

УДК 532.516:519.63

© 1997 г. А.В. КОРОЛЬКОВ

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТЬ – ГАЗ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ФАКТОРОВ

Представлена математическая модель, описывающая поведение системы двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей, основанная на сглаживании параметров, характеризующих физические свойства контактирующих сред, сформулирована двумерная задача с учетом теплового взаимодействия жидкостей, поверхностных капиллярных и термокапиллярных сил в области контакта жидкостей, приведены количественные сравнения с результатами, полученными другими методами. Возможности алгоритма проиллюстрированы решением задачи о сложном взаимодействии капиллярных и термокапиллярных сил при слиянии двух капель жидкости, погруженных в другую жидкость.

Существующие в настоящее время методы сквозного счета, применяемые для решения задач о движении двухжидкостных систем, обладают двумя недостатками – расширением области контакта за счет схемной вязкости и возникновением паразитных возмущений в области контакта. Последний проявляет себя в момент уменьшения интенсивности основного течения, например в задаче о колебании поверхности жидкости. В этих случаях возможно возникновение вычислительной неустойчивости. Представленная математическая модель обладает механизмом, подавляющим паразитные возмущения в области контакта, а алгоритм сквозного счета сохраняет начальную толщину области контакта. В основу метода положена механическая модель, в которой поверхность контакта жидкостей представляется как тонкая пленка, движущаяся вместе с жидкостями.

Прототипами разработанного метода могут служить методики решения сопряженных задач [1, 2], методика использования сквозного счета в системе жидкость – твердое тело при расчете процессов кристаллизации [3], метод сквозного счета для задач определения квазиравновесной формы поверхности раздела сред в высокочастотном вибрационном поле [4, 5], VOF-метод описания положения поверхности жидкости (этот подход использован, например, в [6, 7]), и метод "крупных частиц" [8].

**1. Сопряженная формулировка задачи и формулировка задачи с непрерывными параметрами.** Рассмотрим емкость, заполненную двумя несмешивающимися несжимаемыми жидкостями. Движение обеих жидкостей под воздействием объемных сил (объемные силы могут зависеть от температуры) описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{a} - \frac{1}{\rho_i} \nabla p + \nu_i \nabla^2 \mathbf{V}, \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T = \kappa_i \nabla^2 T \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{a}$  – вектор, задающий объемные силы,  $i = 1$  соответствует более плотной жидкости. В начальный момент задано взаимное расположение жидкостей, распределение скоростей и температур. На стенках емкости заданы условия прилипания и распределение температур.

В соответствии с результатами работы [9] условия сопряжения контактирующих подвижных сред при отсутствии источников тепла и импульса (поверхностных сил) на поверхности контакта выражаются непрерывностью скоростей, температур, тепловых потоков и вектора напряжений

$$[\mathbf{V}] = 0, [T] = 0, \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right] = 0, [\mathbf{P}_n] = 0 \quad (1.4)$$

Здесь  $[f]$  означает скачок величины  $f$  при переходе через границу контакта от первой жидкости ко второй.

Решение задачи (1.1)–(1.4) с фиксированными начальными и граничными условиями будем называть эталонным решением.

Традиционно такого рода задачи решаются с использованием явного выделения поверхности контакта жидкостей. Особенностью методов с явным выделением поверхности контакта сред является алгоритмическая сложность их реализации (необходимость использования конформных отображений, адаптирующихся сеток, процедур выпрямления границ и т.п.). Все эти методы накладывают различные ограничения на возможные перемещения границы раздела сред. Большой гибкостью и универсальностью (быть может, в ущерб точности) обладают методы сквозного счета.

Определяющие параметры задачи – физические свойства жидкостей, параметры, задающие объемные силы, начальные и граничные условия. Определяемые – параметры, характеризующие текущее взаимное расположение жидкостей, текущие поля скоростей и температура.

Для применения метода сквозного счета при определении полей скоростей требуется записать уравнение переноса импульса во всей расчетной области. Поскольку параметры жидкости при пересечении границы контакта могут изменяться скачком или претерпевать нарушения гладкости, необходимо принять меры для обеспечения корректности операции дифференцирования. С этой целью введем определяемый параметр  $C$ , зависящий от некоторой заданной константы  $\epsilon$ . Величина  $C$  в заданной точке соответствует объемной доле одной из жидкостей (условно – первой) в шаровой окрестности этой точки радиуса  $\epsilon$ ,  $C(\epsilon, \mathbf{r}) = C = \vartheta_1/\vartheta$ . В системе жидкость – газ можно интерпретировать параметр  $C$  как объемную концентрацию жидкости в окрестности данной точки.

