощность винта. В следующих статьях он изучает связь между осевой и окружной слагающими скоростей в осесимметричном потоке при различных законах закрутки лопастей и, в частности, указывает как наиболее выгодный закон $v_z = \text{const}$, когда $\Gamma = \text{const}$, $v_\theta = C/r$ (винты типа "НЕЖ"); распространяет свою формулу о подъемной силе на поток через решетку

$$R = \rho v_\infty \Gamma, \quad R \perp v_\infty = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

где v_1 и v_2 – векторы скорости в потоке перед решеткой и за ней. Ссылаясь на работы своего ученика и сотрудника В.П. Ветчинкина, Жуковский учитывает сжатие струи за винтом и сход вихрей с выходных кромок лопастей при $\Gamma = \Gamma(r)$; дает новое весьма простое решение задачи о безотрывном обтекании решетки пластин (которую другим способом решили немного ранее Чаплыгин и Кутта); приводит результаты испытаний винтов и вентиляторов в лаборатории Технического училища.

Все четыре статьи Жуковского были переведены и опубликованы в Париже (1929) с предисловием В.С. Маргулиса, примечаниями и обширными дополнениями В.П. Ветчинкина.

Помимо непосредственного отношения к теории винта в этих статьях Жуковского можно видеть почти все идеи современной теории турбомашин, причем он вместе с Чаплыгиным обладает несомненным приоритетом в решении первых задач теории гидродинамических решеток [7, 28].

Вторым направлением последних работ Жуковского оказалась газовая динамика.

В последние годы жизни в качестве консультанта (вместе с Чаплыгиным) Комиссии особых артиллерийских опытов Жуковский занялся задачами газовой динамики. Здесь уместно вспомнить написанную им без его влияния знаменитую докторскую диссертацию Чаплыгина "О газовых струях" (1902, [20, т. 2]). В ней Чаплыгин использовал линейные в плоскости годографа скорости уравнения газовой динамики и дал новый метод точного аналитического (в форме рядов) решения дозвуковых задач. Эта замечательная работа намного опередила свое время и не получила продолжения ни у ее автора, ни у Жуковского, которые ссылались на нее лишь для обоснования возможности применять модель несжимаемой жидкости при малых дозвуковых скоростях. В двух докладах 1919 г. и четырех статьях, опубликованных в 1920, 1922 и 1925 гг. [1, т. 4 и 7], Жуковский возвращается к своим докладам 1914–1917 гг. и подробно рассматривает неустановившиеся движения тяжелой жидкости в открытом канале и газа в трубе. Эти работы вместе с теорией гидравлического удара положили начало одномерной газовой динамике и газогидравлической аналогии. Последняя позволяет перенести результаты исследований движения тел в тяжелой жидкости малой глубины (доклады Жуковского 1903 г., опубликованные в 1907 г. и, в обработке А.П. Котельникова, в 1937 г. [1, т. 4]) на плоскопараллельное обтекание тех же тел газом при показателе адиабаты $\gamma = 2$. По мнению Ф.И. Франкля [29], Жуковский владел аппаратом, достаточным для вывода формул линейной теории сверхзвукового обтекания тел. Еще в 1898 г. Жуковский в работе "О крылатых пропеллерах" оценил в нестационарной одномерной модели силу R давления воздуха ("воздушной волны") на пластинку формулой $R = 2\rho c u S$, в которой ρ – плотность воздуха, c – скорость звука, u – нормальная к пластинке площади S слагающая скорости крыла. Если ввести угол атаки α ($u = v_\infty \sin \alpha$) и определить по этой формуле коэффициент подъемной силы

$$C_y = \frac{2R}{\rho S v_\infty^2} = 4 \frac{\sin \alpha}{M}, \quad M = \frac{v_\infty}{c}$$

то видно, что формула Жуковского при $M \gg 1$ и $\alpha \ll 1$ совпадает с формулой Я. Аккерета (1924)

$$C_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Отношение v_∞/c как критерий подобия для потоков газа Жуковский ввел в лекциях 1914 г., упоминая в связи с ним опыты Л. Берстоу и Г. Буса (1910).

Фундаментальные труды Н.Е. Жуковского и особенно его труды по общей и прикладной гидрогазодинамике и авиации создали ему всемирную известность.