Сформулируем задачу с непрерывными параметрами следующим образом: в области находятся две несжимаемые жидкости, положение жидкостей задается распределением параметра  $C$  (с фиксированным значением  $\epsilon$ ); значение  $C = 1$  указывает на то, что в данной точке – первая жидкость, значение  $C = 0$  – вторая (или газ), другие значения  $1 > C > 0$  указывают на то, что точка принадлежит области плавного перехода от одной жидкости к другой (области контакта). Область, занятую только  $i$ -й жидкостью, обозначим  $i'$ , область контакта –  $0'$ . Считаем, что и свойства жидкостей зависят от  $C$

$$f = f_1 C + f_2 (1 - C) \quad (1.5)$$

где  $f$  означает  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\xi$ ,  $\lambda$  или  $\beta$  (плотность, коэффициент кинематической вязкости, объемная теплоемкость, коэффициент теплопроводности, коэффициент температурного расширения),  $\kappa = \lambda/\xi$ .

В области контакта сохраняется свойство несжимаемости, поэтому в силу (1.5) имеем

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) C = 0 \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) выполняется тождественно в областях 1' и 2', поскольку в них  $C = \text{const}$ .

Параметр  $\varepsilon$  в задаче с непрерывными параметрами характеризует толщину области контакта при формировании начального положения жидкостей. Однако в силу уравнения (1.6) толщина области контакта не меняется во времени, следовательно, параметр  $\varepsilon$  характеризует толщину области контакта для решения в целом.

Запишем единые уравнения переноса импульса и переноса энергии для всей области с учетом переменности физических и теплофизических свойств в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{a} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{2}{\rho} \nabla \mu \mathbf{S}' + \varphi(\mathbf{V}, p) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{1}{\xi} \nabla \lambda \nabla T \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{S}'$  – тензор скоростей деформации,  $\varphi(\mathbf{V}, p)$  – некоторый ограниченный по  $\varepsilon$  распределенный в  $O'$  источник импульса, который введен с целью подавления паразитных возмущений в области контакта. В силу ограниченности  $\varphi(\mathbf{V}, p)$  суммарный источник, добавленный в модель, может быть сделан сколь угодно малым уменьшением ширины области контакта.

Возникает вопрос, при каких условиях, решая задачу с непрерывными параметрами, будем получать решения, близкие к эталонному? Если решение задачи с непрерывными параметрами устойчиво, то для его сходимости по параметру  $\varepsilon$  к эталонному решению достаточно, чтобы задача с непрерывными параметрами аппроксимировала сопряженную задачу по параметру  $\varepsilon$ . Будем полагать, что задача с непрерывными параметрами обладает свойством устойчивости.

**2. Аппроксимация сопряженной задачи задачей с непрерывными параметрами.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  область контакта стягивается в границу контакта. В результате предельного перехода каждая точка расчетной области либо становится внутренней точкой области 1 или 2, либо точкой границы контакта. Если точка оказалась внутренней точкой области 1 и 2, то движение описывается уравнениями (1.1).

Рассмотрим точку  $O$ , которая при  $\varepsilon \rightarrow 0$  становится точкой границы контакта. Проведем нормаль к границе контакта (к изолинии функции  $C$ ) через  $O$ . Для фиксированного  $\varepsilon$  выберем две точки, одна из которых прилегает к границе области контакта и области первой жидкости (точка 1), другая – к границе области контакта и области второй жидкости (точка 2).

Покажем, что для того чтобы задача с непрерывными параметрами аппроксимировала сопряженную задачу, достаточно, чтобы в каждой точке расчетной области

$$\varepsilon \rightarrow 0: \varepsilon \cdot \text{grad}(\mu) \cdot \mathbf{S}' < \infty \quad (2.1)$$

Выберем систему координат, начало которой совпадает с точкой  $O$ . Ось  $Z$  направлена по нормали к изолинии  $C$ , проходящей через  $O$  (точки  $1$  и  $2$  лежат на оси  $Z$ ,  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости). Оценим величину члена  $\text{grad}(\mu) \cdot \mathbf{S}'$  уравнения (1.7). В новой системе координат частные производные  $\mu$  по  $x$  и  $y$  равны нулю, поэтому

$$\text{grad}(\mu)\mathbf{S}' \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_2}{\varepsilon} \right) \\ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v_1 - v_2}{\varepsilon} \right) \\ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\varepsilon} \frac{w_1 - w_2}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Предположим, что в точке  $O$  нарушается первое из условий (1.4), т.е. хотя бы одна из разностей  $u_1 - u_2, v_1 - v_2$  или  $w_1 - w_2$  не стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , но это противоречит условию (2.1). Следовательно, выполнение условия (2.1) обеспечивает непрерывность поля скоростей. Непрерывность поля скоростей влечет непрерывность полных ускорений (доказательство имеется, например, в [9]) и из уравнения (1.7), записанного в напряжениях, при ограниченном источнике  $\varphi(\mathbf{V}, p)$  получаем динамическую совместимость контактирующих сред – последнее из условий (1.4).

Таким образом, условие (2.1) является достаточным условием для аппроксимации сопряженной задачи по  $\varepsilon$  задачей с непрерывными параметрами.

**3. Уравнение переноса импульса в области контакта.** Условие (2.1) имеет простой физический смысл: поле скоростей гладко и имеет ограниченные по  $\varepsilon$  пространственные производные. Для описания движения жидкости в области контакта необходимо написать уравнение, дающее гладкое с ограниченными по  $\varepsilon$  пространственными производными решение и подавляющее относительные перемещения элементов области контакта. Этим требованиям хорошо удовлетворяет условие  $\mathbf{S}' = 0$ , когда каждая точка области контакта ведет себя как элемент твердого тела. Однако  $\mathbf{S}' = 0$  не является эволюционным уравнением и не может быть согласовано с уравнением (1.7), имеющем силу в областях  $1'$  и  $2'$ . Запишем уравнение переноса импульса в области контакта  $0'$  следующим образом:

$$\rho_m \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) \right) = \rho a - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + 2 \nabla (\mu) \mathbf{S}' \quad (3.1)$$

Здесь  $\rho_m$  – осредненная по толщине области контакта плотность, вместо конвективного члена  $(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V}$  использована эквивалентная при  $\mathbf{S}' = 0$  запись  $-\text{grad}(\mathbf{V} \mathbf{V})/2$ . Уравнение (3.1) не имеет источников возмущения сдвиговых движений жидкости. Использование осредненной плотности вместо локальной при инерционном члене позволяет подавить разность относительных ускорений слоев области контакта, вызванных силами плавучести. Легко убедиться в том, что уравнение (3.1) для  $0'$  получается из (1.7) при подстановке ограниченного по  $\varepsilon$  источникового члена

$$\varphi(\mathbf{V}, p) = \frac{(\rho - \rho_m)}{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right) \quad (3.2)$$

Очевидно, уравнение (3.1) не всегда удовлетворяет условию  $\mathbf{S}' = 0$ , однако, подавляя возмущения, связанные с неоднородностью массовых сил по толщине области контакта, обеспечивает постоянство толщины области контакта во времени, необходимое для корректности уравнения (1.6).

**4. Реализация алгоритма для двумерной задачи.** Цилиндрическая емкость с прямоугольным основанием заполнена двумя несмешивающимися несжимаемыми жидкостями или жидкостью и газом. Рассмотрим двумерное течение в плоскости сечения,

перпендикулярной оси цилиндра. Для определенности считаем, что  $\rho_1 > \rho_2$ , более легкую жидкость будем называть газом. Если не оговорено особо, то будем предполагать, что в начальный момент времени  $t = 0$  известно распределение  $C$  (т.е. задано положение жидкостей) в расчетной области, жидкости неподвижны и задано распределение температур. На стенках емкости используются различные граничные условия, но, как правило, условие непротекания, условие прилипания жидкости на стенке и условие изотермичности стенок. Для функции  $C$  на стенках реализуется условие симметрии.

При переходе к безразмерным параметрам в качестве масштабов длины времени и давления используются соотношения  $R, R^2/a_1$  и  $a_1^2 \rho_1 / R^2$  соответственно, безразмерная температура определяется по формуле  $T = (T' - T_{\min}) / (T_{\max} - T_{\min})$ , где  $T'$  – размерная температура, безразмерными определяющими параметрами задачи являются числа Галилея ( $Ga = gR^3/\nu_1^2$ ), Грасгофа ( $Gr = \beta_1 \Delta T g R^3 / \nu_1^2$ ) и Прандтля ( $Pr = \nu_1/a_1$ ). Функции параметра  $C$ , определяемые соотношениями (1.5), отнесены к соответствующим значениям первой жидкости. Будем полагать, что вектор-функция ускорений  $\mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{M}^* + \mathbf{B}^*$ , где  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести, а  $\mathbf{M}^*$  и  $\mathbf{B}^*$  соответствуют некоторым дополнительным массовым силам, заменяющим силы поверхностного натяжения и термокапиллярные силы.