"Когда человек прошел уже большую часть своего жизненного пути, – сказал Жуковский в конце своей юбилейной речи, – он с грустью задает себе вопрос: суждено ли ему увидеть те манящие горизонты, которые расстилаются там впереди? Утешением ему является то, что там впереди идут молодые, сильные, что старость и юность сливаются в непрерывной работе для познания истины..."

Там, впереди, предстояли работы учеников и последователей: по теориям биплана и триплана, механизированных крыльев, неустановившимся течениям жидкости и газа, пограничного слоя и отрывных течений; расчеты движения газа при до-, транс- и сверхзвуковых скоростях, работы по гидрогазодинамике компрессоров, турбин, газотурбинных и ракетных двигателей и многие, многие другие, которые обеспечили прогресс в механике жидкости и газа, авиации и космонавтики в нашей стране.

Классические труды Н.Е. Жуковского ушли в историю. Однако знакомство с ними, соприкосновение с мыслью и образом замечательного Ученого и Учителя всегда было и будет неиссякаемым источником идей и вдохновения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. Полное собрание сочинений. В 9-ти томах и 7-ми выпусках лекций. М.-Л.: ОНТИ НКТП, Глав. ред. авиац. лит-ры, 1935–1939.
2. Жуковский Н.Е. Собрание сочинений / В 7-ми томах. М.; Л.: Гостехиздат, 1948–1950.
3. Домбровская Е.А. Николай Егорович Жуковский. 1847–1921. М.-Л.: Оборонгиз, 1939. 247 с.
4. Лейбензон Л.С. Николай Егорович Жуковский. К столетию со дня рождения. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 183 с.
5. Космодемьянский А.А. Николай Егорович Жуковский, 1847–1921. М.: Наука, 1984. 192 с.
6. Арлазоров М.С. Жуковский. М.: Машиностроение, 1964. 218 с.
7. Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 880 с.
8. История механики. С конца XVIII века до середины XX века. М.: Наука, 1972. 414 с.
9. Михайлов Г.К. Современное состояние и задачи истории механики // Современные проблемы теоретической и прикладной механики. Киев, Наук. думка, 1978. С. 168–185.
10. Саткевич А.А. Гидравлические турбины. М.-Л.: Госиздат, 1929. 526 с.
11. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
12. Степанов Г.Ю. Комплексная кривизна в гидродинамике плоскопараллельных движений идеальной жидкости // Теория функций и ее приложения. Казань: Изд-во Казанский фонд "Математика", 1995. С. 61–66.
13. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
14. Ермолаева Н.С. О работах Д.К. Бобылева и И.В. Мещерского по гидродинамической теории струй // Исследования по истории физики и механики. М.: Наука, 1988. С. 201–217.
15. Келдыш М.В., Седов Л.И. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике. М.: Наука, 1964. 46 с.
16. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980, 448 с.

17. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
18. Гидродинамическая теория смазки. Избр. работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 551 с.
19. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.
20. *Чаплыгин С.А.* Полное собрание сочинений. В 3 томах. Л.: Изд-во АН СССР, 1933–1935.
21. *Менделеев Д.И.* О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании. СПб.; 1880. 80 с.
22. *Михайлов Г.К.* Основатель аэродинамического института // Вестн. АН СССР. 1991. № 11. С. 81–91.
23. *Голубев В.В.* Сергей Алексеевич Чаплыгин. М.: Изд-во Бюро новой техники ЦАГИ. 1947. 120 с.
24. *Степанов Г.Ю.* О некоторых неточностях в разъяснениях теории крыла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 3. С. 188–190.
25. *Степанов Г.Ю.* О комментариях к избранным трудам С.А. Чаплыгина // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 4. С. 180–183.
26. *Гельмгольц Г.* Два исследования по гидродинамике. М.: Паллас, Типография Сомовой. 1902. 108 с.
27. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
28. Теория гидродинамических решеток в работах Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина и ее последующее развитие (К 125-летию со дня рождения Н.Е. Жуковского) // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 3–8.
29. *Франкль Ф.И.* О работах Н.Е. Жуковского, связанных с проблемой волнового сопротивления тел в газах при сверхзвуковых скоростях // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естествозн. 1951. № 3. Вып. 2. С. 25–28.