Движение в двумерной постановке описывается уравнениями переноса импульса для областей  $1'$  и  $2'$  и области контакта

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = Ga_x Pr^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + Pr \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = Ga_y Pr^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Pr \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

$$\frac{\rho_m}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2) \right) = Ga_x Pr^2 + B_x + M_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Pr}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \rho \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \quad (4.3)$$

$$\frac{\rho_m}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2) \right) = Ga_y Pr^2 + B_y + M_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{Pr}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \quad (4.4)$$

$$Ga_x = Ga \frac{g_x}{g}, \quad Ga_y = Ga \frac{g_y}{g}$$

Здесь  $\rho, \nu, \alpha, \beta$  – безразмерные функции определяемого параметра  $C$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{M}$  – безразмерные образы  $\mathbf{B}^*$  и  $\mathbf{M}^*$ .

Без учета поверхностных сил сопряженная задача при  $\epsilon \rightarrow 0$  аппроксимируется задачей с непрерывными параметрами. Для корректности введения массовых сил  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{M}$ , нужно показать, что при  $\epsilon \rightarrow 0$  они дают то же самое условие на образующейся границе контакта, что используют для описания поверхностных сил в сопряженной постановке.

Поверхностные силы в задаче с непрерывными параметрами следует рассматривать как распределение по толщине области раздела сред. Каждая изолиния ( $C = \text{const}$ ), проходящая через данную точку области контакта, определяет условную поверхность раздела с некоторым своим коэффициентом поверхностного натяжения. Каждая

условная поверхность создает свой перепад давления, который выражается в силе, приложенной к единичной площадке, перпендикулярной направлению нормали

$$\mathbf{B} = \frac{\Sigma \zeta \text{grad}(C)}{\rho}, \quad \Sigma = \frac{\sigma R}{\rho_1 a_1^2} = \frac{\text{Ga Pr}^2}{\text{Bo}} \quad (4.5)$$

а  $\zeta$  – кривизна изолинии  $C$ , проходящей через данную точку области контакта. Положительное значение  $\zeta$  соответствует обходу первой жидкости против часовой стрелки. Число Бонда  $\text{Bo} = \rho_1 g R^2 / \sigma$  характеризует соотношение сил плавучести и сил поверхностного натяжения.

Вектор  $\mathbf{B}$  задает некоторый дополнительный градиент давлений  $\text{grad } p' = \mathbf{B} \rho$ , или  $\text{grad } p' = \Sigma \zeta \text{grad } C$ , откуда, полагая, что  $\zeta$  постоянна вдоль направления градиента  $C$ , с точностью до константы получаем  $p' = C \Sigma \zeta$ . Таким образом область контакта обеспечивает перепад давления между точками  $r_1(C = 1 - \text{первая жидкость})$  и  $r_2(C = 0 - \text{вторая жидкость})$  на одной нормали к области контакта (изолиниям функции  $C$ )

$$\Delta p' = p_1 - p_2 = (C_1 - C_2) \Sigma \zeta = \Sigma \zeta$$

что соответствует скачку давления, созданному силами поверхностного натяжения, на поверхности раздела сред в сопряженной задаче. Параметр  $\epsilon$  не входит в это выражение.

Для описания поверхностных термокапиллярных сил, обусловленных зависимостью от температуры коэффициента поверхностного натяжения, используем массовую силу  $\mathbf{M}$ , "размазанную" по толщине области контакта и направленную вдоль вектора касательной  $\mathbf{m}$  к изолиниям функции  $C$

$$\mathbf{M} = - \frac{\text{Ma Pr}}{\rho} ((\text{grad } T) \mathbf{m}) \mathbf{m} \text{grad } C \quad (4.6)$$

Скалярное произведение  $(\text{grad } T) \mathbf{m}$  является производной температуры вдоль границы контакта, а внешний множитель вектор  $\mathbf{m}$  задает направление действия термокапиллярной силы. Записав уравнение движения элемента области контакта (4.3), (4.4) с учетом только сил (4.6) в системе координат, связанной и движущейся в рассматриваемый момент времени равномерно и прямолинейно с точкой  $O$  области контакта, при  $\epsilon \rightarrow 0$  на образующейся границе раздела сред получим

$$- \text{Ma} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial V_m}{\partial n} \Big|_1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial V_m}{\partial n} \Big|_2 \quad (4.7)$$

где  $m$  – координата вдоль касательной к изоляции  $C$ ,  $n$  – вдоль нормали, внешней по отношению к первой жидкости. Это соотношение на границе раздела сред описывает термокапиллярное движение в сопряженной задаче [10].

Для численного решения уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости, естественно использовать переменные  $\Psi, W$  (функция тока и функция интенсивности вихря). Объявив узлы расчетной сетки, в которых  $\text{grad } C \neq 0$ , узлами, принадлежащими области контакта, уравнение переноса импульса можно записать единым уравнением для всей расчетной области (члены, зависящие от частных производных  $C$  по  $x, y$ , автоматически обнуляются в областях  $1'$  и  $2'$ ,  $\rho_m = \rho$  в областях  $1'$  и  $2'$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \left( \frac{\beta}{\rho} \text{Pr}^2 \left( \frac{\partial T}{\partial y} \text{Gr}_x - \frac{\partial T}{\partial x} \text{Gr}_y \right) - u \frac{\partial W}{\partial x} - v \frac{\partial W}{\partial y} \right) (1 - \text{sgn}(C(1-C))) + \\ & + \frac{\text{Pr}^2}{\rho_m} \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left( \frac{\partial C}{\partial y} \text{Ga}_x - \frac{\partial C}{\partial x} \text{Ga}_y \right) + \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \Sigma - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\text{Ma Pr}}{\rho_m |\text{grad } C|^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \right) \right) + \\
& + \frac{\text{Pr}}{\rho_m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho v \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho v \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Функция интенсивности вихря и составляющие скоростей связаны с функцией тока соотношениями

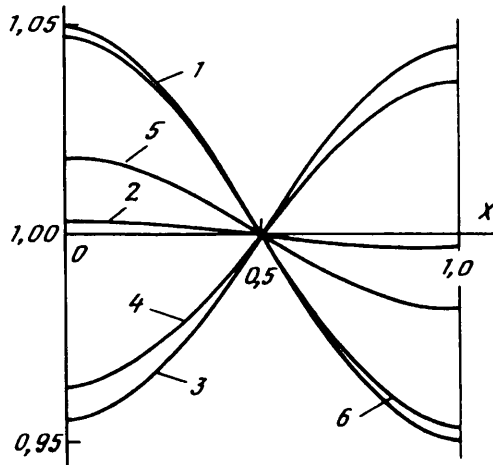
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = W, \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

**5. О численной реализации.** На основе описанной выше математической модели был построен алгоритм расчета и получены результаты, представленные в [11, 12]. Для удовлетворения требования сохранения (не увеличения) толщины области контакта в [12] использовалась специальная схема решения уравнения (4.11), основанная на методе "жидкость в ячейке" [13]. Для каждой ячейки расчетной области в текущий момент времени определялся баланс массы первой жидкости на основе текущего состояния поля скоростей. При этом использовалось допущение о том, что жидкость в ячейке в каждый момент времени не распределена равномерно, а занимает определенное положение по отношению к текущему состоянию системы. Было принято, что первая жидкость в ячейке смещается в сторону градиента функции  $C$ . При расчете перетока смеси из одной ячейки в другую учитывалось, что в первую очередь перетекает примыкающая к границе жидкость. Такой подход оказался более универсальным, нежели используемый в [12]. Одновременно с переносом массы определялся и конвективный перенос количества тепла, диффузионный теплообмен между ячейками рассчитывался на основе решения задачи распада температурного разрыва.

Для определения кривизны изолиний при вычислении поверхностных сил использовалась аппроксимация  $C$  на девятиточечном шаблоне окрестности данного узла. Для граничных узлов за пределами расчетной области использованы фиктивные узлы, значения  $C$  в них подбираются так, чтобы обеспечить требуемый угол смачивания (например, перенос значений  $C$  из граничных узлов дает угол смачивания  $90^\circ$ , значения  $C = 1$  обеспечивают нулевой угол смачивания).

Детальное описание особенностей численной реализации предполагается представить в последующих публикациях. При численном решении уравнения (4.8) можно формально обеспечить второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, однако алгоритм для  $C$  имеет первый порядок, поэтому в области контакта метод в целом обеспечивает лишь первый порядок аппроксимации. При оценке точности метода следует иметь в виду, что основную погрешность в решении вносит алгоритм расчета положения области контакта, погрешность пропорциональна шагу пространственного разбиения.

**6. Некоторые результаты расчетов.** Описанный здесь сквозной метод, основанный на "размазывании" границы раздела сред, применим к широкому классу задач. Однако существует целый ряд ограничений, связанный с принятыми в методе допущениями. Во-первых, объем области контакта должен быть много меньше объемов контактирующих сред или их частей. Образующиеся капли жидкости (или пузыри газа) малого размера могут вести себя "нефизично". Следует брать во внимание лишь объемы, много большие объема ячейки сетки. Равновесная форма поверхности жидкости, имеющей кривизну, претерпевает искажение, если радиус кривизны порядка размера ячейки. Во-вторых, термокапиллярные эффекты очень чувствительны к грубости пространственной сетки, поскольку при любом конечном значении пространственного шага "поверхность" (область контакта) имеет толщину, примерно равную этому шагу, и в уравнении движения для области контакта остается существенным вклад инерционного члена.



Фиг. 1. Колебания поверхности жидкости в постоянном поле вектора ускорения ( $Ga = 10^6$ ,  $Pr = 1$ ,  $\Sigma = 0$ ); показаны моменты 0; 0,0007; 0,0017; 0,0025; 0,004; 0,005 (кривые 1–6)

Важнейшим критерием корректности работы алгоритма является постоянство толщины области контакта во времени. Выполнение этого критерия зависит от значений определяющих параметров задачи, начального состояния, характера воздействия внешних возбуждающих факторов (поведение вектора ускорения и подвод тепла к жидкостям от стенок емкости) и выбора параметров счета.

Результаты расчетов, представленные в настоящем разделе, иллюстрируют возможности описанного метода давать качественно правильные результаты на сложных течениях с подвижной границей раздела сред.

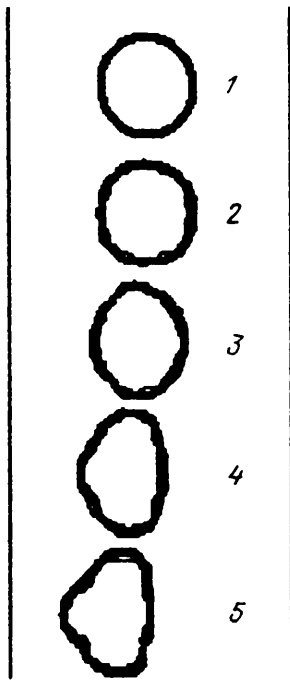
Колебания поверхности жидкости в постоянном поле вектора ускорения ( $Ga = 10^6$ ,  $Pr = 1$ ,  $\Sigma = 0$ ) вызваны начальным отклонением поверхности от равновесного положения, начальное положение задано функцией  $y = 0.5 + A \cos(\pi x)$  (фиг. 1). После завершения полного периода колебаний поверхность раздела сред занимает практически начальное положение.

Колебания жидкости, представленные на фиг. 1, имеют малую амплитуду и могут рассматриваться как близкие к линейным. Благодаря этому можно провести количественное сравнение полного периода колебания жидкости с периодом, полученным из решения задачи о малых линейных колебаниях поверхности идеальной жидкости около своего равновесного положения в постоянном поле сил тяжести [14]. Последняя решена численно-аналитическим методом в [15]. Периоды малых линейных колебаний, полученные из численно-аналитического решения [15] и в расчете, результаты которого представлены на фиг. 1, различаются на 9%.

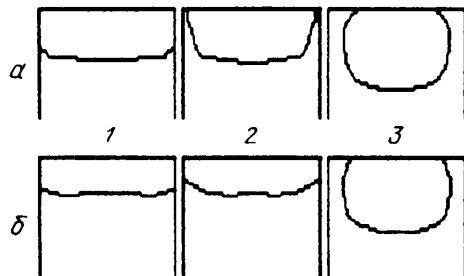
На фиг. 2 приводятся результаты расчета термокапиллярного дрейфа пузыря воздуха в воде в условиях невесомости, вызванного горизонтальным градиентом температур в жидкости ( $Ga = 0$ ,  $Pr = 7$ , отношение плотностей газа и жидкости  $\rho_g/\rho_f = 0,001$ ,  $\Sigma = 10^7$ ,  $Ma = 10^4$ , сетка  $51 \times 51$ ). Установившаяся скорость дрейфа пузыря меньше скорости, полученной по экспериментальной формуле [16], на 34%. Занижение скорости дрейфа, по-видимому, связано с плоской формой пузыря. Отметим качественное соответствие полученных расчетных результатов с результатами многочисленных исследований по изучению формы дрейфующего пузыря – пузырь, имеющий меньшую плотность по сравнению с плотностью окружающей жидкости, сплющивается в направлении дрейфа.

В [6] представлены результаты экспериментального и численного исследования процесса формирования воздушного пузыря в силиконовом масле в результате де-





Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Термокапиллярный дрейф воздушного пузыря в воде. Размер емкости 1 см, перепад температур на противоположных стенках  $1^\circ \text{C}$  ( $Ga = 0$ ,  $Pr = 7$ ,  $\rho_g/\rho_f = 0,001$ ,  $\Sigma = 10^7$ ,  $Ma = 10^4$ , сетка  $51 \times 51$ ); показаны моменты 0; 0,00001; 0,00004; 0,00007; 0,00010 (кривые 1–5)

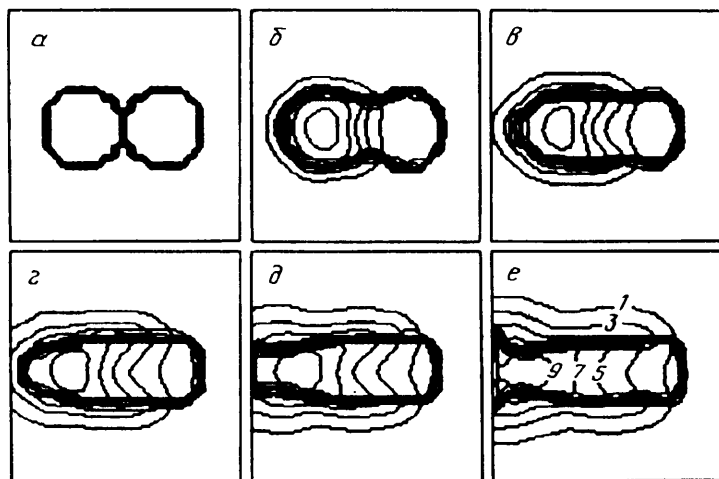
Фиг. 3. Формирование воздушного пузыря в силиконовом масле за счет капиллярных сил в условиях невесомости; *a* – расчет автора, *б* – результат работы [6]; время: 1 – 0,03 с, 2 – 0,23 с, 3 – 0,53 с

формации поверхности раздела сред в полной невесомости под действием капиллярных сил. Предполагалось, что в начальный момент жидкость и газ занимали положение, соответствующее устойчивому состоянию в постоянном поле вектора ускорения, направленного вдоль оси цилиндрической емкости. Угол смачивания поверхности стенок емкости жидкостью равен нулю. Необходимые данные сведены в таблицу:

$h$ , м	$d$ , м	$h_f$ , м	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\sigma$ , кг/с <sup>2</sup>
0,05	0,028	0,045	1000	0,023

На фиг. 3, *a* представлены последовательные положения поверхности раздела сред после "отключения" поля сил тяжести, полученные с использованием описанного в настоящей работе подхода (время в секундах). Нулевой угол смачивания достигался путем соответствующего доопределения функции  $C$  за границами расчетной области. Все значения  $C$  девятиточечного шаблона (используемого для определения кривизны и положения поверхности раздела сред), выходящие за пределы расчетной области, принимались равными единице. На фиг. 3, *б* представлены соответствующие результаты работы [6] (время в секундах).

Во всех приведенных расчетах ширина области контакта остается практически неизменной. Это является свидетельством выполнения условия сопряжения областей по скоростям.



Фиг. 4. Слияние двух капель жидкости различной температуры, погруженных в другую жидкость, под действием капиллярных и термокапиллярных сил; изотермы проведены с шагом 0,2; 1 – 0,1, 3 – 0,3, 5 – 0,5, 7 – 0,7, 9 – 0,9; показаны моменты времени 0; 0,0003; 0,0007; 0,0010; 0,0013; 0,0016 (a–e)

**7. Решение задачи о слиянии двух капель.** В работе [7] численно исследован процесс слияния двух капель одной и той же жидкости с различными температурами с учетом капиллярных и термокапиллярных сил. Расчеты выполнены при условии теплоизоляции на поверхности жидкости и отсутствия динамического взаимодействия с окружающей средой. Правомочность этих условий зависит от параметров жидкостей. Сопряженная формулировка задачи, положенная в основу описанного выше метода, позволяет выполнить расчеты без наложения условий на характер теплообмена и характер динамического взаимодействия контактирующих сред.

В емкости квадратного сечения две капли одной жидкости (более плотной) погружены в другую жидкость (менее плотную) и в начальный момент находятся в соприкосновении. В условиях полной невесомости ( $Gr = 0$ ) слияние капель происходит под действием сил поверхностного натяжения. В начальный момент температура одной из капель отличается от температуры другой капли и окружающей среды, поэтому процесс слияния осложняется термокапиллярными силами, возникающими из-за неоднородности температуры на поверхности раздела сред. Скорость слияния и динамика изменения формы поверхности раздела сред зависят от соотношений определяющих параметров (чисел  $Pr$ ,  $\Sigma$ ,  $Ma$ ) и от соотношений свойств контактирующих сред.

На фиг. 4 показаны последовательные положения поверхности сливающихся капель ( $Pr = 1$ ,  $\Sigma = 10^5$ ,  $Ma = 10^5$ ,  $\rho_2/\rho_1 = 0,5$ ,  $v_2/v_1 = 1$ ,  $\lambda_2/\lambda_1 = 0,1$ ,  $a_2/a_1 = 0,1$ ). В начальный момент левая капля нагрета относительно правой капли и окружающей жидкости. Распространение тепла в процессе слияния капель показано изотермами. Вся система осуществляет термокапиллярный дрейф к левой стенке, вытягиваясь при этом в направлении дрейфа. Последний эффект не мог быть получен в [7] в силу принятых допущений.

**Заключение.** Для построения алгоритма сквозного расчета движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей использовалась механическая модель, в которой поверхность контакта жидкостей представлялась как тонкая пленка, движущаяся вместе с жидкостями. Результаты расчетов, представленные в настоящей работе, а также в [10, 11], иллюстрируют применимость разработанного сквозного метода

решения к широкому кругу задач о движении и теплообмене двухжидкостных систем. Особенно метод полезен в задачах, решение которых не требует высокой точности, а характер движения жидкости заранее не известен.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лыков А.В., Михайлов Ю.А.* Теория теплообмена. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. 535 с.
2. *Купцова В.С.* Математические модели сопряженных задач естественной конвекции // Изв. АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук. 1985. № 3. С. 52–58.
3. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач со свободными границами. М.: Изд-во МГУ, 1987. 164 с.
4. *Любимов Д.В., Любимова Т.П.* Об одном методе сквозного счета для решения задач с деформируемой поверхностью раздела. // Моделирование в механике. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. Т. 4. № 1. С. 126–130.
5. *Лапин А.Ю., Любимова Т.П.* О применении метода концентраций для исследования нелинейных явлений на поверхности раздела в рамках двухполюсного подхода. // Моделирование в механике. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1992. Т. 6. (23). № 1. С. 58–64.
6. *Ohnishi Mitsuru, Ogiwara Sachio, Yoshihara Shoichi, Azuma Hisao.* Free surface fluid behavior in a two dimensional container with arbitrary configuration // Acta Astronaut. 1990. V. 21. № 6–7. P. 495–504.
7. *Ohnishi Mitsuru, Yoshihara Shoichi, Azuma Hisao.* Computer simulation of thermocapillary motion with surface deformation // Microgravity Q. 1992. V. 2. № 1. P. 17–28.
8. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц. М.: МФТИ, 1978. 124 с.
9. *Кочин Н.Е.* К теории разрывов в жидкости // Сбор. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. С. 5–42.
10. *Авдуевский В.С., Бармин И.В., Гришин С.Д. и др.* Проблемы космического производства. М.: Машиностроение, 1980. 221 с.
11. *Ветошкин А.М., Корольков А.В., Савичев В.В.* Особенности поведения жидкости и системы жидкость – газ в условиях, близких к невесомости // Изв РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 122–128.
12. *Корольков А.В.* Численное моделирование методом сквозного счета поведения системы жидкость – газ в переменном поле вектора ускорения // Изв РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 129–134.
13. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
14. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д. и др.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
15. *Ветошкин А.М., Корольков А.В.* О численном моделировании поведения системы жидкость – газ // Вопросы гидродинамики и теплопередачи в технологических процессах. М.: МГУЛ, 1993. Вып. 259. С. 148–163.
16. *Братухин Ю.К., Зуев А.Л.* Термокапиллярный дрейф пузырька воздуха в горизонтальной ячейке Хеле – Шоу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 62–67.

Москва

Поступила в редакцию  
15.VIII.1995